

**Skriptum Mathematik III WS 16/17 für Ingenieurstudenten  
Maschinenbau**

T. von der Twer



# Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Determinanten und Eigenwerttheorie	1
1. Matrizen und Basen, Basiswechsel, Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit	5
2. Determinanten	9
3. Eigenwerttheorie	14
Kapitel 2. Anwendungen der Eigenwerttheorie	21
1. Quadratische Formen und symmetrische Matrizen, Signatur und Definitheit	23
2. Anwendung auf Quadriken (Hauptachsentransformation)	24
3. Anwendung auf Extrema bei Funktionen mehrerer Veränderlicher	27
4. Anwendung auf lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten	29
Kapitel 3. Kurven im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$	39
1. Parametrisierungen von Kurvenbahnen	39
2. Kurvenintegrale	47
3. Krümmung von Kurven	52
4. Begleitende Dreibeine und Torsion bei Raumkurven	56
5. Evoluten und Evolventen von Kurven im $\mathbb{R}^2$	60
Kapitel 4. Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik	65
1. Einleitung: Motivierung und Grundbegriffe	65
2. Vorbereitung: Grundlegendes über das Rechnen mit Mengen	65
3. Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie	66
4. Der Begriff der Unabhängigkeit und das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten	70
5. Zufallsvariablen, zufällige Größen	73
6. Die wichtigen Verteilungsparameter Erwartungswert und Varianz (bzw. Streuung)	79
7. Die wichtigsten diskreten Verteilungen	84
8. Verteilungen mit Dichte	91
9. Einige Anwendungen der Normalverteilung	96
10. Anwendung der $t$ -Verteilung auf die Mittelwertschätzung	99
11. Die Weibull-Verteilungen	103
12. Die $\chi^2$ -Verteilungen	107
13. Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe und Formeln	110
14. Lineare Regression und Korrelation	113
15. Nichtlineare Zusammenhänge, bei mehr als einer Eingabevariablen	118
16. Fouriertransformation in der Wahrscheinlichkeitstheorie	119



KAPITEL 1

**Determinanten und Eigenwerttheorie**

**Erinnerung an komplexe Zahlen :**  $\mathbb{C} = \{x + jy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $j^2 = -1$ ,

**komplexe Konjugation :**  $\overline{x + jy} := x - jy$ , dabei ist  $x, y \in \mathbb{R}$ , man hat  
 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ,  $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ , für  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

(Für 'j' findet man vielfach 'i', vor allem im rein mathematischen Bereich.)

**Vorausgesetzte Grundbegriffe und Sätze zu Vektoren und Matrizen:**

Vektorraum der Dimension  $n$  ( $n$  eine natürliche Zahl  $\geq 0$ ) über  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ , insbesondere  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ .

Basis eines Vektorraums: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem des Vektorraums

Die Operation '**Matrix mal Vektor**': Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m, n \geq 1$  natürliche Zahlen) eine Matrix mit reellen Einträgen und  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, geschrieben auch  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ , dann ist

für einen Vektor  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  definiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Das **Produkt zweier Matrizen**  $AB$  mit Zeilenzahl von  $B =$  Spaltenzahl von  $A$  lautet:

$$(a_{ij})_{ij} (b_{jk})_{jk} = (c_{ik})_{ik}, \text{ wobei } c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}, \text{ auch so zu sehen:}$$

$$A \left( \vec{\mathbf{b}}_1, \dots, \vec{\mathbf{b}}_K \right) = \left( A \vec{\mathbf{b}}_1, \dots, A \vec{\mathbf{b}}_K \right) \text{ (Matrix } B \text{ und } AB \text{ als Spaltenvektorfolge geschrieben.)}$$

Eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt invertierbar, wenn es eine Matrix  $A^{-1}$  gibt (diese ist dann eindeutig bestimmt) mit der Eigenschaft  $A^{-1}A = E_n$ . Dabei ist  $E_n$  die  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix

$$E_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ also } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

**Satz:**  $A$  quadratisch, dann ist  $A$  genau dann invertierbar, wenn die Zeilenvektoren von  $A$  [bzw. die Spaltenvektoren von  $A$ ] linear unabhängig sind.

**Bemerkungen:** All dies ist wörtlich anwendbar auf Matrizen mit komplexen Einträgen.

Entsprechend schreibt man  $\mathbb{C}^{m \times n}$  und bildet  $A\vec{\mathbf{x}}$  für  $A = A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  und  $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$ .

**Grundlegendes zur Matrizenrechnung:**

Matrizen werden komponentenweise addiert, man denke für das Folgende den Hauptfall voraus, dass alle Matrizen quadratisch von derselben Dimension sind.

$A^T$  entsteht aus  $A$  durch Vertauschen von Zeilen und Spalten (Transposition),

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ (} A, B \text{ beide invertierbar),}$$

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$(A^T)^T = A$$

(So auch für komplexe Matrizen, aber dabei tritt Transposition mit Konjugation auf, s.u.)

**Satz:**  $A^T = A^{-1}$  ( $A$  quadratisch reell) genau dann, wenn die Spalten (bzw. Zeilen)

von  $A$  eine Orthonormalbasis bilden. Zur Erinnerung die **Definition:**

$\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n$  bilden eine **Orthonormalbasis** von  $\mathbb{R}^n$  genau dann, wenn  $\vec{\mathbf{a}}_i \cdot \vec{\mathbf{a}}_j = \delta_{ij}$  für  $1 \leq i, j \leq n$ .

Dabei ist  $(x_i)_i \cdot (y_i)_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  das reelle Skalarprodukt.

### Definitionen und Sätze zu Determinanten

**Definition:** Die **Determinante** einer **quadratischen Matrix**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist definiert durch:  $\det(A)$  ist  $n$ -fach linear alternierend in den Spalten von  $A$ , und  $\det(E_n) = 1$ . Dabei heißt  $n$ -**fach linear**: Für jede Spalte mit Nummer  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , gilt:

$$(i) \det(\dots, \vec{a}_j + \vec{b}_j, \dots) = \det(\dots, \vec{a}_j, \dots) + \det(\dots, \vec{b}_j, \dots)$$

$$(ii) \det(\dots, \lambda \vec{a}_j, \dots) = \lambda \det(\dots, \vec{a}_j, \dots)$$

(Alle Spalten mit Nummern  $k \neq j$  sind stets mit  $\vec{a}_k$  besetzt.)

**alternierend** heißt:  $\det(\dots \vec{x} \dots \vec{x} \dots) = 0$ . (Bei Gleichheit von zwei Spalten resultiert Null.)

#### Folgerungen:

(Für das Folgende ist definiert:  $\sigma(j_1, \dots, j_n) =$  Vorzeichen der Permutation  $(j_1, \dots, j_n)$ , und das ist die Anzahl der Paarvertauschungen, mit denen  $(j_1, \dots, j_n)$  aus  $(1, \dots, n)$  herstellbar ist.)

$(j_1, \dots, j_n)$  heißt Permutation von  $(1, \dots, n)$ , wenn die Zahlen  $j_1, \dots, j_n$  genau die Zahlen  $1, \dots, n$  sind, nur in anderer Reihenfolge.

$$1. \det(\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_n}) = \sigma(j_1, \dots, j_n) \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

$$2. \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0 \iff \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \text{ linear abhängig}$$

$$3. \det(a_{ij})_{ij} = \sum_{j_1, \dots, j_n \text{ Permutation von } 1, \dots, n} \sigma(j_1, \dots, j_n) a_{1,j_1} \cdot \dots \cdot a_{n,j_n}$$

4. **Entwicklung nach der**  $i_0$ . Zeile bzw.  $j_0$ . Spalte:

$$\det(a_{ij})_{ij} = \sum_j (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \cdot \det(A_{(i_0j)}) = \sum_j (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \cdot \det(A_{(ij_0)})$$

(Dabei sind  $i_0 / j_0$  beliebige feste Indizes, und  $A_{(ij)}$  ist die Matrix, welche aus  $A$  entsteht, indem man die  $i$ . Zeile und die  $j$ . Spalte streicht.)

$$5. \det(A) = \det(A^T)$$

$$6. \det(AB) = \det(A) \det(B), \text{ insbesondere } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ für invertierbare Matrix } A$$

7. Aus 6. folgt:

Die Determinante ändert sich nicht bei Koordinatentransformation, also  $\det(T^{-1}AT) = \det(A)$ .

#### Geometrische Deutung der Determinante:

**Satz:**  $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$  ist das Volumen mit Orientierungsvorzeichen des Spats, der von  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  aufgespannt wird (wenn man das Volumen des von  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  aufgespannten Spats als 1 normiert). Allgemeiner ist  $\det(A)$  das Volumenverhältnis:

Volumen des von  $A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n$  aufgespannten Spats zum Volumen des von  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  aufgespannten Spates, für **jede Basis**  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  (also unabhängig von der Basis).

#### Praktische Berechnung von Determinanten:

(i) Nullen schaffen durch Additionsmethode, dabei muss ein Faktor  $\frac{1}{\alpha}$  angebracht werden, wenn

eine Zeile / Spalte  $\vec{a}$  durch  $\alpha \vec{a} + \lambda \vec{b}$  (mit  $\alpha \neq 0$  und  $\vec{b}$  eine andere Zeile / Spalte ersetzt wird.

(ii) Manchmal ist Entwickeln nach einer Zeile / Spalte nützlich (bei allgemeinen Determinanten)

(iii) Wenn oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, so ist die Determinante einfach das Produkt über die Hauptdiagonale.

(iv) Wenn eine Matrix aus Blöcken besteht, also  $A = \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_n \end{pmatrix}$  mit quadratischen

Blöcken  $B_1, \dots, B_n$ , außerhalb Nullen, dann ist  $\det(A) = \det(B_1) \cdot \det(B_2) \cdot \dots \cdot \det(B_n)$ .

**Grundbegriffe und Sätze zu komplexem Skalarprodukt und Eigenwerten:**

Zu einer komplexen Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n} = (a_{ij})_{ij}$  bildet man die Adjungierte  $A^* = (\overline{A})^T := (\overline{a_{ji}})_{ij}$ , die transponiert Konjugierte also.

Beispiel: 
$$\begin{pmatrix} 1-j & 2+3j \\ -1+2j & 3+j \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1+j & -1-2j \\ 2-3j & 3-j \end{pmatrix}.$$

Für eine reelle Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hat man offenbar  $A^* = A^T$ .

Ist  $A$  reell und symmetrisch (d.h.  $A^T = A$ ), dann  $A^* = A$ .

**Definition:**  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt **Hermiteisch**, wenn  $A^* = A$ .

**Das komplexe Skalarprodukt (Hermiteische Form) lautet:**

$\langle (x_i)_i, (y_i)_i \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$  für  $(x_i)_i, (y_i)_i \in \mathbb{C}^n$ . Dafür gilt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle, \quad \langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \\ \langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle, \quad \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$ , (nicht mehr symmetrisch!), aber positiv definit, d.h.

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2, \text{ das ist reell und } > 0, \text{ wenn nur } \vec{x} \neq \vec{0}.$$

**Satz:**  $\langle A \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^* \vec{y} \rangle$  (gilt im reellen wie im komplexen Fall).

**Definition:**  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  bildet eine Orthonormalbasis für  $\mathbb{C}^n$ , wenn  $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = \delta_{ij}$  für  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Satz:** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dann  $A^{-1} = A^* \iff$  die Zeilen [bzw. Spalten] von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis.

**Definition:** Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $A^{-1} = A^*$  heißt unitär (das ist die komplexe Version von 'orthogonal').

**Definition:**  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt **Eigenwert von**  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , wenn es einen Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$  gibt mit  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , so dass  $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$ .

**Satz:**  $\lambda$  ist Eigenwert von  $A \iff \det(A - \lambda E_n) = 0$  ( $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$  heißt **charakteristisches Polynom von**  $A$ .)

**Satz:** Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  paarweise verschiedene Eigenwerte von  $A$  und  $\vec{a}_i$  Eigenvektor zu  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , dann sind  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  linear unabhängig.

**Definition:** Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **diagonalisierbar über**  $\mathbb{R}$ , wenn es eine reelle

Transformationsmatrix  $T$  und eine reelle Diagonalmatrix  $D$  gibt mit

$$D = T^{-1} A T. \text{ (Gibt es derartige Matrizen im Komplexen, so heißt}$$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diagonalisierbar über  $\mathbb{C}$ , auch für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .)

**Satz:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist genau dann diagonalisierbar über  $\mathbb{R}$ , wenn alle Eigenwerte von  $A$  reell sind und es eine Basis von Eigenvektoren von  $A$  gibt. Die erwähnte Diagonalmatrix  $D$  hat dann Eigenvektoren (mit eventuellen Wiederholungen) auf der Hauptdiagonalen.

**Definition:** Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes  $\lambda$  der Matrix  $A$  ist die Vielfachheit, mit der  $\lambda$  als Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $p_A$  auftritt.

**Definition:** Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes  $\lambda$  von  $A$  ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums  $\mathcal{E}_\lambda(A) := \{ \vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid A \vec{x} = \lambda \vec{x} \}$ .

**Satz:**  $A$  ist diagonalisierbar über  $\mathbb{C} \iff$  für jeden Eigenwert von  $A$  gilt:

algebraische und geom. Vielfachheit sind gleich. **Folgerung:** Hat  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$   $n$  verschiedene Eigenwerte, dann ist  $A$  diagonalisierbar.

**Satz:** Jede reelle symmetrische Matrix hat nur reelle Eigenwerte, und es gibt eine orthogonale Matrix  $S$  (also  $S^T = S^{-1}$ ) und eine Diagonalmatrix  $D$ , so dass  $D = S^T A S$ . Sie ist also reell diagonalisierbar. (Diese Transformation auf Diagonalgestalt heißt auch Hauptachsentransformation.)

**Satz:** Allgemeiner: Wenn  $A = A^*$ , dann hat  $A$  lauter reelle Eigenwerte und ist diagonalisierbar mit einer unitären Transformationsmatrix. (Die Eigenvektoren sind dann im Allgemeinen komplex.)

**Satz:** Noch allgemeiner gilt: Wenn  $A^* A = A A^*$  (dann heißt  $A$  **normal**), so ist  $A$  unitär diagonalisierbar.



### 1. Matrizen und Basen, Basiswechsel, Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit

Wir werden uns auf die Hauptsache der quadratischen Matrizen beschränken. Die Menge der Matrizen mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten mit reellen Einträgen nennen wir  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Die entsprechende Menge von Matrizen mit komplexen Einträgen heißt analog  $\mathbb{C}^{n \times n}$ . Natürlich hat man  $\mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ . Das Folgende gilt für reelle Matrizen aus  $\mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbb{R}^n$  ebenso wie für komplexe Matrizen aus  $\mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\mathbb{C}^n$ .

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ergibt eine lineare Abbildung

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \mapsto A\vec{x},$$

'linear' heißt dabei, dass für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  und alle Zahlen  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \\ A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}.$$

Für die kanonische Basis der Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  (der Vektor  $\vec{e}_i$  hat eine Eins in der  $i$ . Komponente, sonst Nullen) hat man:

$$(j. \text{ Spalte von } A) = A\vec{e}_j.$$

Arbeitet man mit der kanonischen Basis, dann ist ein Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  dasselbe wie seine Koordinatendarstellung bezüglich  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ . Das sei noch einmal konkretisiert am Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun kann man jedoch vielfach eine Matrix stark vereinfachen, das ist das Hauptthema der folgenden Eigenwerttheorie, indem man geschickt eine andere als die kanonische Basis wählt. Dann allerdings muss man einen Vektor von seiner Koordinatendarstellung bezüglich der Basis unterscheiden. Das Ganze funktioniert so:

**DEFINITION 1.** Ist  $a = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$  eine beliebige Basis von  $\mathbb{R}^n$ , dann hat jeder Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  eine eindeutige Koordinatendarstellung bezüglich  $a$ , d.h.

