

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $z = x + iy$:

$$z_1 := (2 - 3.5i)(3 - 2.5i) \quad , \quad z_2 := \frac{3 - 5i}{7 + 2i} \quad ,$$

$$z_3 := (10.5 + 0.2i)(8 - 7i) \quad , \quad z_4 := 3 + 7i + (7 - 2i)(1 + i) - \frac{5 - 8i}{1.2 + 2.4i}$$

Lösung: Unter Verwendung von $i^2 = -1$ ist:

$$\begin{aligned} z_1 &= (2 - 3.5i)(3 - 2.5i) = 6 - 5i - 11.5i + 8.75i^2 \\ &= (6 - 8.75) + (-5 - 11.5)i = -2.75 - 16.5i \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $a/b = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{\bar{b}}{|b|^2}$ ist:

$$z_2 = \frac{3 - 5i}{7 + 2i} = (3 - 5i) \frac{7 - 2i}{49 + 4} = \frac{1}{53} (21 - 6i - 35i - 10) = \frac{11}{53} - \frac{41}{53}i$$

Wie oben ergibt sich auch:

$$z_3 = (10.5 + 0.2i)(8 - 7i) = 84 - 73.5i + 1.6i + 1.4 = 85.4 - 71.9i$$

und

$$\begin{aligned} z_4 &= 3 + 7i + (7 - 2i)(1 + i) - \frac{5 - 8i}{1.2 + 2.4i} \\ &= (3 + 7 + 2) + i(7 + 7 - 2) - (5 - 8i) \frac{1.2 - 2.4i}{1.44 + 5.76} \\ &= 12 + 12i - \frac{1}{7.2} (6 - 19.2 - 12i - 9.6i) \\ &= \left(12 + \frac{13.2}{7.2}\right) + \left(12 + \frac{21.6}{7.2}\right)i = \left(13 + \frac{6}{7.2}\right) + 15i \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in Polarform $z = re^{i\phi}$ dar:

$$z_1 := 2 + 2i \quad , \quad z_2 := -1 - i \quad , \quad z_3 := \frac{2 + 2i}{-1 - i} \quad ,$$

$$z_4 := (-2i)(4e^{2+3i}) \quad , \quad z_5 := \frac{1}{2i}$$

Lösung: Für $z = x + iy$ ist

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Ausserdem ist für $x > 0$:

$$\phi = \arctan \frac{y}{x},$$

und für $x < 0$:

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} + \pi.$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2^2 + 2^2} e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2} e^{i\pi/4}, \\ z_2 &= \sqrt{1 + 1} e^{i\pi 5/4} = \sqrt{2} e^{i\pi 5/4}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $1/e^a = e^{-a}$ und $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ erhalten wir auch:

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1/z_2 = 2e^{i\pi/4-i\pi 5/4} = 2e^{-i\pi} = 2e^{i\pi}, \\ z_4 &= (2e^{i\pi 3/2})(4e^2 e^{3i}) = 8e^2 \cdot e^{i(3+\pi 3/2)}. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$ ist:

$$z_5 = -\frac{i}{2} = (1/2)e^{i\pi 3/2}.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie alle vierten Wurzeln aus $4i$ und alle sechsten Wurzeln aus 1 und stellen Sie diese in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ dar.

Lösung:

Sei n eine positive ganze Zahl. Die allgemeine Regeln für n -te komplexe Wurzeln einer komplexen Zahl $z = re^{i\phi}$ ist:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\phi/n + k2\pi i/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

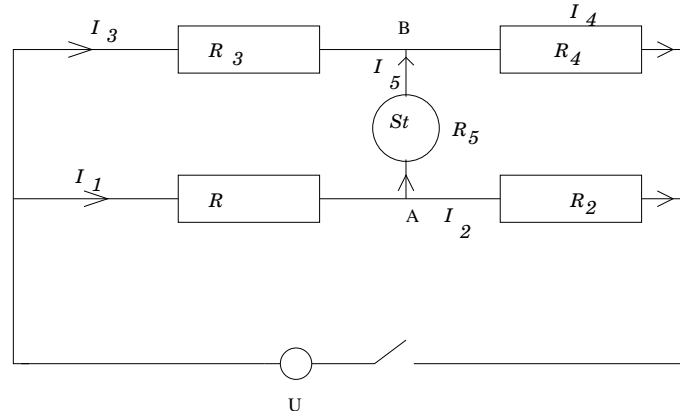
Damit ermitteln wir:

$$\begin{aligned} 4i &= 4e^{i\pi/2} \\ \Rightarrow \sqrt[4]{4i} &= \sqrt[4]{4} e^{i\pi/8 + k2\pi i/4}, \quad k = 0, \dots, 3 \\ &= \sqrt[4]{4} e^{i\pi/8 + ki\pi/2}, \quad k = 0, \dots, 3, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 1 &= e^0 \\ \Rightarrow \sqrt[6]{1} &= \sqrt[6]{1} e^{0 + k2\pi i/6}, \quad k = 0, \dots, 5 \\ &= e^{ki\pi/3}, \quad k = 0, \dots, 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Mit Hilfe der Wechselstrom-Messbrücke kann ein komplexer Widerstand $\mathcal{R}$ durch Messung eines Regelwiderstandes $\mathcal{R}_4$ bestimmt werden:



Gegeben sind die Widerstände $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$, gesucht ist der Widerstand $\mathcal{R}$. Der Widerstand $\mathcal{R}_4$ kann reguliert werden. Unter Verwendung der Spannungsregeln und der Kirchhoffschen Regeln für Schaltkreise folgt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathcal{R}I_1 + \mathcal{R}_5I_5 = \mathcal{R}_3I_3 \\ (2) \quad & \mathcal{R}_4I_4 + \mathcal{R}_5I_5 = \mathcal{R}_2I_2 \\ (3) \quad & I_1 - I_2 - I_5 = 0 \\ (4) \quad & I_3 - I_4 + I_5 = 0 \end{aligned}$$

Reguliert man $\mathcal{R}_4$ so ein, dass die "Brücke" $\overline{AB}$ stromlos wird, so ist dies durch die Gleichgewichtsbedingung $I_5 = 0$ charakterisiert.

- a) Es sei $\mathcal{R}_4$ so reguliert, dass $I_5 = 0$ ist. Berechnen Sie $\mathcal{R}$ aus $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ und $\mathcal{R}_4$, also *ohne* Kenntnis der beteiligten Ströme $I_1, \dots, I_4$.
- b) Angenommen, es sei $\mathcal{R}_2 = 20 + 10j$, $\mathcal{R}_3 = 5 + 2j$ und die Messbrücke sei bei $\mathcal{R}_4 = 50 + 75j$ stromlos. Bestimmen Sie dann den Scheinwiderstand $|\mathcal{R}|$.

Lösung:

- a) Die Gleichgewichtsbedingung $I_5 = 0$ liefert unter Verwendung der Kirchhoffschen Regeln (3) und (4):

$$I_1 = I_2 \quad \text{und} \quad I_3 = I_4.$$

Eingesetzt in die Spannungsregeln (1) und (2) für die entsprechenden Parallelschaltungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} I_1\mathcal{R} &= \mathcal{R}_3I_3, \\ \mathcal{R}_4I_3 &= \mathcal{R}_2I_1, \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_3 \frac{I_3}{I_1} \quad \text{und} \quad \frac{I_3}{I_1} = \frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_4}.$$

Ergo:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_4}.$$

b) Da die Messbrücke bei $\mathcal{R}_4 = 50 + 75j$ stromlos ist, können wir die Formel aus Teil a) verwenden und erhalten:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_4} = \frac{(20 + 10j)(5 + 2j)}{50 + 75j},$$

und daher

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}| &= \frac{|\mathcal{R}_2| |\mathcal{R}_3|}{|\mathcal{R}_4|} = \frac{|20 + 10j| |5 + 2j|}{|50 + 75j|} = \frac{\sqrt{400 + 100} \sqrt{25 + 4}}{\sqrt{2500 + 5625}} \\ &= \sqrt{\frac{500 \cdot 29}{8125}} = \sqrt{\frac{2900}{1625}} = \sqrt{\frac{580}{325}} = \sqrt{\frac{116}{65}} \sim 1.335895 \end{aligned}$$