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n,$$

und der Koordinatenvektor

$$\vec{x}^a := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

heißt 'Koordinatendarstellung von  $\vec{x}$  bezüglich  $a$ '. Dass die Matrix  $B$  die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezüglich der Basis  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  darstellt, bedeutet nun:

$$\text{Für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ gilt: } B\vec{x}^a = (\varphi(\vec{x}))^a$$

Zum Verständnis ein konkretes Beispiel: Sei

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wir wählen nun die neue Basis

$$a = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Matrix  $B$  stellt nun dieselbe Abbildung  $\varphi$  bezüglich  $a$  dar? Wir wollen haben, dass  $B$  aus der Koordinatendarstellung von

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bezüglich } a, \text{ das ist offenbar } \vec{e}_1, \text{ da} \\ \vec{a}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2,$$

die Koordinatendarstellung von

$$\varphi(\vec{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2.$$

macht. Klar ist damit

$$(\varphi(\vec{\mathbf{a}}_1))^a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ferner haben wir

$$(\vec{\mathbf{a}}_2)^a = \vec{\mathbf{e}}_2,$$

und mit

$$\varphi(\vec{\mathbf{a}}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{\mathbf{a}}_1 + (-1) \cdot \vec{\mathbf{a}}_2$$

haben wir:

$$(\varphi(\vec{\mathbf{a}}_2))^a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aus  $B\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $B\vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  ergibt sich sofort

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, dass die Basiswahl 'geschickt' war:  $B$  ist viel einfacher als die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

welche die Abbildung  $\varphi$  bezüglich der kanonischen Basis darstellt.

Das Beispiel zeigt das allgemeine Rezept, wie man die Matrix findet, welche eine gegebene lineare Abbildung bezüglich einer beliebigen Basis darstellt:

**SATZ 1.** Die Matrix  $B$  zur linearen Abbildung  $\varphi$  bezüglich der Basis  $a = (\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n)$  ist eindeutig bestimmt, und man erhält sie so:

$$B = ((\varphi(\vec{\mathbf{a}}_1))^a, \dots, (\varphi(\vec{\mathbf{a}}_n))^a).$$

Die Spalten von  $B$  sind also die **Koordinatendarstellungen** (bezüglich  $a$ ) der Bilder der Basisvektoren.

Wir wollen das Beispiel noch ein wenig weiter ausbauen und eine algebraische Beziehung zwischen  $A$  und  $B$  herleiten: Schreiben wir die neuen Basisvektoren  $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2$  als Spalten einer neuen Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so stellen wir fest, dass  $T$  die Koordinatendarstellung eines beliebigen Vektors bezüglich  $a$  in seine Koordinatendarstellung bezüglich der kanonischen Basis  $e = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$  umwandelt; denn

$$\begin{aligned} T(\vec{\mathbf{a}}_1^a) &= T\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{a}}_1^e, \text{ und} \\ T(\vec{\mathbf{a}}_2^a) &= T\vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{a}}_2^e. \end{aligned}$$

Daher ist  $T$  Koordinaten-Transformationsmatrix (von der neuen in die alte Basis). Entsprechend ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

die Koordinatentransformationsmatrix in der umgekehrten Richtung. Und nun ist klar:

$$B = T^{-1}AT.$$

Denn lassen wir die Matrix auf der rechten Seite auf  $\vec{\mathbf{x}}^a$  los, so erhalten wir:

$$T^{-1}AT\vec{\mathbf{x}}^a = T^{-1}A\vec{\mathbf{x}}^e = T^{-1}(\varphi(\vec{\mathbf{x}}))^e = (\varphi(\vec{\mathbf{x}}))^a = B\vec{\mathbf{x}}^a.$$

Tatsächlich rechnet man natürlich auch mit Matrixmultiplikation aus:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

Damit haben wir folgenden

SATZ 2. Wenn  $T$  die Koordinatentransformation von der Basis  $a$  in die Basis  $e$  ist, also

$$T\vec{x}^a = \vec{x}^e,$$

dann gilt für die Matrix  $B$ , welche die Abbildung  $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}^e$  bezüglich  $a$  darstellt (also  $B\vec{x}^a = \varphi(\vec{x})$ ):

$$B = T^{-1}AT.$$

Wir definieren noch: Zwei Matrizen  $A, B$  heißen ähnlich genau dann, wenn  $B = T^{-1}AT$  für eine Transformationsmatrix  $T$  (die muss nur regulär sein).

**Bemerkung:** Dasselbe gilt auch dann, wenn  $e$  eine beliebige sonstige und nicht die kanonische Basis ist.

Nun werden wir erwarten, dass Matrizen  $A$  und  $B$ , welche in der Beziehung  $B = T^{-1}AT$  stehen, mit einer regulären Matrix  $T$ , stets auch wesentlich dieselben Eigenschaften haben, da sie dieselbe lineare Abbildung nur bezüglich verschiedener Basen darstellen. Klar haben sie denselben Rang, und wir werden feststellen, dass sie auch dieselbe Determinante haben, und mehr noch.

Nun zur Frage, wie wir im Beispiel die neue Basis  $a$  fanden, so dass die Matrix  $B$  die einfache Diagonalgestalt bekam. Wir beobachten sofort:

$$B\vec{e}_1 = 3\vec{e}_1, \text{ und } B\vec{e}_2 = (-1)\vec{e}_2,$$

und das ist gleichwertig zu

$$\varphi(\vec{a}_1) = A\vec{a}_1 = 3\vec{a}_1 \text{ und } \varphi(\vec{a}_2) = A\vec{a}_2 = (-1)\vec{a}_2.$$

Diese Beobachtung ist völlig allgemein, und wir halten sie in einer Definition und in einem Satz fest:

DEFINITION 2 (Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum). Die Zahl  $\lambda$  heißt Eigenwert der linearen Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (bzw. Eigenwert der Matrix  $A$ , welche die lineare Abbildung  $\varphi$  bezüglich der kanonischen Basis darstellt), wenn es einen Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{x} \neq \vec{0}$  gibt, so dass

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \text{ (bzw. } A\vec{x} = \lambda\vec{x}\text{)}.$$

Ein solcher Vektor heißt dann Eigenvektor von  $\varphi$  bzw.  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Der Vektorraum

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(\varphi) & : = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \} \text{ bzw.} \\ \mathcal{E}_\lambda(A) & : = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x} \} \end{aligned}$$

heißt dann Eigenraum von  $\varphi$  bzw.  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , er ist nach Definition mindestens eindimensional. Die Dimension von  $\mathcal{E}_\lambda(\varphi)$  heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$ .

**Bemerkung:** Ein Eigenwert  $\lambda$  kann Null sein.  $\varphi$  hat den Eigenwert Null genau dann, wenn der Kern von  $\varphi$  mindestens die Dimension 1 hat, d.h. wenn  $\varphi$  nicht vollen Rang hat bzw. nicht regulär ist. Man beachte auch, dass die Bedingung  $\vec{x} \neq \vec{0}$  wesentlich ist, weil  $\varphi(\vec{x}) = \varphi\vec{x}$  nur dann eine nichttriviale Eigenschaft darstellt. Selbstverständlich gehört  $\vec{0}$  aber zu jedem Eigenraum.

SATZ 3. Eine lineare Abbildung  $\varphi$  wird genau dann bezüglich der Basis  $a$  durch eine Diagonalmatrix dargestellt, wenn  $a$  eine Basis von Eigenvektoren von  $\varphi$  ist. Wenn das der Fall ist, so heißt  $\varphi$  diagonalisierbar. Entsprechend formuliert man für eine Matrix  $A$ , dass sie diagonalisierbar ist genau dann, wenn es eine Basis von Eigenvektoren von  $A$  gibt. Wir wiederholen: Diagonalisierbarkeit von  $A$  bedeutet, dass mit einer regulären Matrix  $T$  und einer Diagonalmatrix  $D$  gilt:  $D = T^{-1}AT$ .

Unsere entscheidende Frage lautet nun: Kann man jede Matrix diagonalisieren? Das ist nicht der Fall, wie folgendes Fundamentalbeispiel zeigt: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann stellt man fest:  $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ , und so ist  $\vec{e}_1$  Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir können, noch ohne Eigenwerttheorie, durch elementare Rechnung feststellen, dass es keinen anderen Eigenwert als 1 gibt. Aber damit könnte  $A$  nur dann diagonalisierbar sein, wenn der Eigenraum zum Eigenwert 1 die Dimension 2 hätte, das wäre also der ganze Raum. Aber  $A\vec{e}_2 \neq \vec{e}_2$ , und somit kann  $A$  nicht diagonalisierbar sein.

Übrigens gilt dasselbe für jede Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mit  $b \neq 0$ .

Damit haben wir die wesentlichen Probleme:

- Wie findet man alle Eigenwerte einer Matrix?
- Gibt es einfache hinreichende Bedingungen für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix?

Wir haben zunächst ein fundamentales Lemma, das uns eine einfache hinreichende Bedingung gibt und auch zeigt, dass nicht ausreichende geometrische Vielfachheit von Eigenwerten der Punkt ist, an dem Diagonalisierbarkeit scheitern kann.

LEMMA 1. Wenn  $\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_k$  Eigenvektoren von  $\varphi$  zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind, so sind diese Vektoren linear unabhängig. Unmittelbare Folgerung: Wenn eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $n$  verschiedene reelle Eigenwerte hat, so ist sie diagonalisierbar (dasselbe gilt für  $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , mit  $n$  verschiedenen möglicherweise komplexen Eigenwerten).

**Bemerkung:** Man beachte, dass eine Matrix auch dann diagonalisierbar sein kann, wenn sie weniger als  $n$  Eigenwerte hat. Das sollte sofort mit einer Diagonalmatrix klar sein, auf der sich Zahlen in der Diagonalen wiederholen. Es handelt sich im Satz nur um eine besonders einfache hinreichende Bedingung.

**Beweis:** Seien  $\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_k$  Eigenvektoren zu  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ . Es sei nun  $l$  die kleinste Zahl, so dass es Koeffizienten  $\alpha_i, i < l$ , gibt mit

$$\vec{\mathbf{a}}_l = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \vec{\mathbf{a}}_i,$$

dann jedenfalls  $l > 1$  (denn  $\vec{\mathbf{a}}_1$  ist nicht Null und daher linear unabhängig), und da  $\vec{\mathbf{a}}_l \neq \vec{\mathbf{0}}$ , ist mindestens einer der Koeffizienten  $\alpha_i \neq 0$ . Wir haben:

$$\begin{aligned} \lambda_l \vec{\mathbf{a}}_l &= \varphi(\vec{\mathbf{a}}_l) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \vec{\mathbf{a}}_i\right) = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \lambda_i \vec{\mathbf{a}}_i, \text{ andererseits} \\ \lambda_l \vec{\mathbf{a}}_l &= \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \lambda_l \vec{\mathbf{a}}_i. \end{aligned}$$

und damit wären die  $\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_{l-1}$  bereits linear abhängig, weil  $\alpha_i \lambda_i \neq \alpha_i \lambda_l$  für  $\alpha_i \neq 0$ .

Die Folgerung ergibt sich so: Zu  $n$  verschiedenen Eigenwerten hat man  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren, und diese bilden eine Basis (von  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$ ). ■

Wir betrachten noch ein weiteres Hindernis für Diagonalisierbarkeit reeller Matrizen über  $\mathbb{R}$ : Nehmen wir eine  $(2 \times 2)$ -Drehmatrix, die eine nichttriviale Drehung beschreibt, also mit einem Winkel verschieden von Vielfachen von  $2\pi$ . Dann ist offenbar der Nullvektor der einzige, der auf ein reelles Vielfaches von sich selbst abgebildet wird. Damit gibt es überhaupt keine reellen Eigenwerte, also auch keine Basis von reellen Eigenvektoren. Aber wir können ins Komplexe ausweichen und die Situation bereinigen: Für die Drehung  $\varphi$  um den Ursprung mit Winkel  $\alpha$  entgegen dem Uhrzeigersinn haben wir:  $\varphi(z) = e^{j\alpha}z$ , wobei wir einen Vektor im  $\mathbb{R}^2$  als komplexe Zahl auffassen. Also sollte  $e^{j\alpha}$  ein Eigenwert sein, später stellen wir fest, dass auch  $e^{-j\alpha}$  einer ist (Begründung am Ende dieses Abschnitts). Das Resultat: Über  $\mathbb{C}$  ist eine solche Matrix diagonalisierbar. Führen wir das aus im Beispiel einer Drehung mit  $\pi/4$ :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Wir lösen

$$A\vec{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}j\right)\vec{\mathbf{x}}$$

gleichwertig ist offenbar:

$$\left(A - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}j\right)E\right)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \quad (E \text{ Einheitsmatrix}),$$

ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}j & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und bekommen die Lösungsmenge

$$\vec{x}(\alpha) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}.$$

Das ist der Eigenraum zum Eigenwert  $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}j$ . Analog ist der Eigenraum zum Eigenwert  $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}j$  erzeugt vom Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$ . Benutzen wir die Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix},$$

so diagonalisiert sich also die Matrix, und wir haben (ohne dies nachrechnen zu müssen!)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}.$$

Es ist übrigens

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix}.$$

Wir haben soeben den Schlüssel zum Auffinden der Eigenwerte aufgedeckt:

SATZ 4.  $\lambda$  ist Eigenwert von  $A$  genau dann, wenn das homogene Gleichungssystem

$$(A - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}$$

eine nichttriviale Lösung besitzt, d.h. wenn

$$\text{Kern}(A - \lambda E) \neq \{\vec{0}\}.$$

Die Idee ist nun, zu benutzen, dass

$$\text{Kern}(A - \lambda E) \neq \{\vec{0}\} \iff \det(A - \lambda E) = 0.$$

Dabei ist  $\det(B)$  für eine quadratische Matrix  $B$  die Determinante von  $B$ . Wir werden sehen, dass  $\det(A - \lambda E)$  ein Polynom vom Grad  $n$  (wenn  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) in  $\lambda$  ist. Die Eigenwerte sind also die Nullstellen dieses Polynoms, das man charakteristisches Polynom von  $A$  nennt. Bevor wir weitergehen, müssen wir daher ein wenig über Determinanten zusammenstellen (im nächsten Abschnitt). Aber es ist sehr einfach, Determinanten von  $(2 \times 2)$ -Matrizen zu berechnen, und das wollen wir für unser Drehungsbeispiel tun:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Also

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lambda & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lambda \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lambda &= \pm \sqrt{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}j, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}j. \end{aligned}$$

Das sind genau die oben verwandten Eigenwerte. Den einen sahen wir oben geometrisch ein, den anderen sehen wir nunmehr auch ohne Rechnung direkt mit dem Satz ein, dass ein Polynom mit reellen Koeffizienten mit einer komplexen Wurzel  $z$  aus stets die Wurzel  $\bar{z}$  hat.

## 2. Determinanten

Determinanten sind nicht nur nützlich für die Eigenwerttheorie, sondern ihre geometrische Bedeutung macht sie vor allem auch zu einem wichtigen Hilfsmittel für die mehrdimensionale Integralrechnung. Daher zuerst ein Wort zur geometrischen Deutung, die wir als geometrische Definition voranstellen (welche allerdings noch nicht aussagt, dass so etwas existiert - das macht dann erst die algebraische Bearbeitung):

DEFINITION 3. *Hat man  $n$  Vektoren  $\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbb{R}^n$ , dann ist*  
 $\det(\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n) = n - \text{dimensionales Volumen des von den Vektoren } \vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n \text{ aufgespannten Spats,}$   
*mit Vorzeichen für die Orientierung des Systems  $\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n$ .*

**Zum Verständnis:** Eine Folge von Spaltenvektoren gleicher Länge verstehen wir dabei auch als die Matrix, welche diese Spalten hat. Daher ist  $\det$  ebenso als Kennzahl einer Matrix zu verstehen. Zur geometrischen Konkretisierung: Im  $\mathbb{R}^2$  spannen zwei Vektoren, sofern sie nicht parallel sind, ein Parallelogramm auf, und die Determinante gibt mit ihrem Betrag an, welchen Flächeninhalt dies Parallelogramm hat. Das Vorzeichen gibt an, ob sie wie Daumen und Zeigefinger der rechten (positiv) oder der linken Hand sind (negativ). Klappt das Parallelogramm zusammen, was genau dann der Fall ist, wenn die beide Vektoren nicht linear unabhängig sind, so kommt Null heraus, die Vektoren ergeben kein (Koordinaten-) System und damit kein Vorzeichen für die determinante. Im  $\mathbb{R}^3$  spannen drei Vektoren einen Spat auf, dessen Volumen durch den Wert der Determinante gegeben wird, mit positivem Vorzeichen, wenn das System zur rechten Hand passt, sonst mit negativen Vorzeichen. Das Erstaunliche ist nun, dass man das Ganze ebenso für beliebige Dimensionen durchführen kann, worin die Anschauung versagt. Eine Folgerung ist geometrisch besonders einsichtig, sie kann aber auch leicht aus der folgenden algebraischen Fassung der Determinante gefolgert werden:

SATZ 5. *Die Determinante einer Matrix  $A = (\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n)$  ist genau dann Null, wenn die Vektoren  $\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n$  linear abhängig sind. Da die Determinante der transponierten Matrix  $A^T$  dieselbe ist, gilt das auch für die Zeilen. Man erinnert sich, dass die Zeilen (oder Spalten) einer quadratischen Matrix genau dann linear unabhängig sind, wenn die Inverse existiert und dass diese Bedingung auch gleichwertig ist zu  $\text{Kern}(A) = \{\vec{\mathbf{0}}\}$ , d.h. das lineare Gleichungssystem  $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$  hat nur die Lösung  $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ .*

Mit der geometrischen Auffassung ist aber auch klar, dass eine Drehung Determinante 1 haben sollte, eine Spiegelung (orientierungsumkehrend wie etwa eine Spiegelung an einer Ursprungsebene im  $\mathbb{R}^3$ ) die Determinante  $-1$  bekommt. Denn die Volumina bleiben jeweils erhalten. Man beachte aber, dass viel mehr Abbildungen als Drehungen Determinante 1 haben.

DEFINITION 4. *Algebraische Definition der Determinante einer  $(n \times n)$  - Matrix (reell oder komplex):*  
 $\det_{(n)} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ mal}} \rightarrow \mathbb{R}$  (analog mit  $\mathbb{C}$ ) *ist die Abbildung mit folgenden Eigenschaften (durch welche sie schon eindeutig bestimmt ist):*

(i) *det ist  $n - \text{fach linear}$ , also linear in jedem Eingabeschlitz :*

*Für alle  $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$  und Zahlen  $\lambda$  gilt*

$$\det(\dots \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}, \dots) = \det(\dots \vec{\mathbf{a}}, \dots) + \det(\dots \vec{\mathbf{b}}, \dots),$$

$$\det(\dots \lambda \vec{\mathbf{a}}, \dots) = \lambda \det(\dots \vec{\mathbf{a}}, \dots)$$

(ii) *det ist alternierend :*

$$\det(\dots \vec{\mathbf{a}} \dots \vec{\mathbf{a}} \dots) = 0$$

(iii) *det(E) = 1 (Normierungseigenschaft)*

**Bemerkung:** Die Eindeutigkeit wollen wir an Beispiel zu  $n = 3$  zeigen:

$$\begin{aligned} & \det(a\vec{\mathbf{e}}_1 + b\vec{\mathbf{e}}_2, c\vec{\mathbf{e}}_2 + d\vec{\mathbf{e}}_3, e\vec{\mathbf{e}}_3) \\ &= \det(a\vec{\mathbf{e}}_1, c\vec{\mathbf{e}}_2 + d\vec{\mathbf{e}}_3, e\vec{\mathbf{e}}_3) \\ & \quad + \det(b\vec{\mathbf{e}}_2, c\vec{\mathbf{e}}_2 + d\vec{\mathbf{e}}_3, e\vec{\mathbf{e}}_3) \\ &= \det(a\vec{\mathbf{e}}_1, c\vec{\mathbf{e}}_2, e\vec{\mathbf{e}}_3) \\ & \quad + \det(a\vec{\mathbf{e}}_1, d\vec{\mathbf{e}}_3, e\vec{\mathbf{e}}_3) \\ & \quad + \det(b\vec{\mathbf{e}}_2, c\vec{\mathbf{e}}_2, e\vec{\mathbf{e}}_3) \\ & \quad + \det(b\vec{\mathbf{e}}_2, d\vec{\mathbf{e}}_3, e\vec{\mathbf{e}}_3) \\ &= ace \det(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3) \\ & \quad + 0 + 0 + 0. \end{aligned}$$

Aber wir können viel allgemeiner auch feststellen:

SATZ 6. Aus den algebraischen Eigenschaften der Determinante folgt:

$$\begin{aligned} \det \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{i1} \vec{e}_i, \dots, \sum_{i=1}^n \alpha_{in} \vec{e}_i \right) &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \alpha_{i_1, 1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_n, n} \det (\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \alpha_{\sigma(1), 1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\sigma(n), n} \det (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n). \end{aligned}$$

Dabei ist  $S_n$  die Menge der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  und  $\text{sign}(\sigma)$  gleich 1, wenn  $\sigma$  durch eine gerade Anzahl von Paarvertauschungen entsteht, sonst  $-1$ . Nun ist  $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_i$  gerade der  $j$ . Spaltenvektor der Matrix  $A = (a_{ij})_{ij}$ . Also folgt

$$(*) \det (a_{ij})_{ij} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \alpha_{\sigma(1), 1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\sigma(n), n}.$$

**Bemerkung:** Die Gleichung (\*) kann man auch zur rechnerischen Definition der Determinante verwenden und damit die geforderten algebraischen Eigenschaften (i), (ii), (iii) nachweisen.

**Begründung des Satzes:** Die erste Gleichung folgt mit der Eigenschaft (i) (wie Distributivgesetz, jeder mit jedem), dazu das Herausziehen der Faktoren, die zweite Gleichung folgt mit der Eigenschaft, dass bei Wiederholung in der Indexfolge  $j_1, \dots, j_n$  der entsprechende Summand Null wird und dass bei einer Vertauschung ein Faktor  $-1$  entsteht, so dass also

$$\det (\vec{e}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma) \det (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n).$$

Dass bei Vertauschung ein Vorzeichenwechsel stattfindet, sprechen wir noch einmal aus und begründen es mit folgendem

LEMMA 2.

$$\det (\dots \vec{a} \dots \vec{b} \dots) = -\det (\dots \vec{b} \dots \vec{a} \dots).$$

**Begründung:**

$$\begin{aligned} 0 &= \det (\dots \vec{a} + \vec{b} \dots \vec{a} + \vec{b} \dots) \\ &= \det (\dots \vec{a} \dots \vec{a} \dots) + \det (\dots \vec{a} \dots \vec{b} \dots) \\ &\quad + \det (\dots \vec{b} \dots \vec{a} \dots) + \det (\dots \vec{b} \dots \vec{b} \dots) \\ &= \det (\dots \vec{a} \dots \vec{b} \dots) + \det (\dots \vec{b} \dots \vec{a} \dots). \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Damit versteht man auch, warum die Eigenschaft (ii) der algebraischen Definition die 'alternierende' heißt, sie wird es im Kontext mit (i).

Aus dem Satz hat man die Folgerungen:

FOLGERUNG 1.

$$\det (A) = \det (A^T).$$

**Begründung:**

$$\begin{aligned} \det ((a_{ij})_{ij}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \alpha_{\sigma(1), 1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\sigma(n), n} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma^{-1}) \alpha_{1, \sigma^{-1}(1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{n, \sigma^{-1}(n)} \\ &= \det \sum_{\tau \in S_n} \text{sign}(\tau) \alpha_{1, \tau(1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{n, \tau(n)} = \det ((a_{ij})_{ij})^T. \blacksquare \end{aligned}$$

Wir heben noch eine geometrisch einsichtige Eigenschaft heraus, das Cavalieri-Prinzip - es folgt sofort aus (i), (ii):

$$\det (\dots \vec{a} \dots \vec{b} \dots) = \frac{1}{\alpha} \det (\dots \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \dots \vec{b} \dots), \text{ wenn } \alpha \neq 0.$$

Das werden wir unten bei den praktischen Rechenhinweisen weidlich ausnutzen.

Für die Determinanten haben wir noch einen besonders wichtigen

SATZ 7 (Multiplikationssatz für Determinanten). Für  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt stets:

$$\det(BA) = \det(B) \det(A).$$

Daraus folgt sofort:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ für reguläre Matrizen } A.$$

(Wende den Multiplikationssatz auf  $A^{-1}A = E$  an.)

**Beweis:** Sei  $B = (\vec{\mathbf{b}}_1, \dots, \vec{\mathbf{b}}_n)$ , also  $B \vec{\mathbf{e}}_j = \vec{\mathbf{b}}_j = j$ . Spalte von  $B$ . Sei  $A = (a_{ij})_{ij}$ , also  $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i = j$ . Spalte von  $A$ . Dann hat man

$$\begin{aligned} \det(BA) &= \det\left(B \sum_{i=1}^n \alpha_{i1} \vec{\mathbf{e}}_i, \dots, B \sum_{i=1}^n \alpha_{in} \vec{\mathbf{e}}_i\right) \\ &= \det\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i1} B \vec{\mathbf{e}}_i, \dots, \sum_{i=1}^n \alpha_{in} B \vec{\mathbf{e}}_i\right) \quad (\text{Linearität von } B) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \alpha_{\sigma(1),1} \cdots \alpha_{\sigma(n),n} \det(\vec{\mathbf{b}}_1, \dots, \vec{\mathbf{b}}_n) \\ &= \det(\vec{\mathbf{b}}_1, \dots, \vec{\mathbf{b}}_n) \det(A) = \det(B) \det(A). \end{aligned}$$

Zu \*) : Dasselbe Argument wie im vorigen Satz, und  $B \vec{\mathbf{e}}_i = \vec{\mathbf{b}}_i$ . ■

FOLGERUNG 2. Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante, da

$$\det(T^{-1}AT) = \det(T^{-1}) \det(A) \det(T) = \frac{1}{\det(T)} \det(A) \det(T) = \det(A).$$

FOLGERUNG 3. Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom, insbesondere dieselben Eigenwerte, da

$$\begin{aligned} T^{-1}(A - \lambda E)T &= T^{-1}AT - T^{-1}\lambda ET \\ &= T^{-1}AT - \lambda E, \end{aligned}$$

also auch

$$\det(A - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda E).$$

Abschließend erwähnen wir noch den Entwicklungssatz, den man aus der oben gegebenen Formel herleiten kann:

SATZ 8 (Entwicklungssatz). Für jede quadratische Matrix  $A = (a_{ij})_{ij}$  gilt:

$$\det\left((a_{ij})_{ij}\right) = \sum_j (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \cdot \det(A_{(i_0,j)}) = \sum_j (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \cdot \det(A_{(i,j_0)})$$

Dabei ist  $A_{(ij)}$  die Matrix, welche aus  $A$  entsteht, indem man die  $i$ . Zeile und die  $j$ . Spalte streicht.

**Zum Verständnis der Vorzeichen:** Man versee die Matrix mit einem Schachbrett von Zeichen '+' und '-', so:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Wo der Matrixeintrag der Zeile oder Spalte steht, nach der man entwickelt, entscheidet über das Vorzeichen. Das ist also gerade  $(-1)^{i+j}$  für die Stelle in der  $i$ . Zeile und  $j$ . Spalte.



**Beispiel:** Wir entwickeln hier nach der ersten Spalte (man beachte das Schachbrett):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun könnten wir so fortfahren und bekommen mit Entwicklung der ersten  $(3 \times 3)$ -Determinante nach der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 4 - 7 + 6 = 3. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= 6 \text{ und damit} \\ \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= 3 - 12 = -9. \end{aligned}$$

Man sieht, dass dies Verfahren heillos langwierig ist - es eignet sich eher für solche Fälle (insbesondere bei systematischen allgemeinen Matrizen), bei denen schon viele Nullen in einer Zeile oder Spalte vorliegen. (Dass die Methode im Beispiel noch tragbar war, lag daran, dass in der fraglichen Spalte nur zwei Komponenten  $\neq 0$  waren.)

Wir kommen damit zur Frage der praktischen Berechnung von Determinanten und bringen für deren Elemente jeweils konkrete Beispiele:

**1.) Für obere (oder untere) Dreiecksmatrizen gilt: Die Determinante ist das Produkt über die Hauptdiagonale, Beispiel:**

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -6.$$

**2.) Besteht  $A$  wie folgt aus Blöcken, so ist  $\det(A)$  einfach das Produkt der Blockdeterminanten, Beispiel:**

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot 7 = -7. \end{aligned}$$

**3.) Bei Zeilen- oder Spalten- Wiederholungen ist die Determinante sofort Null, ebenso bei bekanntem linear abhängigen System der Zeilen oder Spalten.**

**4.) Kennt man  $\det(A)$  und  $\det(B)$ , so auch direkt  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$  sowie bei regulärer Matrix  $A$  auch  $\det(A^{-1})$ .**

5.) Das ist der vielfach wichtigste Schritt: Man schafft Nullen, indem man Zeilen- oder Spalten- Kombinationen benutzt, also das Cavalieri-Prinzip (auch Nacheinander von Beidem ist erlaubt), anschließend führt man auf 1.) oder 3.) zurück, Beispiel:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (II' = II - 2I) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (III' = III - I) \\ &= -7 \quad (\text{Entwicklung nach letzter Spalte}), \end{aligned}$$

aber auch so:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7. \end{aligned}$$

Das Beispiel enthielt einen kompensierenden Faktor nur für die Vertauschung. Aber vielfach hat man auch die Zeile (Spalte) selbst, die man durch eine Kombination ersetzen will, mit einem Faktor zu multiplizieren, dann muss man einen solchen Faktor anbringen, **Beispiel:**

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -1 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (II' = 2II - 3I) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -39 & -5 \end{pmatrix} \quad (III' = 2III - 5I) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (25 - 39) \\ &= -7 \end{aligned}$$

### 3. Eigenwerttheorie

Wie eingangs erwähnt, geht es um Diagonalisierung von Matrizen. Nun hat man ein Verfahren, das sich gleich anbietet: Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  oder  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

#### 1.) Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

2.) Bestimme alle Eigenräume zu den Eigenwerten - wenn die Summe ihrer Dimensionen gleich  $n$  ist, so hat man eine Basis von Eigenvektoren. Sonst ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

Die Sache hat einen Haken: Der erste Schritt ist das Problem, man kann eben nicht die Nullstellen von Polynomen fünften Grades und mehr exakt ausrechnen, das geht nur mit Polynomen bis zum Grad 4, wird dabei auch bereits für die Grade 3 und 4 sehr kompliziert. Der zweite Schritt ist dagegen einfach: Man muss nur die zugehörigen Gleichungen

$$(A - \lambda_k E) \vec{x} = \vec{0} \quad (\text{gleichwertig: } \vec{x} \in \mathcal{E}_{\lambda_k}(A))$$

lösen für die gefundenen Eigenwerte  $\lambda_k$ . Dabei bekommt man stets eine Basis des zugehörigen Eigenraums. Anschließend schreibt man die Basen der Eigenräume hintereinander. Wir wissen aus der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten bereits, dass das wieder ein linear unabhängiges System ist. Da man aber im allgemeinen die Eigenwerte nicht genau kennt, ist es wichtig, dass man die Eigenwerte nähern kann (mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms) und auch zugehörige Eigenraumbasen.

Fangen wir mit einem einfachen Beispiel an, bei dem man die Eigenwerte leicht ausrechnet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda) \left( (1 - \lambda)^2 - 1 \right) = (2 - \lambda) (-2\lambda + \lambda^2) = -\lambda(2 - \lambda)^2, \text{ wir multiplizieren nat\u00fcrlich nicht aus!}$$

$$\text{also sind die Nullstellen: } (2 - \lambda) \left( (1 - \lambda)^2 - 1 \right) = -(-2 + \lambda)^2 \lambda$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2, \text{ zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms,} \\ \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

Nunmehr rechnen wir die Eigenr\u00e4ume aus: F\u00fcr  $\lambda = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird gel\u00f6st, als Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{aligned} x - y + 0z &= 0 \\ -x + y + 0z &= 0 \\ 2z &= 0 \end{aligned}$$

Das hei\u00dft:

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ x &= y, y \text{ frei.} \end{aligned}$$

Also

$$\mathcal{E}_0(A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir k\u00f6nnen auch abstrakter sehen: Die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  hat Rang 2, also eindimensionalen

Kern. Aber f\u00fcr den haben wir nun konkret eine Basis ausgerechnet. Nun zum Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ordentlich als homogenes Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{aligned} -x - y + 0z &= 0 \\ -x - y + 0z &= 0 \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

Wir sehen sofort:

$$(*) \quad x = -y, y \text{ frei, } z \text{ frei.}$$

Das f\u00fchrt zu folgender einfachen Basis f\u00fcr  $\mathcal{E}_A(2)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei hier noch einmal daran erinnert, wie man das macht: Aus (\*) hat man den allgemeinen L\u00f6sungsvektor

$$\begin{pmatrix} y \\ -y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

man liest die Basisvektoren des damit beschriebenen Raums also ab. Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist daher zweidimensional, wie wir auch schneller ablesen könnten daran, dass der Rang der Matrix

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

also Dimension des Kerns gleich 2.

**Resultat:**  $A$  ist diagonalisierbar über  $\mathbb{R}$ , ohne dass es drei verschiedene Eigenvektoren gibt. Entscheidend war, dass die algebraische Vielfachheit 2 des Eigenwertes 2 auch die geometrische Vielfachheit ist. Nun können wir auch eine Diagonalmatrix  $D$  und eine Transformationsmatrix  $T$  angeben, so dass

$$D = T^{-1}AT.$$

Das geht so: In  $D$  werden einfach die Eigenwerte gemäß ihrer Vielfachheit eingetragen, also

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$T$  wird so gebildet, dass die Spalten jeweils in derselben Reihenfolge die gefundenen Eigen- Basisvektoren sind zu diesen Eigenwerten, also bei unserer Wahl von  $D$ :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir könnten auch die ersten beiden Spalten von  $T$  vertauschen. Nun wissen wir ohne weitere Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass die Transformationsmatrix  $T$  nicht orthogonal ist. Das liegt daran, dass wir keine Orthonormalbasis gewählt haben. Aber wir können ohne weiteres die gefundene Basis, die bereits eine Orthogonalbasis ist, durch Normieren zu einer solchen machen. Wir wählen daher die Basis

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bekommen wir eine orthogonale Transformationsmatrix:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und wir haben

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet

$$D = S^TAS.$$

Wenn wir mögen, können wir dabei durch Vertauschen der Basisvektoren auf die Determinante 1 kommen, unsere ist  $-1$ . Aber das Ganze war völlig vorauszusehen, mit folgendem

**SATZ 9.** *Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch, d.h.  $A^T = A$ . Dann ist  $A$  mittels einer orthogonalen Transformationsmatrix diagonalisierbar über  $\mathbb{R}$ . (Insbesondere sind die Eigenwerte und Eigenvektoren reell.)*

Wir werden statt dieses Satzes den folgenden allgemeineren über Hermitesche Matrizen beweisen, für den wir noch folgende Definitionen und Lemmata brauchen:

DEFINITION 5. Das komplexe Skalarprodukt (sog. Hermitesche Form) auf  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$  ist so definiert:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \overline{\vec{x}}^T \vec{y}, \text{ f\"ur } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n.$$

in Koordinaten also:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k.$$

**Beispiele**, welche bereits wichtige Eigenschaften illustrieren:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1+j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-j \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= 1-j+1-j = 2-2j, \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1-j \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+j \end{pmatrix} \right\rangle &= 1+j+1+j = 2+2j = \overline{2-2j}, \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1-j \\ 2+3j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-j \\ 2+3j \end{pmatrix} \right\rangle &= (1+j)(1-j) + (2-3j)(2+3j) \\ &= 2+13 = 15 \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1-j \\ 2+3j \end{pmatrix} \right|^2. \end{aligned}$$

LEMMA 3. Das komplexe Skalarprodukt ist sesquilinear, d.h. f\"ur alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle, \quad \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle, \\ \langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle &= \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \quad \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

, dazu positiv definit:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0 \text{ f\"ur alle } \vec{x} \neq \vec{0},$$

schließlich gilt folgende Eigenschaft (das ist eine andere Symmetrie) anstelle der Symmetrie:

$$\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \text{ f\"ur alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Bemerkung: F\"ur reelle Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}$  stimmt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  mit dem gewöhnlichen reellen Skalarprodukt überein.

**Begründung:** Das alles rechnet man sofort aus und benutzt, dass Konjugation verträglich ist mit Addition und Multiplikation und dass sie auf  $\mathbb{R}$  als Identität wirkt, dass schließlich für komplexe Zahlen  $z$  stets gilt:  $z\overline{z} = \overline{z}z = |z|^2$ .

DEFINITION 6. Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt unitär, wenn die Spalten von  $A$  eine Orthonormalbasis bilden, d.h. mit den Spaltenvektoren  $\vec{b}_k$  von  $A$  gilt:

$$\langle \vec{b}_m, \vec{b}_k \rangle = \delta_k^m = \begin{cases} 1 & \text{für } m = k \\ 0 & \text{für } m \neq k \end{cases}.$$

LEMMA 4. Man hat

$$A \text{ unitär} \iff A \text{ invertierbar und } A^{-1} = A^* \iff \langle A\vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \text{ f\"ur alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n.$$

**Beweis:** Es ist nur zu beobachten, dass

$$\begin{aligned} \text{Für alle } 1 \leq k, m \leq n : \langle A\vec{e}_k, A\vec{e}_m \rangle &= \delta_m^k = \langle \vec{e}_k, \vec{e}_m \rangle \iff A \text{ unitär, und} \\ \text{Für alle } 1 \leq k, m \leq n : \langle A\vec{e}_k, A\vec{e}_m \rangle &= \langle \vec{e}_k, \vec{e}_m \rangle \\ \iff \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n : \langle A\vec{x}, A\vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

Letzteres folgert man mit der Bilinearität. Ferner hat man mit

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} : \\ (\delta_m^k)_{k,m} &= E = A^{-1}A = \left( \vec{a}_k^T \vec{b}_m \right)_{k,m} = \left( \left\langle \left( \vec{a}_k \right)^T, \vec{b}_m \right\rangle \right)_{k,m}. \end{aligned}$$

also für unitäre Matrix  $A$ , weil mit der positiven Definitheit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  aus  $\langle \vec{x}, \vec{b}_m \rangle = \langle \vec{y}, \vec{b}_m \rangle$  für alle  $m$  folgt:  $\vec{x} = \vec{y}$ :

$$\left(\overline{\vec{a}_k}\right)^T = \vec{b}_k, \text{ damit } \vec{a}_k = \left(\overline{\vec{b}_k}\right)^T \text{ und so } A^{-1} = A^*.$$

Umgekehrt sieht man mit derselben Rechnung, dass aus  $A^{-1} = A^*$  folgt, dass  $\langle \vec{b}_k, \vec{b}_m \rangle = \delta_m^k$ , also  $A$  unitär. ■

LEMMA 5. Man hat für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^*\vec{y} \rangle \text{ für alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Entsprechend für alle **reellen Matrizen**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^T\vec{y} \rangle.$$

**Beweis:** Seien

$$A = (a_{km})_{km}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$A^* = (b_{mk})_{mk} \text{ mit } b_{mk} = \overline{a_{km}}$$

Dann

$$\begin{aligned} \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle &= \sum_k \left( \sum_m a_{km} x_m \right) y_k = \sum_k \sum_m \overline{a_{km}} x_m y_k, \\ \langle \vec{x}, A^*\vec{y} \rangle &= \sum_m x_m \left( \sum_k b_{mk} y_k \right) = \sum_m x_m \left( \sum_k \overline{a_{km}} y_k \right) \\ &= \sum_k \sum_m \overline{a_{km}} x_m y_k = \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle. \blacksquare \end{aligned}$$

SATZ 10. Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  **Hermiteisch**, d.h.

$$A^* = A.$$

Dann gilt:

1. Alle Eigenwerte von  $A$  sind reell.
2. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen paarweise senkrecht aufeinander im Sinne der hermiteschen Form.
3.  $A$  ist diagonalisierbar mit unitärer Transformationsmatrix  $T$  zu einer reellen Diagonalmatrix  $D$ , so dass also  $D = T^{-1}AT = T^*AT$ .

**Beweis:**

Zu 1.: Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert von  $A$ ,  $\vec{x}$  Eigenvektor zu  $\lambda$ , dann hat man

$$\overline{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \lambda \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, A^*\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \lambda \vec{x} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle.$$

Damit wegen  $\vec{x} \neq \vec{0}$  und so auch  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \neq 0$ :

$$\overline{\lambda} = \lambda, \text{ d.h. } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zu 2.: Seien  $\lambda \neq \mu$  Eigenwerte von  $A$ , also beide reell mit 1., seien  $\vec{x}, \vec{y}$  zugehörige Eigenvektoren. Dann

$$\lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^*\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mu \vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Es folgt mit  $\lambda \neq \mu$  sofort:  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ .

Zu 3.:  $A$  hat mindestens einen Eigenwert  $\lambda$ , weil das charakteristische Polynom mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  besitzt. Aber nach Aussage 1 ist  $\lambda$  reell. Nun sei  $\vec{b}_1$  ein Eigenvektor von  $A$  zu  $\lambda$ , der

zu 1 normiert ist (teile dazu einen beliebigen Eigenvektor zu  $\lambda$  durch seine Norm, das ist wieder ein Eigenvektor zu  $\lambda$ ).

Wir bilden nunmehr eine Orthonormalbasis  $(\vec{\mathbf{b}}_1, \dots, \vec{\mathbf{b}}_n)$ . (Solche Basen konstruiert man genau so wie im reellen Fall mit dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren.) Dann bildet  $A$  offenbar den von  $\vec{\mathbf{a}}_1$  erzeugten Unterraum auf sich selbst ab, ferner bildet  $A$  aber auch den Raum, der von  $\vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_n$  erzeugt wird, auf sich selbst ab. Denn sei  $\vec{\mathbf{x}}$  von  $\vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_n$  erzeugt, dann:

$$\langle A\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{b}}_1 \rangle = \langle \vec{\mathbf{x}}, A\vec{\mathbf{b}}_1 \rangle = \langle \vec{\mathbf{x}}, \lambda\vec{\mathbf{b}}_1 \rangle = \lambda \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{b}}_1 \rangle = 0.$$

Somit hat die Matrix, welche  $A$  (als lineare Abbildung) bezüglich der Basis  $b$  darstellt, folgende Gestalt, mit der unitären Transformationsmatrix  $S = (\vec{\mathbf{b}}_1, \dots, \vec{\mathbf{b}}_n)$ , also  $S^* = S^{-1}$ :

$$B = S^*AS = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Nun hat man folgenden Induktionsbeweis für die Aussage: Wenn eine Matrix  $(1 \times 1)$  ist, so ist sie schon diagonal, also insbesondere diagonalisierbar (mit  $E$  als Transformationsmatrix). Induktionsvoraussetzung: Die Aussage 3. gelte nun für Hermitesche  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen. Dann Sei nun  $A$  wie beschrieben  $(n \times n)$  und Hermitesch. Dann gilt mit Konstruktion auch

$$B^* = B,$$

da

$$(S^*AS)^* = S^*A^*S = S^*AS.$$

Somit ist  $B_1$  ebenfalls Hermitesch. Also gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine diagonalisierende unitäre Transformationsmatrix  $S_1$  für  $B_1$ . Also

$$D_1 = S_1^*B_1S_1.$$

Sei nunmehr  $S_2$  folgende (offenbar wiederum unitäre) Matrix:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & S_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Dann haben wir offenbar

$$S_2^*S^*ASS_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = D, \quad D \text{ diagonal.}$$

Also wird  $A$  durch die unitäre Transformationsmatrix

$$SS_2 \text{ diagonalisiert.} \blacksquare$$

Wir erwähnen noch ohne Beweis (man vergleiche die Analogie der drei Aussagen zu denen des letzten Satzes):

**SATZ 11.** *Alle unitären Matrizen sind unitär diagonalisierbar, dabei sind die Eigenwerte nicht mehr reell, wohl aber sämtlich vom Betrage 1. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind wiederum orthogonal.*

**SATZ 12.** *Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist genau dann unitär diagonalisierbar, wenn sie normal ist, d.h. wenn  $A^*A = AA^*$  gilt.*

Man beachte, dass der letztere Satz sowohl den reell-symmetrischen als auch den Hermiteschen als auch den unitären Fall umfasst.





## Anwendungen der Eigenwerttheorie

**Vorbemerkung:** Nicht etwa können hier *alle* Anwendungen der Eigenwerttheorie besprochen werden. Wir werden folgende Anwendungen behandeln, für die Problemstellungen (i), (iv), (v), (vi) werden wir ausdrücklich Lösungen mit Beispielen behandeln:

### 1) Anwendung auf quadratische Formen, mit Hauptachsentransformation für Quadriken.

Diese Anwendung ist selber wieder recht allgemein und hat konkrete Anwendungen für scheinbar ganz verschiedenartige mathematische Fragen - in allen drei Fällen ist offenbar eine symmetrische (und damit auch) quadratische Matrix im Spiel, die wir für die folgenden Probleme mit Eigenwerttheorie analysieren:

(i) Wie kann man ermitteln, was für ein Gebilde z.B. durch eine Gleichung wie

$$(1) \alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}xy = d$$

beschrieben wird? (Solche Gebilde heißen Quadriken, im Allgemeinen können noch Terme vom Grad 1 hinzukommen.) Die zugehörige Matrix ist hier offenbar

$$M = (\alpha_{ij})_{ij}, \text{ mit } \alpha_{ij} = \alpha_{ji}.$$

Man hat mit ihr die zu (1) gleichwertige Gleichung:

$$\vec{x}^T M \vec{x} = d.$$

Wir werden die Diagonalisierung von  $M$  (die bereits bekannt ist), benutzen, die Hauptachsen der Quadrik sowie ihren Typ zu finden. Ferner werden wir ein verkürztes Verfahren zur Typbestimmung kennenlernen. (Diese Probleme werden wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels behandeln.)

(ii) Zu jedem Körper kann man drei Hauptachsen bestimmen, um welche der Körper ohne Unwucht rotieren kann. (Für einen Quader sind das offenbar die Quaderachsen, aber es überrascht doch, dass man solche Achsen für jeden Körper bestimmen kann.) Dazu bestimmt man den sogenannten Trägheitstensor, der durch eine symmetrische Matrix beschrieben wird. Auf diese Matrix wendet man dann dasselbe an wie bei Problem (i), die Hauptachsentransformation, und hat mit den Richtungen der Orthonormalbasis von Eigenvektoren die gesuchten Hauptachsen.

(iii) Man hat ein System von  $n$  normalverteilten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , die nicht unabhängig sind (für die Grundbegriffe vgl. das dritte Kapitel über Wahrscheinlichkeitsrechnung), was im Falle normalverteilter Variablen genau dasselbe bedeutet wie: Die Variablen sind korreliert, d.h. die folgende Kovarianzmatrix ist nicht Diagonalmatrix:

$$\text{Cov}(\vec{X}) = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{ij},$$

mit (' $E$ ' bedeutet hier Erwartungswertbildung,  $\text{Cov}(X, Y)$  ist die Kovarianz der Variablen  $X$  und  $Y$ ):

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Dabei ist

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) = \sigma^2(X) \text{ (Varianz von } X).$$

Die Frage lautet nun: Kann man das System der Variablen  $X_1, \dots, X_n$  durch eines von Linearkombinationen der  $X_i$  so ersetzen, dass die Kovarianzmatrix des neuen Systems eine Diagonalmatrix ist? Diesen Vorgang nennt man Dekorrelieren, oder auch Hauptkomponenten-Analyse ('principal component analysis'). Die Antwort ist nach unserer bisherigen Theorie sofort positiv zu geben, da man die Kovarianzmatrix als symmetrische diagonalisieren kann. Das liefert sofort die dekorrelierenden Linearkombinationen und einen Satz gleichwertiger Zufallsvariablen, welcher unabhängig ist.

Es sei noch erwähnt, dass man dies Verfahren auch gern anwendet, um etwa bei einer riesigen Menge von Beschreibungsvariablen einen viel kleineren Satz zu bestimmen, dem gegenüber die restlichen vernachlässigbar sind. Das kann man rational tun, indem man nur solche der Variablen bewahrt, die zu Eigenwerten nennenswerter Absolutbeträge gehören - vielfach stellt man fest, dass die Serie der Eigenwerte nach wenigen größeren nur noch winzige bringt. Man bewahrt dann nur die Hauptkomponenten zu den nennenswert großen Eigenwertbeträgen.

## 2) Extrema bei Funktionen mehrerer Veränderlicher:

(iv) Wie kann man die Hessematrix eines Skalarfeldes  $s(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , das ist die Matrix

$$H_s(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} s(x_1, \dots, x_n) \right)_{ij}$$

benutzen, um Näheres über die Existenz eines Extremums von  $s$  an einer Stelle  $\vec{x}_0$  zu erfahren, für die  $\text{grad } s(\vec{x}_0) = \vec{0}$  ist? (Letztere Bedingung kennen wir als notwendige für das Auftreten eines Extremums bei in  $\vec{x}_0$  differenzierbarer Funktion  $s$ .) Wir werden sehen, dass dies Problem mit denselben Methoden zu behandeln ist wie (i), nur mit dem einfachsten Teil davon, das geschieht im dritten Abschnitt.

## 3) Lösen gekoppelter Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

Man hat ein System gekoppelter linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten  $n$ . Ordnung, der expliziten Form (die  $\alpha_{ji}$  sind die konstanten Koeffizienten, die  $\beta_i$  beschreiben eine Inhomogenität (Störung, äußeren Antrieb), mit  $x_i^{(k)}$  wird die  $k$ . Ableitung bezeichnet, wobei  $x_i^{(0)}$  die Funktion  $x_i$  selbst ist):

$$x_i^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ij} x_j^{(k)}(t) + \beta_i(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dann lässt sich dies ohne Weiteres darstellen als ein lineares DGL-System erster Ordnung, nur im Raum von neuen unbekanntenen Funktionen  $y_1, \dots, y_N$ , mit  $N = m \cdot n$ , der Form

$$\vec{y}'(t) = A \vec{y}(t) + \vec{b}(t). \quad \text{mit quadratischer Matrix } A.$$

(Diesen Vorgang nennt man Reduktion auf erste Ordnung.) Hier werden wir folgendes Programm behandeln:

(v) Löse das homogene System  $\vec{y}' = A \vec{y}$  in dem Fall, dass  $A$  diagonalisierbar ist. Wir werden auch einen Ausblick auf den allgemeinen Fall geben (d.h. inhomogene Gleichung mit eventuell nicht diagonalisierbarer Matrix).

(vi) Wann sind Lösungen von homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen stabil  $\vec{x}'(t) = A \vec{x}(t)$  stabil (d.h. wenn  $\vec{x}(t)$  eine Lösung ist und  $\vec{y}(t)$  eine weitere Lösung, die hinreichend nahe bei  $\vec{x}$  startet, also  $|\vec{x}(0) - \vec{y}(0)|$  klein genug, dann gilt für alle Zeitpunkte  $t > 0$  auch  $|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)| < K$  mit einer vorgeschriebenen Schranke  $K$ )? Wir werden sehen, dass die Antwort mit den Eigenwerten von  $A$  gegeben werden kann. Diese Aufgaben werden im 4. Abschnitt behandelt.

**4) Lösen einfacher partieller Differentialgleichungen:** Es sei nur als Ausblick erwähnt, dass sie auch bei partiellen Differentialgleichungen eine große Rolle spielen. Die bisherigen Ausführungen sollten auch für solche Anwendungen eine gute Verständnisbasis abgeben. Z. B. sind Funktionen wie  $\sin(x)$ ,  $\sin(2x)$ ,  $\dots$ ,  $\sin(nx)$  Eigenfunktionen (so heißen Eigenvektoren in Funktionenräumen naheliegend) des

partiellen Ableitungsoperators  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , weil

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin x &= (-1) \cdot \sin(x), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(2x) &= (-4) \cdot \sin(2x), \quad \text{usw.}, \end{aligned}$$

also haben wir mit diesen Funktionen gleich eine Fülle von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten  $-n^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Nun lassen sich einige einfache partielle Differentialgleichungen lösen, indem man Lösungen entwickelt nach Eigenfunktionen, welche spezifische Randbedingungen erfüllen, z.B. nach den eben

genannten Eigenfunktionen ergibt sich damit ein Lösungsansatz

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(kx).$$

Das ist eine Fourier-Sinus-Reihe. Für eine partielle DGL der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad c > 0, \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung}), \quad \text{mit } a < x < b, \quad t > 0, \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0 \quad (\text{Randbedingungen}), \\ u(x, 0) &= f(x) \quad (\text{Anfangsbedingung}) \end{aligned}$$

auf einem endlichen Intervall für  $x$  reicht dieser Ansatz (nach linearer Transformation) bereits aus. Auch für Rechtecke oder Quader als räumliche Bereiche höherer Dimension funktioniert dieser Ansatz, man braucht dann lediglich die mehrdimensionalen Versionen der Fourier-Entwicklung mit Basis-Eigenfunktionen wie  $\sin(kx) \sin(ly)$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ , oder drei solche Faktoren.

### 1. Quadratische Formen und symmetrische Matrizen, Signatur und Definitheit

DEFINITION 7. Eine reelle quadratische Form ist ein Ausdruck mit  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$  der Form

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j.$$

Sie ordnet offenbar jedem Vektor aus  $\mathbb{R}^n$  eine reelle Zahl zu. Die Matrix

$$M^e(q) = (\alpha_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

dazu kann man offenbar symmetrisch wählen (also  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ) und hat dann in Vektor-Matrix-Schreibweise:

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T M^e(q) \vec{x}.$$

$M^e(q)$  stellt die quadratische Form  $q$  bezüglich der kanonischen Basis  $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  dar.

**Beispiel:** Zur symmetrischen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gehört offenbar die quadratische Form

$$q(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy.$$

(Damit wird  $M = M^e(q)$ .) Denn

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2y^2 - xy - xy \\ &= q(x, y). \end{aligned}$$

Zur quadratischen Form

$$p(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - xy + 2xz - 3yz$$

gehört, wie man nachprüfe, die beschreibende Matrix (bezüglich der kanonischen Basis  $e$ )

$$M^e(p) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Das einfache Schema ist: Die Koeffizienten zu  $x_i^2$  in  $p$  sind die entsprechenden Hauptdiagonaleinträge von  $M^e(p)$ , die Koeffizienten (Vorfaktoren) zu den Termen  $x_i x_j$  ( $i \neq j$ , im Ausdruck für  $q$  zusammengefasst, also  $i < j$ ) sind jeweils  $2 \cdot a_{ij} = 2 \cdot a_{ji}$ . Damit kann man zu  $q$  die Matrix  $M(q)$  sofort aufschreiben.

Wir kommen nunmehr zum Transformationsverhalten von Matrizen für quadratische Formen, mit der Absicht, eine Basis so zu wählen, dass die beschreibende Matrix diagonal wird. Dann wird man

die lästigen gemischten Terme los und kann mühelos den Typ und die Lage der geometrischen Menge ermitteln, welche durch eine Gleichung  $q(\vec{x}) = d$  beschrieben wird.

Dazu definieren wir zuerst noch

DEFINITION 8. Die zur quadratischen Form  $q$  gehörige Matrix bzgl.  $e$  sei  $M^e(q)$ . Dann definiert  $M^e(q)$  in folgender Weise eine symmetrische Bilinearform ( $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ):

$$B_q(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x}^T M^e(q) \vec{y}.$$

DEFINITION 9 (und Satz). Es sei eine quadratische Form  $q$  auf  $\mathbb{R}^n$  gegeben,  $b = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  eine beliebige Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die beschreibende Matrix von  $q$  bezüglich  $b$ :

$$M^b(q) = \left( B_q(\vec{b}_i, \vec{b}_j)_{ij} \right).$$

Für diese Matrix gilt dann:

$$\begin{aligned} (\vec{x}^b)^T M^b(q) \vec{y}^b &= B_q(\vec{x}, \vec{y}) \text{ und insbesondere} \\ (\vec{x}^b)^T M^b(q) \vec{x}^b &= q(\vec{x}). \end{aligned}$$

Wir haben nunmehr folgendes unmittelbar einsichtige Transformationsverhalten:

SATZ 13. Ist  $b = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  eine beliebige Basis des  $\mathbb{R}^n$ ,  $q$  eine quadratische Form auf  $\mathbb{R}^n$ , dann gilt:

$$M^b(q) = (T^T) M^e(q) T,$$

wobei  $T$  die Matrix ist, welche  $\vec{x}^b$  in  $\vec{x}^e$  transformiert, für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Begründung:**

$$(\vec{x}^b)^T (T^T) M^e(q) T \vec{x}^b = (T \vec{x}^b)^T M^e(q) T \vec{x}^b = (\vec{x}^e)^T M^e(q) \vec{x}^e = (\vec{x})^T M^e(q) \vec{x} = q(\vec{x}).$$

Nun kommt die entscheidende Feststellung: Wenn  $T$  orthogonal ist, dann ist  $T^{-1} = T^T$ . Also stimmt **in diesem Falle** die Transformation von  $M$  als quadratischer Form mit der Transformation von  $M$  als linearer Abbildung überein, wir können also wegen der orthogonalen Transformierbarkeit von  $M$  die bereits von den linearen Abbildungen bekannte Transformation auch für quadratische Formen benutzen! Damit haben wir sofort die Anwendung auf das Problem (i) (nächster Abschnitt).

## 2. Anwendung auf Quadriken (Hauptachsentransformation)

SATZ 14. Jede quadratische Form  $q$  kann bei geeigneter Basiswahl auf Diagonalgestalt transformiert werden, und man hat für  $M^e(q)$  eine Diagonalmatrix um eine orthogonale Transformationsmatrix  $S$  mit:

$$D = S^T M^e(q) S,$$

und dann bestimmt  $D$  in eindeutiger Weise den Typ einer Quadrik  $q(\vec{x}) = d$ , und die Spalten von  $S$  sind die neuen Basisvektoren, welche die Hauptachsenrichtungen angeben.

**Die Haupttypen im  $\mathbb{R}^2$**  (gemeint sind stets Kurven, nicht etwa Flächen):

- 1) Ellipse  $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ ,  $\alpha, \beta > 0$
- 2) Hyperbel  $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  (oder umgekehrt)
- 3) Parabel  $\alpha x^2 + c = y$  (Parabel, Auftreten von  $y$  in erster Potenz)
- 4) Doppelgerade  $\alpha x^2 - \beta y^2 = 0$  ( $\alpha, \beta > 0$ )

**Die Haupttypen im  $\mathbb{R}^3$ :**

- 1) Ellipsoidoberfläche  $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ,
- 2) Hyperboloidoberfläche, einschalig:  $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma z^2 + 1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ,  
Hyperboloidoberfläche zweischalig:  $\alpha x^2 + \beta y^2 + 1 = \gamma z^2$ ,  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ,
- 3) Paraboloidoberfläche:  $z = \alpha x^2 + \beta y^2 + c$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ,
- 4) hyperbolisches Paraboloid (Fläche):  $z = \alpha x^2 - \beta y^2 + c$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ,
- 5) Zylinderoberfläche - elliptischer Zylinder:  $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ ,  $\alpha, \beta > 0$
- 6) hyperbolischer Zylinder:  $\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .
- 7) Doppelebene  $\alpha x^2 = \beta y^2$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

Man wird beobachten, dass es für die Typbestimmung nur auf die Vorzeichen der Eigenwerte ankommt, also darauf, wie viele davon positiv, negativ, Null sind. Dazu definieren wir:

DEFINITION 10. *Eine symmetrische Bilinearform (bzw. die zugehörige quadratische Form bzw. die entsprechende symmetrische Matrix) hat Signatur  $(p, r, s)$  genau dann, wenn sie  $p$  Eigenwerte  $> 0$  hat und  $r$  Eigenwerte  $< 0$ , ferner  $s$ -fach den Eigenwert Null. Dabei sind mehrfach auftretende Eigenwerte entsprechend mehrfach zu zählen. Eine symmetrische Matrix heißt **positiv definit**, wenn  $r = s = 0$ , sie heißt **negativ definit**, wenn  $p = s = 0$ . Sie heißt **positiv semidefinit**, wenn  $r = 0$ , **negativ demidefinit**, wenn  $p = 0$ . Sie heißt **indefinit**, wenn es sowohl Eigenwerte  $> 0$  als Eigenwerte  $< 0$  gibt.*

SATZ 15. *Eine symmetrische Matrix  $A$  gilt:*

- 1)  $A$  ist positiv definit  $\iff \vec{x}^T A \vec{x} > 0$  für alle  $\vec{x} \neq \vec{0}$
- 2)  $A$  ist positiv semidefinit  $\iff \vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$  für alle  $\vec{x}$ .
- 3)  $A$  ist negativ definit  $\iff \vec{x}^T A \vec{x} < 0$  für alle  $\vec{x} \neq \vec{0}$
- 4)  $A$  ist negativ semidefinit  $\iff \vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$  für alle  $\vec{x}$ .

**Begründung:** Wir haben mit einer Basis, welche  $A$  diagonalisiert zur Diagonalmatrix  $D$ :

$$\vec{x}^T A \vec{x} = (\vec{x}^b)^T D \vec{x}^b.$$

Also

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \text{ für alle } \vec{x} \neq \vec{0} \iff \text{alle Einträge von } D \text{ sind } > 0.$$

Ebenso:

$$\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0 \text{ für alle } \vec{x} \iff \text{alle Einträge von } D \text{ sind } \geq 0.$$

Die Aussagen 3) und 4) folgen darüber, dass  $A$  negativ (semi)definit ist genau dann, wenn  $-A$  positiv (semi)definit ist. ■

**Bemerkung:** Natürlich kann man die Eigenschaften in diesem Satz auch zur Definition machen und die Eigenschaften der zuvor gegebenen Definition zu Folgerungen.

SATZ 16 (Jacobi-Kriterium für positive Definitheit). *Eine symmetrische Matrix  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  ist genau dann positiv definit, wenn*

$$\det(A_k) > 0 \text{ für alle } 1 \leq k \leq n,$$

wobei

$$A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}.$$

(Ebenso ist  $A$  genau dann positiv semidefinit, wenn alle diese Unterdeterminanten  $\geq 0$  sind.)

**Warnung 1:** Man sollte nicht naiv-falsch schließen, eine Matrix sei negativ-definit, wenn die erwähnten Unterdeterminanten alle negativ sind. Ein guter richtiger Weg dagegen ist es, über die zweifellos wahre Aussage zu gehen, dass  $A$  genau dann negativ-definit ist, wenn  $-A$  positiv definit ist.

**Warnung 2:** Wenn man 'positiv definit' hier durch 'positiv semidefinit' ersetzt und nur  $\det(A_k) \geq 0$  für  $1 \leq k \leq n$  fordert, so entsteht ein falscher Satz. Die korrekte Forderung ist hier stärker: Man muss  $\det(B) \geq 0$  fordern für alle Matrizen  $B$ , welche aus  $A$  dadurch entstehen, dass irgendwelche Zeilen und Spalten derselben Indizes gestrichen werden. Diese  $\det(B)$  heißen Hauptminoren (die oben genannten  $\det(A_k)$  nennt man dagegen 'führende Hauptminoren'). Man findet im Netz eine Fülle von Texten, deren Autoren diese Unterscheidung entging und die Unsinn zur Sache reden. (Vor solchen Texten sollte man sich also hüten!)

**Beispiele:**

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 30 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, weil

$$\begin{aligned} \det(1) &= 1 > 0, \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} &= 1 > 0, \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 30 \end{pmatrix} &= 5 > 0. \end{aligned}$$

**Folgerung:** Die Quadrik  $x^2 + 5y^2 + 30z^2 + 4xy + 6xz + 4yz = 1$  stellt eine Ellipsoidoberfläche dar. Wenn man die Lage der Achsen kennenlernen möchte, braucht man allerdings eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren. Auch braucht man die Beträge der Eigenwerte, um die Halbachsenlängen des Ellipsoids auszurechnen.

**Schema für die Anwendung auf Quadriken im homogenen Fall:**

1) Wenn  $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = d$  gegeben ist (homogener Fall, alle Summanden von  $q$  sind vom selben Grad 2), dann untersucht man, den Typ der Quadrik zu ermitteln, lediglich die Definitheit mit dem Jacobi-Kriterium etwa. Dazu ist zunächst etwa aus dem Rechenausdruck für  $q$  die symmetrische Matrix  $A$  zu bestimmen.

2) Wenn man zusätzlich die geometrische Form genauer bestimmen will, nutzt man die Eigenwerte selbst.

3) Wenn man zusätzlich die Lage, also die zugehörigen Hauptachsenrichtungen wissen will, benötigt man auch zugehörige Eigenvektoren.

**Beispiele:**

1) Wir betrachten die Quadrik

$$q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 = 1.$$

**1. Schritt:** Die zugehörige Matrix, welche  $q$  bezüglich  $e$  darstellt, lautet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist offensichtlich indefinit, es gibt einen Eigenwert  $> 0$  und einen  $< 0$  (was wir mit Jacobikriterium allein wissen, ohne einen Eigenwert auszurechnen). Denn die Unterdeterminanten sind  $1, -3$ , und das gilt auch für  $-A$ . Die Quadrik stellt also eine Hyperbel dar.

**2. Schritt:** Wir berechnen die Eigenwerte von  $A$ , das sind hier (zufällig, es sind keineswegs immer die Unterdeterminanten!)  $-1, 3$ . Damit wissen wir, noch ohne Eigenvektoren und Achsenrichtungen zu kennen, dass die Form der Gleichung im Hauptachsensystem (neuen Koordinatensystem, wir bezeichnen die Koordinaten dann mit 'Schlange') lautet:

$$-\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 = 1, \text{ eventuell nach Vertauschen der Koordinaten, oder der Achsen.}$$

Damit wissen wir:

$$\tilde{x} = \pm \sqrt{3\tilde{y}^2 - 1},$$

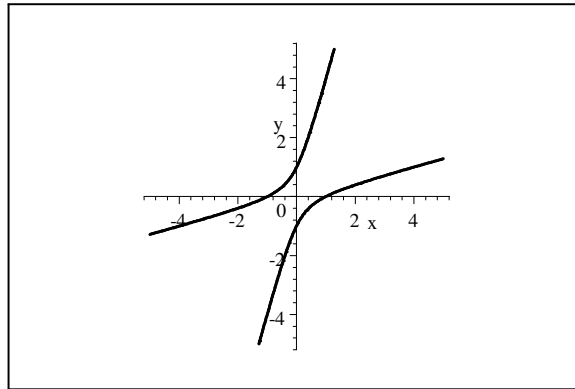
und damit kennen wir die Winkel, welche die Asymptoten der Hyperbel miteinander bilden, es sind

$$\arctan(\sqrt{3}) \text{ und sein komplementärer zu } \pi.$$

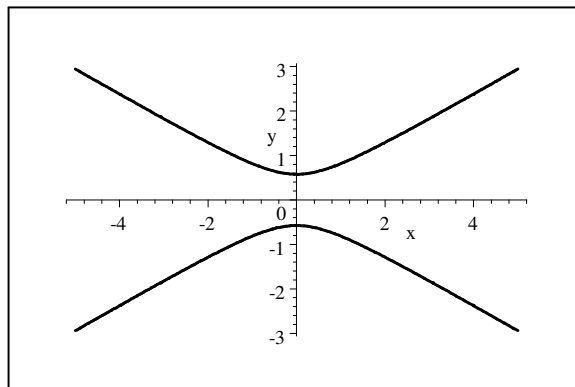
**3. Schritt:** Wir berechnen auch Eigenvektoren und finden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } -1, \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } 3.$$

Damit wissen wir, dass die Hyperbelachsen gegen die Achsen der Hyperbel  $x^2 = 3y^2 - 1$  um  $\pi/4$  gegen den Uhrzeigersinn gedreht sind und haben das volle Bild:



Man beachte, dass die Hyperbel  $x^2 = 3y^2 - 1$  so aussieht, man forme um zu  $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}}$ :



Diese ist tatsächlich um  $\pi/4$  gegen den Uhrzeigersinn zu drehen. Natürlich kennt man nun auch den Abstand der Hyperbeläste von der betreffenden Achse.

### 3. Anwendung auf Extrema bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

Wir setzen eine Funktion  $s(x_1, \dots, x_n)$  mehrerer Veränderlicher voraus (ein Skalarfeld also), das zwei mal stetig differenzierbar ist. Dann haben wir einmal den Gradienten

$$\text{grad } s(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} s(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} s(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Man weiß, schließt dabei völlig analog zum eindimensionalen Fall, dass

**SATZ 17.**  $s(\vec{x})$  sei in  $\vec{x}_0$  differenzierbar und habe dort ein lokales Extremum. Dann gilt  $\text{grad } s(\vec{x}_0) = \vec{0}$ .

Damit ermittelt man also, welche Kandidaten für Extremstellen überhaupt in Frage kommen.

Nun hat man wie im eindimensionalen Fall, dass die Bedingung keineswegs hinreichend ist für das Auftreten eines Extremums. Aber man hat eine (manchmal, keineswegs immer) funktionierende hinreichende Bedingung, welche mit den partiellen zweiten Ableitungen verbunden ist:

**SATZ 18.** Sei  $s(\vec{x})$  zwei mal stetig partiell differenzierbar in einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  mit  $\text{grad } s(\vec{x}_0) = \vec{0}$ . Dann hat man mit der (symmetrischen (!) - das folgt aus der Voraussetzung der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit) Hessematrix

$$H_s(\vec{x}_0) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} s(\vec{x}_0) \right)_{i,j} :$$

- 1)  $H_s(\vec{x}_0)$  ist **negativ** definit  $\implies s$  hat in  $\vec{x}_0$  ein lokales strenges lokales **Maximum**.
- 2)  $H_s(\vec{x}_0)$  ist **positiv** definit  $\implies s$  hat in  $\vec{x}_0$  ein lokales strenges lokales **Minimum**.
- 3)  $H_s(\vec{x}_0)$  **indefinit**  $\implies s$  hat in  $\vec{x}_0$  kein Extremum, auch nicht im nicht strengen Sinn.

**Zum Verständnis:** Ein strenges lokales Maximum von  $s$  liegt in  $\vec{x}_0$  genau dann vor, wenn

$$s(\vec{x}) < s(\vec{x}_0) \text{ für alle } \vec{x} \text{ in einer Umgebung von } \vec{x}_0.$$

Ein Maximum im nicht strengen Sinn liegt vor, wenn diese Aussage mit  $\leq$  statt  $<$  gilt. Für Minima sind die Ungleichungen umzudrehen.

**Warnung:** Für den Fall, dass  $H_s(\vec{x}_0)$  positiv (oder negativ) semidefinit ist, sagt der Satz nichts aus! Tatsächlich ist dann noch offen, ob ein Minimum oder ein Sattelpunkt in  $\vec{x}_0$  vorliegt, Beispiele:  $s(x, y) = x^2y^2 + y^2$  hat positiv semidefinite Hessematrix in  $(0, 0)$  (es ist die Nullmatrix!), und es liegt in  $(0, 0)$  ein Minimum vor, aber  $u(x, y) = x^2y + y^4$  hat in  $(0, 0)$  ebenso positiv semidefinite Hessematrix (wieder die Nullmatrix), aber es liegt ein Sattel vor, kein Extremum.

**Warnung:** Man denke nicht in falscher Analogie, dass zu 'Maximum' die Eigenschaft 'positiv definit' gehöre. Folgende Begründung macht ganz klar, dass die Sache andersherum liegt.

**Begründung (für strenges Maximum):** Unter den Voraussetzungen hat man für  $\vec{x}$  in einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  mit einem  $\vec{y}$  in dieser Umgebung (Näherung 2. Ordnung zu einer Gleichung gemacht):

$$s(\vec{x}) = s(\vec{x}_0) + \text{grad } s(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_s(\vec{y}) (\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Also mit  $\text{grad } s(\vec{x}_0) = \vec{0}$ :

$$s(\vec{x}) = s(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_s(\vec{y}) (\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Wählt man nun die Umgebung klein genug, so folgt mit Stetigkeitsargument, dass mit  $H_s(\vec{x}_0)$  negativ definit auch  $H_s(\vec{y})$  negativ definit ist. Das heißt aber:

$$\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_s(\vec{y}) (\vec{x} - \vec{x}_0) < 0 \text{ für } \vec{x} \neq \vec{x}_0.$$

Also

$$s(\vec{x}) < s(\vec{x}_0) \text{ für } \vec{x} \text{ aus der erwähnten Umgebung. } \blacksquare$$

Man sieht also, dass die Hessematrix gerade negativ definit sein muss, damit die richtige Ungleichung für ein Maximum entsteht.

Man sieht an der Begründung auch sofort die dritte Aussage: Der Term

$$\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_s(\vec{y}) (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

wird dann für beliebig kleine Umgebungen je nach Wahl von  $\vec{x}$  einmal positiv, das andere Mal negativ, es liegt also kein Extremum vor. Die Aussage für Minima folgt natürlich sofort über  $-s$  und damit  $-H_s$ .

**Beispiel 1):** Sei

$$s(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

Dann hat man offenbar  $\text{grad } s(\vec{0}) = \vec{0}$ . Ferner

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} s(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} s(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} s(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} s(x, y) = 1, \text{ also } H_s(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist **positiv** definit, also hat  $s$  ein **strenges lokales Minimum** in  $(0, 0)$ . (Das ist sogar in diesem Fall ein globales.) **Bemerkung:** Die Hessematrix ist konstant, weil es sich um ein Polynom 2. Grades handelt.

**Beispiel 2):**

$$s(x, y) = x^2 - 2xy + y^2.$$

Man sieht hier sofort, dass

$$s(x, y) = (x - y)^2,$$



und das hat in  $(0, 0)$  ein **nicht strenges** Minimum mit Wert 0, sogar global. Denn offenbar wird dasselbe auch auf der ganzen Geraden  $x = y$  angenommen. Man hat also einen Grat. Das sieht man auch an der Hessematrix, sie lautet hier:

$$H_s(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ nicht negativ definit, aber negativ semidefinit.}$$

Die Eigenwerte sind 4, 0.

**Beispiel 3):**

$$s(x, y) = x^2 - 4xy + y^2.$$

Die Hessematrix an der Stelle  $(0, 0)$  ist hier:

$$H_s(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Matrix nicht positiv definit (Jacobi). Sie ist auch nicht negativ definit, und Null ist kein Eigenwert. Also ist sie indefinit, es gibt einen positiven und einen negativen Eigenwert, wir brauchen sie nicht auszurechnen, da wir schon wissen, dass kein lokales Extremum von  $s$  in  $\vec{0}$  vorliegt.

**Beispiel 4):** Wir wollen wenigstens noch ein etwas weniger triviales Beispiel haben, um auch zu zeigen, dass man gewöhnlich natürlich keine konstante Hessematrix hat, sondern diese wirklich an der fraglichen Stelle bilden muss:

$$s(x, y) = \sin(x) \cos(y).$$

Wir betrachten die Stelle  $(\pi/2, 0)$ . Dort verschwindet der Gradient. Die Hessematrix ist:

$$H_s(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$H_s\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sie ist negativ definit, also liegt ein strenges Maximum an jener Stelle vor. Dagegen findet man analog an der Stelle  $(0, \pi/2)$  (auch dort verschwindet der Gradient):

$$H_s\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ indefinit,}$$

also liegt ein Sattel vor, weder Maximum noch Minimum.

#### 4. Anwendung auf lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Wir zeigen zunächst, dass man sich auf die erste Ordnung beschränken kann, wenn man nur vektoriell arbeitet und in Kauf nimmt, dass der Konfigurationsraum eine höhere Dimension bekommt. Diesen Vorgang nennt man Reduktion auf erste Ordnung, und wir beschreiben ihn in einem Beispiel:

**4.1. Reduktion auf erste Ordnung.** Betrachten wir (1) :

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x'(t) - y'(t) + x(t) + 2y(t) &= 0, \\ y''(t) - 3x'(t) + 2y'(t) - 2x(t) + 3y(t) &= 0. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t), \\ w(t) &= y'(t), \end{aligned}$$

dann haben wir gleichwertig zu (1) folgendes System erster Ordnung: (2) :

$$\begin{aligned} v'(t) + 2v(t) - w(t) + x(t) + 2y(t) &= 0, \\ w'(t) - 3v(t) + 2w(t) - 2x(t) + 3y(t) &= 0. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \\ -2v(t) + w(t) - x(t) - 2y(t) \\ 3v(t) - 2w(t) + 2x(t) - 3y(t) \end{pmatrix},$$

ordentlich in Matrixform aufgeschrieben:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

Abstrakter:

$$(3) \quad \vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Dabei haben wir uns einen vierdimensionalen Konfigurationsraum, vier unbekannte Funktionen, eingehandelt, sind aber die zweite Ordnung losgeworden. (3) ist eine beliebige lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (was bedeutet: die Matrix  $A$  ist konstant, ihre Koeffizienten hängen nicht von  $t$  ab). Da wir von vornherein vektoriell arbeiten, müssen wir nicht mehr von 'Systemen von linearen Differentialgleichungen' reden, sondern sagen einfach: 'Lineare Differentialgleichung'. In Koordinatenform aufgeschrieben gibt das natürlich ein System, außer wenn  $A$  nur  $(1 \times 1)$ -Matrix ist.

**4.2. Eigenwert-Eigenvektor-Methode zur Lösung homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.** Wir haben folgendes grundlegende Resultat:

SATZ 19. Wenn  $A$  eine **reelle** diagonalisierbare  $(n \times n)$ -Matrix ist, dann ist mit (eventuell komplexen) Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (mit eventuellen Wiederholungen!) und einer zugehörigen Basis von Eigenvektoren  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  die Matrix

$$X(t) = (e^{\lambda_1 t} \vec{x}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \vec{x}_n)$$

ein Fundamentalsystem (oder eine Fundamentalmatrix) für die DGL (3)  $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ . Das heißt: Die Spalten der Matrix bilden eine Basis des Vektorraums aller Lösungen dieser DGL. Jede konkrete Lösung der DGL lässt sich damit gewinnen in der Form  $X(t) \vec{a}$  mit einem Vektor  $\vec{a}$ . Mehr noch: Die Matrix

$$e^{At} := X(t)(X(0))^{-1}$$

bildet ein solches Fundamentalsystem, so dass

$$(4) \quad \vec{x}_{t_0, \vec{x}_0}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{x}_0$$

diejenige Lösung der DGL ist, welche die Anfangsbedingung  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  erfüllt. Die Gleichung (4) stellt also die allgemeine Lösung von (3) dar. **Zusatz:** Wenn  $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}$  ein konjugiertes Paar komplexer Eigenwerte ist, so bildet man anstelle von  $e^{\lambda_{i_1} t} \vec{x}_{i_1}, e^{\lambda_{i_2} t} \vec{x}_{i_2}$  folgendes **reelle Paar von Fundamentallösungen:**

$$\operatorname{Re}(e^{\lambda_{i_1} t} \vec{x}_{i_1}), \operatorname{Im}(e^{\lambda_{i_1} t} \vec{x}_{i_1}), \text{ nur für einen der beiden, gleichgültig, welchen!}$$

**Zum Verständnis und zur allgemeineren Anwendung:** Man hat in jedem vernünftigen Computeralgebraprogramm die Operation  $e^{At}$  eingebaut, zumindest sind numerische Resultate zu erhalten. Dann gilt die Formel (4) auch für beliebige Matrix  $A$  (!) nicht nur für diagonalisierbare Matrizen. Aber der Satz zeigt, wie man  $e^{At}$  im Fall einer diagonalisierbaren Matrix bekommt, zumindest für den Fall, dass alle Eigenwerte reell sind. Aber wir werden gleich sehen, dass man auch bei Auftreten komplexer Eigenwerte eine reelle Fundamentalmatrix erhält.

Wir illustrieren an einem über  $\mathbb{R}$  diagonalisierbaren Beispiel:

**Beispiel 1:**

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \text{ also} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte und finden:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dazu die Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ zu } 1 + \sqrt{2},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ zu } 1 - \sqrt{2}.$$

Nach dem Satz haben wir damit die folgende allgemeine Lösung von (5) :

$$\vec{x}_{\alpha,\beta}(t) = \alpha e^{(1+\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta e^{(1-\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

In Komponenten also:

$$\begin{aligned} x_{\alpha,\beta}(t) &= \alpha e^{(1+\sqrt{2})t} + \beta e^{(1-\sqrt{2})t}, \\ y_{\alpha,\beta}(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\alpha e^{(1+\sqrt{2})t} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\beta e^{(1-\sqrt{2})t}. \end{aligned}$$

Wir können damit auch berechnen:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} e^{(1+\sqrt{2})t} & e^{(1-\sqrt{2})t} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{(1+\sqrt{2})t} + \frac{1}{2}e^{(1-\sqrt{2})t} & \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} - \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} - \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} & \frac{1}{2}e^{(1+\sqrt{2})t} + \frac{1}{2}e^{(1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit haben wir dann gemäß (4) auch die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems! Im Beispiel ergibt sich für

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{(1+\sqrt{2})t} + \frac{1}{2}e^{(1-\sqrt{2})t} & \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} - \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} - \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} & \frac{1}{2}e^{(1+\sqrt{2})t} + \frac{1}{2}e^{(1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{(1+\sqrt{2})t} + \frac{1}{2}e^{(1-\sqrt{2})t} - \sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} + \sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} - \frac{1}{4}\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} - e^{(1+\sqrt{2})t} + e^{(1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Beispiel 2:** Wir betrachten eine reelle diagonalisierbare Matrix, die jedoch erst über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar ist:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}j.$$

Zugehörige Eigenvektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{1}{2}j\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ zu } 1 \pm \sqrt{2}j.$$

Das ergibt also zunächst komplexe Fundamentallösungen. Aber wir haben: Da  $A$  reell ist und somit die komplexen Eigenwerte in konjugierten Paaren auftreten, lassen sich aus *einer* komplexen Fundamentallösung *zwei linear unabhängige reelle* Fundamentallösungen machen, und zwar hier durch

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( e^{(1+j\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}j\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} e^t \cos(\sqrt{2}t) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^t \sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Im} \left( e^{(1+j\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}j\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} e^t \sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}e^t \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man beachte: Die andere komplexe Fundamentallösung ergibt dann nicht noch weitere reelle Lösungen, man braucht sie gar nicht erst zu betrachten, es kommt derselbe Lösungsraum heraus! Darum haben wir folgende Fundamentalmatrix zu (6), aus der wir wie oben wieder  $e^{At}$  machen können:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(\sqrt{2}t) & e^t \sin(\sqrt{2}t) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^t \sin(\sqrt{2}t) & \frac{1}{2}\sqrt{2}e^t \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

Aber öfter findet man eine Fundamentalmatrix, die in gewisser Weise einfacher ist als  $e^{At}$ . Dann verwendet man sie besser als  $e^{At}$  selbst in folgender Formel zur Lösung der zugehörigen **inhomogenen Gleichung**:

SATZ 20. Sei  $A$  eine beliebige reelle quadratische Matrix, dann hat die inhomogene lineare DGL

$$(7) \quad \vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

folgende allgemeine Lösung des Anfangswertproblems, das aus (7) und der Anfangswertvorgabe

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

besteht:

$$(8) \quad \vec{x}_{t_0, \vec{x}_0} = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0 + X(t) \int_{t_0}^t (X(s))^{-1} \vec{f}(s) ds.$$

Dabei ist  $X(t)$  **irgendeine Fundamentalmatrix**. Insbesondere gilt die Formel mit  $X(t) = e^{At}$  und damit  $(X(s))^{-1} = e^{-As}$ .

**Zum Verständnis der Formel (8)**: Man beachte, dass

$$(X(s))^{-1} \vec{f}(s) \text{ ein Vektor ist, damit auch} \\ \int_{t_0}^t (X(s))^{-1} \vec{f}(s) ds \text{ ein Vektor.}$$

Also ist

$$X(t) \int_{t_0}^t (X(s))^{-1} \vec{f}(s) ds \text{ wieder ein Vektor, da } X(t) \text{ Matrix.}$$

Man erkennt auch direkt, dass die Anfangsbedingung für  $t = t_0$  erfüllt ist, da

$$e^{A(t_0-t_0)}\vec{x}_0 = E\vec{x}_0 = \vec{x}_0, \\ \int_{t_0}^{t_0} (X(s))^{-1} \vec{f}(s) ds = \vec{0}, \text{ also auch} \\ X(t) \int_{t_0}^{t_0} (X(s))^{-1} \vec{f}(s) ds = \vec{0}.$$

### 4.3. Stabilität von Gleichgewichtspunkten bei autonomen Differentialgleichungen (auch nichtlinearen).

DEFINITION 11 (Autonomie bei Differentialgleichungen). Eine gewöhnliche explizite Differentialgleichung erster Ordnung heißt autonom, wenn sie die Form hat:

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)).$$

Wenn  $\vec{f}$  dabei nicht linear ist, so liegt eine nichtlineare DGL vor. Dann hat die DGL nicht mehr die Form  $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$  mit einer Matrix  $A$ .

(Explizitheit bedeutet: Die DGL ist nach  $\vec{x}'(t)$  aufgelöst.) Autonomie bedeutet nun weiter: Die Ableitung hängt nicht explizit von  $t$  ab. Physikalischer Sinn ist: Das System bleibt für sich, es wirken keine äußeren Kräfte ein. So sind z.B. lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten genau dann autonom, wenn sie homogen sind oder aber die Inhomogenität eine Konstante ist.

Wir kommen zum intuitiv einsichtigen Begriff des Gleichgewichtspunktes:

DEFINITION 12. Ein Punkt  $\vec{x}_0$  heißt Gleichgewichtspunkt der DGL  $\vec{x}'(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$  genau dann, wenn  $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ .

**Zum Verständnis:** Ein Gleichgewichtspunkt ist also eine stationäre (konstante) Lösung der DGL.

**Beispiel:** Ein Pendel hat zwei Gleichgewichtspunkte, einen stabilen (unten hängend) mit Anfangsgeschwindigkeit Null, und einen instabilen (oben 'stehend'). Wie kann man nun genau das Phänomen der Stabilität mathematisch beschreiben? Hier ist eine Definition, welche dem intuitiven Sinn offenbar entspricht:

DEFINITION 13. Ein Gleichgewichtspunkt  $\vec{x}_0$  der DGL  $\vec{x}'(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$  heißt stabil, wenn es zu jeder Zahl  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U$  von  $\vec{x}_0$  gibt, so dass für jede Lösung  $\vec{y}$  der DGL mit  $\vec{y}(0) = \vec{x}_1 \in U$  gilt:

$$\text{Für alle } t > 0: |\vec{y}(t) - \vec{x}_0| < \varepsilon.$$

Der Gleichgewichtspunkt  $\vec{x}_0$  heißt instabil, wenn er nicht stabil ist. Er heißt asymptotisch stabil, wenn für  $\vec{y}$  wie oben sogar gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}(t) = \vec{x}_0.$$

**Zum Verständnis:** Anschaulich bedeutet Stabilität: Wenn man nahe genug beim Gleichgewichtspunkt startet, so bleibt man auch in aller Zukunft nahe beim Gleichgewichtspunkt (genauer: so nahe, wie man zuvor vorgeschrieben hat). Wir machen aus der homogenen Schwingungsgleichung

$$x''(t) + 2\rho x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mit  $v(t) = x'(t)$  folgende Reduktion auf erste Ordnung und damit eine lineare DGL  $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ :

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\omega_0^2 x(t) - 2\rho v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Lösungen die Paare  $\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ , mit  $x(t)$  Lösung von (1) und  $v(t) = x'(t)$ . Nun wissen wir, dass im Falle schwacher Dämpfung ('Schwingfall') die Basislösungen entstehen:  $x_1(t) = e^{-\rho t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t)$ ,  $x_2(t) = e^{-\rho t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t)$ . Dann hat man offenbar in beiden Fällen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_i'(t) = 0.$$

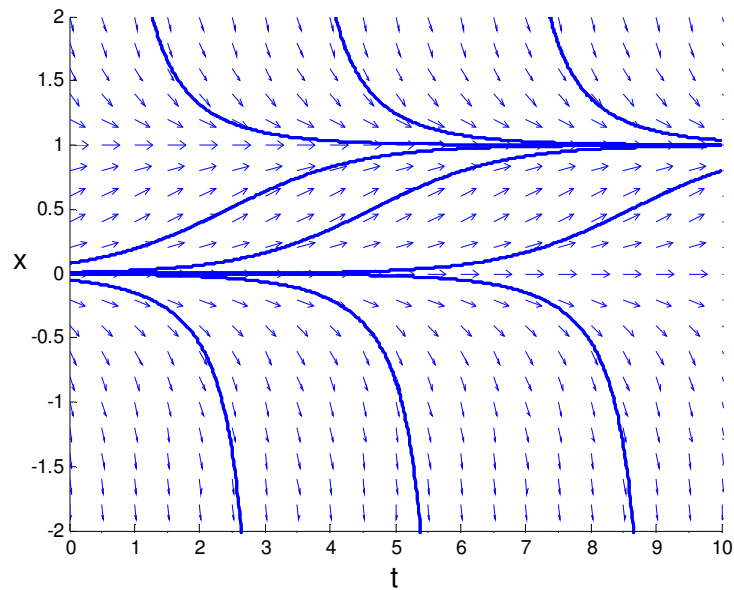
Also ist  $\vec{0}$  asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Systems (2). Auch im Kriechfall (starker Dämpfung) ist  $\vec{0}$  asymptotisch stabil. Aber im Fall ungedämpfter Schwingung ist  $\vec{0}$  nur stabil, nicht mehr asymptotisch stabil, dann hat man Basislösungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(\omega_0 t), \quad \text{mit } x_1'(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0 t), \\ x_2(t) &= \sin(\omega_0 t), \quad \text{mit } x_2'(t) = \omega_0 \cos(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Man bleibt also im  $(x, v)$ -Raum (Phasenraum) stets in der anfänglichen Entfernung vom Gleichgewichtspunkt  $\vec{0}$ , also auch nahe dabei, so nahe man bei  $\vec{0}$  gestartet ist, ohne sich zu nähern oder gar  $\vec{0}$  im Limes für  $t \rightarrow \infty$  zu erreichen.

**Beispiel 1 (Richtungsfeld im  $(t, x)$ -Raum,** zur autonomen Dgl.  $x'(t) = x(t) - x^2(t)$ , mit normierten Richtungsvektoren - man erkennt, dass der Gleichgewichtspunkt  $x_0 = 1$  asymptotisch stabil

ist, der Gleichgewichtspunkt  $x_1 = 0$  dagegen instabil):

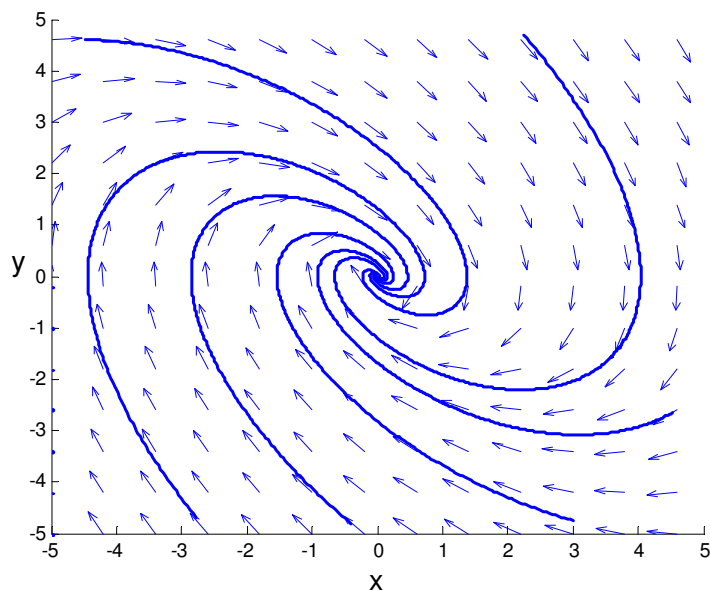


**Beispiel 2 (Phasenraumporträt):** Der Gleichgewichtspunkt  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  ist asymptotisch stabil, zur Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -x(t) - y(t) \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

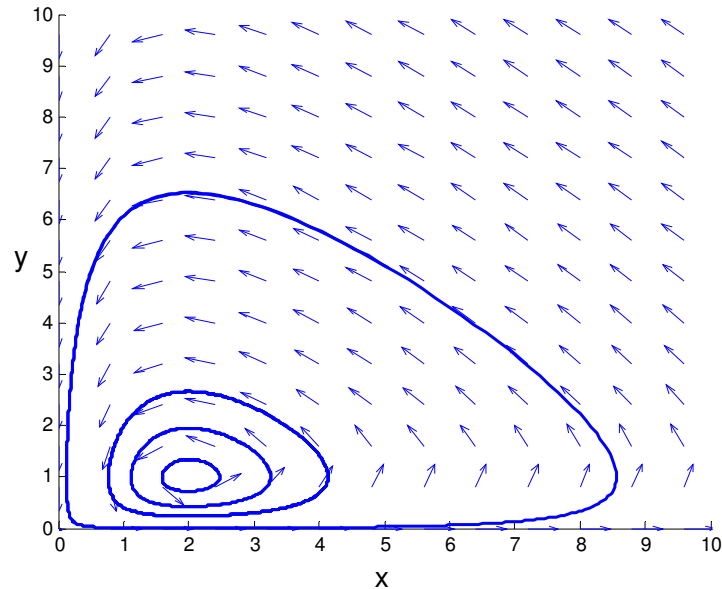
Das Richtungsfeld ist normiert eingezeichnet:



**Beispiel 3 (Phasenraumporträt):** Der Gleichgewichtspunkt  $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil, zur Differentialgleichung (nichtlineares System!) - dies System tritt auf bei Volterras Räuber-Beute-Modell, und die Lösung zeigt die wesentliche Eigenschaft - einen periodischen

Kreislauf  $x(t)$  ist dabei die Anzahl der Beutefische,  $y(t)$  die Anzahl der Raubfische, und der Gleichgewichtspunkt liegt genau bei den zeitlichen Mittelwerten, das ist  $\gamma/\delta$  für  $x(t)$  und  $\alpha/\beta$  für  $y(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{pmatrix}, \text{ hier speziell: } \alpha = \beta = \delta = 1, \gamma = 2.$$



Nun kann man tatsächlich die Stabilität bei linearen Systemen mit der Eigenwerttheorie vollständig beherrschen:

SATZ 21. Der Gleichgewichtspunkt  $\vec{0}$  der linearen homogenen Dgl.  $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$  ( $A$  konstante Matrix) ist

- (i) asymptotisch stabil, wenn alle Realteile der Eigenwerte von  $A < 0$  sind,
- (ii) instabil, wenn es einen Eigenwert von  $A$  mit Realteil  $> 0$  gibt oder wenn es einen Eigenwert mit Realteil  $= 0$  gibt, dessen geometrische Vielfachheit nicht gleich seiner algebraischen Vielfachheit ist.
- (iii) stabil (jedoch nicht asymptotisch), wenn alle Eigenwerte Realteil  $\leq 0$  haben **und zusätzlich** alle Eigenwerte mit Realteil  $= 0$  die Eigenschaft haben, dass ihre algebraische Vielfachheit gleich ihrer geometrischen Vielfachheit ist

#### Zum Verständnis und zur Begründung:

Nehmen wir zunächst an, dass  $A$  diagonalisierbar ist. Wenn nun alle Eigenwerte Realteil  $< 0$  haben, dann ist klar: jede Basislösung, wie man sie alle mit der Eigenwert-Eigenvektor-Methode bekommt, hat die Gestalt:

$$e^{(a+bj)t}\vec{x}_{(\lambda)},$$

mit einem Eigenvektor  $\vec{x}_{(\lambda)} \neq \vec{0}$  zu  $\lambda = a + jb$ . Nach Voraussetzung hat man  $a < 0$ . Also steht vor den reellen Basislösungen stets ein Faktor  $e^{at}$ , gefolgt von einem konstanten Vektor (wenn  $b = 0$ ) oder einem beschränkten Vektor, mit  $\cos(bt)$  – und  $\sin(bt)$  – Gliedern (wenn  $b \neq 0$ ), nennen wir den  $\vec{y}_{(\lambda)}(t)$ . Dabei ist dann  $\vec{y}_{(\lambda)}(t) \neq \vec{0}$ . Dann ist klar:  $e^{at}\vec{y}_{(\lambda)}(t) \rightarrow \vec{0}$  für  $t \rightarrow \infty$ , also  $e^{(a+bj)t}\vec{x}_{(\lambda)} \rightarrow \vec{0}$  für  $t \rightarrow \infty$ . Die asymptotische Stabilität von  $\vec{0}$  folgt nun so: Eine Lösung der DGL  $\vec{x}'(t)$  starte mit  $\vec{x}(0) \neq \vec{0}$ . Dann

$$\vec{x}(t) = \alpha_1 e^{a_1 t} \vec{y}_{(\lambda_1)} + \dots + \alpha_n e^{a_n t} \vec{y}_{(\lambda_n)}.$$

Da nun alle  $a_i < 0$ , hat man

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{0}.$$

Dabei kommt man sogar von jedem Anfangswert  $\vec{x}(0)$  asymptotisch nach  $\vec{0}$ , man braucht nicht einmal den Start in einer kleinen Umgebung von  $\vec{0}$  zu verlangen.

Wenn (wieder bei diagonalisierbarer Matrix  $A$ ) ein Eigenwert  $\lambda = a + jb$  existiert mit  $a = \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , so sehen wir auf demselben Wege sofort, dass  $|e^{at}\vec{y}(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Mit demselben Argument wie zuvor haben wir dann Instabilität von  $\vec{0}$ , die Lösung explodiert, ihr Betrag geht ins Unendliche. Man bleibt also in keinerlei vorgeschriebener Umgebung von  $\vec{0}$ , gleichgültig, wie nahe bei  $\vec{0}$  man anfängt.

Wenn alle Eigenwerte Realteil  $\leq 0$  haben, mindestens einer aber Realteil = 0 hat, wiederum  $A$  diagonalisierbar ist, dann bleiben die erwähnten Lösungen  $e^{at}\vec{y}_{(\lambda)} = e^{0 \cdot t} = \vec{y}_{(\lambda)}$  stets beschränkt, also bleibt auch

$$\text{für alle } t \geq 0: |\vec{x}(t)| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k e^{\alpha_k t} \vec{y}_{(\lambda_k)}| \leq \max_k (|\alpha_k|) \cdot C$$

mit einer Konstanten  $C < \infty$ , damit folgt aus  $\max_k |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{C}$ , dass  $|\vec{x}(t)| < \varepsilon$ . Startet man also zur Zeit  $t = 0$  nahe genug bei  $\vec{0}$ , so bleibt man für alle Zukunft so nahe bei  $\vec{0}$  wie vorgeschrieben. Aber wir haben keine asymptotische Stabilität mehr.

Damit haben wir die Aussagen für diagonalisierbare Matrizen  $A$  gezeigt.

Für den nicht diagonalisierbaren Fall sei kurz beschrieben, wie das Resultat auch dann zustande kommt: Wenn ein Eigenwert höhere algebraische Vielfachheit als 1 hat, aber die geometrische Vielfachheit geringer als die algebraische ist, dann beobachtet man, dass Basislösungen der Form  $(\vec{y}_{(\lambda)}(t))$  ist der oben erwähnte Vektor):

$$q(t) e^{at} \vec{y}_{(\lambda)}(t)$$

entstehen, mit einem Polynom  $q$ , das nicht mehr konstant ist (Dass dies allgemein so ist, zeigen wir hier nicht.) Wenn nun  $a < 0$ , so zwingt der exponentielle Faktor das Polynom zu Boden, wir haben wieder

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) e^{at} \vec{y}_{(\lambda)}(t) = \vec{0}.$$

Bei  $a > 0$  ergibt sich wiederum

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q(t) e^{at} \vec{y}_{(\lambda)}(t)| = \infty.$$

Damit ergeben sich die ersten beiden Aussagen auch im nicht diagonalisierbaren Fall. Wenn nun  $a = 0$  und  $\operatorname{Grad}(q) > 0$  (was *genau* bei algebraischer Vielfachheit von  $\lambda >$  geometrische Vielfachheit von  $\lambda$  eintritt), dann kommt wieder

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q(t) e^{0 \cdot t} \vec{y}_{(\lambda)}(t)| = \infty.$$

Das begründet die dritte Aussage im Falle nicht diagonalisierbarer Matrix  $A$ . ■

#### Beispiele zur Anwendung:

1.)  $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$ : Die Matrix hat Eigenwerte  $1, -1$ ,  $\vec{0}$  ist also instabiler Gleichgewichtspunkt.

2.)  $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$ : Die Matrix hat die Eigenwerte  $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}j\sqrt{3}$ , deren Realteile negativ sind, also ist  $\vec{0}$  asymptotisch stabil.

3.)  $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$ : Die Eigenwerte sind  $\pm j$ , ihre Realteile Null, und  $\vec{0}$  ist stabiler Gleichgewichtspunkt, weil diese Eigenwerte algebraische wie geometrische Vielfachheit 1 haben.

4.)  $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$ : Der einzige Eigenwert ist Null, seine algebraische Vielfachheit ist 2, die geometrische Vielfachheit nur 1, also ist  $\vec{0}$  instabiler Gleichgewichtspunkt.

Besonders interessant ist die Frage der Stabilität natürlich für nichtlineare Systeme. Denn für sie lassen sich in aller Regel keine Lösungen explizit ausrechnen, an denen etwa auch die Stabilität eines Gleichgewichtspunktes erkennbar wäre. Diese Frage ist im Allgemeinen schwierig, aber in gewissen Fällen kann man eine einfache Entscheidung treffen, indem man das System um den Gleichgewichtspunkt



linearisiert und dann vom linearen System auf das ursprüngliche nichtlineare zurückschließt - man muss allerdings achtgeben - nicht immer lässt sich die Stabilitätseigenschaft des linearisierten Systems übertragen. Die Idee der Linearisierung haben wir mit der Näherung 1. Ordnung eines Vektorfeldes um  $\vec{x}_0$  (vgl. das spätere Kapitel zum Differenzieren im Mehrdimensionalen, dort wird ausführlich die Näherung 1. Ordnung und die totale Ableitung eines Vektorfeldes besprochen). Sie geht so: Wir gehen aus von einer autonomen Differentialgleichung

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad \vec{f} \text{ nicht linear, aber differenzierbar,}$$

mit Gleichgewichtspunkt  $\vec{x}_0$ , also  $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ .

Nun schreiben wir - das geht bei totaler Ableitbarkeit von  $\vec{f}$  im Punkt  $\vec{x}_0$  die Näherung von  $\vec{f}$  1. Ordnung um  $\vec{x}_0$  auf, mit der Jacobi-Matrix  $A = J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)$  - (es sei bemerkt, dass dies im eindimensionalen Fall einfach die bekannte Ableitung ist):

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) &\approx \vec{f}(\vec{x}_0) + A\Delta\vec{x} \\ &= A\Delta\vec{x}. \end{aligned}$$

Damit können wir die Differentialgleichung für  $\vec{x}(t)$  in hinreichender Nähe zu  $\vec{x}_0$  ersetzen durch die lineare homogene Dgl.

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Daraus ergibt sich die Idee, von der Stabilität oder Instabilität des Gleichgewichtspunktes  $\vec{0}$  dieser linearen Dgl. auf die entsprechende Eigenschaft des Gleichgewichtspunktes  $\vec{x}_0$  der ursprünglichen Gleichung zu schließen. Folgender Satz klärt, wie weit diese Übertragung gerechtfertigt ist:

**SATZ 22.** Sei  $\vec{x}_0$  ein Gleichgewichtspunkt von  $\vec{x}'(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$ , mit einem in einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  zwei mal stetig differenzierbaren Vektorfeld  $\vec{f}$ . Dann gilt:

- (i) Wenn alle Eigenwerte von  $J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)$  Realteil  $< 0$  haben, so ist  $\vec{x}_0$  asymptotisch stabil.
- (ii) Wenn ein Eigenwert von  $J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)$  Realteil  $> 0$  hat, so ist  $\vec{x}_0$  instabil.

Die Übertragung vom linearisierten System auf das nichtlineare klappt nicht, wenn Eigenwerte mit Realteil Null auftreten.

**Anwendungsbeispiele -  $\vec{f}$  ist jeweils zwei mal stetig differenzierbar in einer Umgebung der betrachteten Gleichgewichtspunkte:**

1.)  $x'(t) = \sin(x^2(t))$  hat die Gleichgewichtspunkte  $x_{1,k} = \sqrt{k\pi}$ ,  $x_{2,k} = -\sqrt{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .  
 Nun hat  $f(x) = \sin(x^2)$  die Ableitung  $f'(x) = 2x \cos(x^2)$ , also ist  $f'(x_{1,k}) = 2\sqrt{k\pi} \cos(k\pi)$ , das ist negativ für ungerades  $k$ , positiv für gerades  $k > 0$ , Null für  $k = 0$ , also ist  $x_{1,k}$  asymptotisch stabil für ungerades  $k$ , instabil für gerades  $k > 0$ , und für  $k = 0$  haben wir auf diesem Wege keine Entscheidung. (Dieser ist tatsächlich instabil.) Analog haben wir für  $x_{2,k}$  asymptotische Stabilität bei geradem  $k > 0$  und Instabilität bei ungeradem  $k$ .

$$2.) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)(y^2(t) + 1) \\ y^2(t) + \sin(x(t)) \end{pmatrix}$$

hat den einzigen Gleichgewichtspunkt  $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

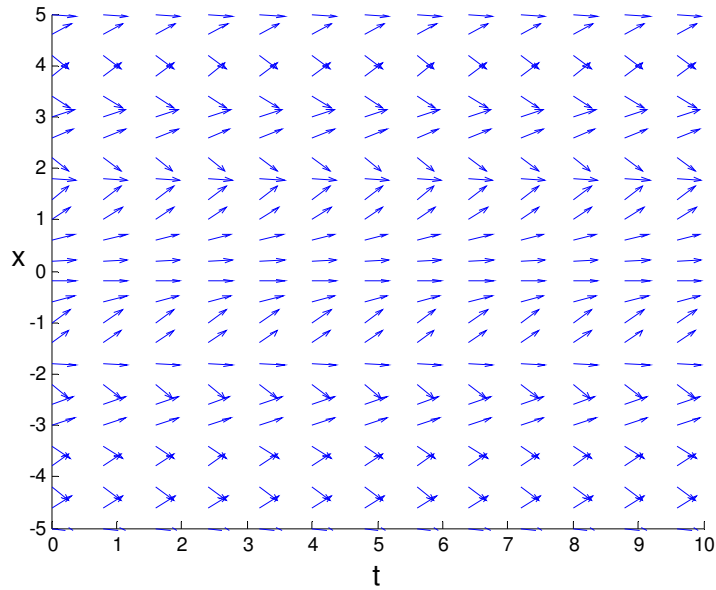
Man hat hier  $\vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(y^2 + 1) \\ y^2 + \sin(x) \end{pmatrix}$ , also

$$J_{\vec{f}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x(y^2 + 1)) & \frac{\partial}{\partial y} (x(y^2 + 1)) \\ \frac{\partial}{\partial x} (y^2 + \sin(x)) & \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + \sin(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + 1 & 2xy \\ \cos(x) & 2y \end{pmatrix} \text{ und}$$

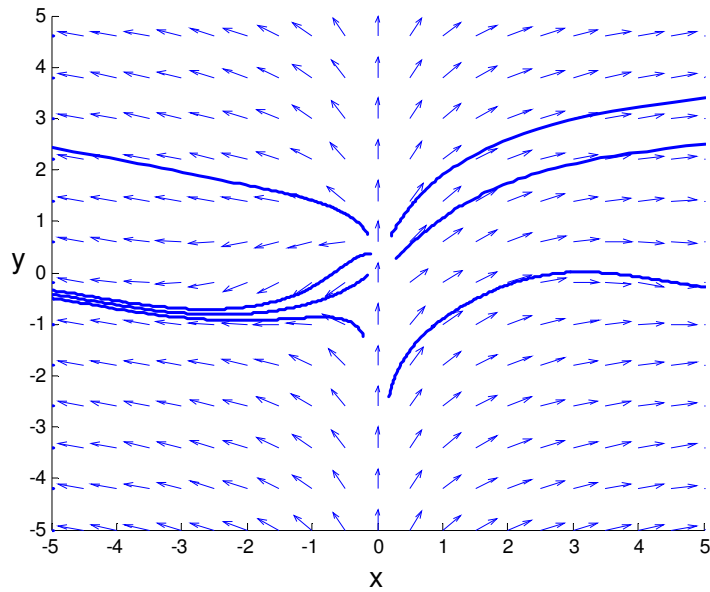
$$J_{\vec{f}}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ die Eigenwerte sind } 1 \text{ und } 0, \text{ daher ist } \vec{x}_0 \text{ instabil.}$$

Abschließend bestätigen wir noch unsere Resultate (darunter das offen gebliebene zum 2. Beispiel) zu den Beispielen 2,3 durch Aufzeichnen der Richtungsfelder:

Zu Beispiel 1 - man erkennt die Instabilität von  $x_{1,0} = x_{2,0} = 0$  und auch die oben rechnerisch festgestellten Eigenschaften: die verschiedenen Verhältnisse für die positiven und negativen Gleichgewichtspunkte sowie das Abwechseln von stabilen und unstabilen Gleichgewichtspunkten mit Ausnahme von 0 und dem ersten negativen - die sind beide instabil):



Zu Beispiel 2 - man erkennt die Instabilität des Ursprungs:



## Kurven im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$

### 1. Parametrisierungen von Kurvenbahnen

Unter einer 'Kurve' versteht man umgangssprachlich eine intuitiv eindimensionale Punktmenge, die typisch entsteht, indem ein Punkt eine Bewegung ausführt. Wir wollen eine solche Punktmenge hier präzisierend 'Kurvenbahn' nennen. Wir kennen zwei verschiedenartige Beschreibungen für solche Bahnen, insbesondere im  $\mathbb{R}^2$ . Nehmen wir zum Beispiel die Kreisbahn um den Ursprung vom Radius  $r > 0$ , dann können wir die Bahn einmal als Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

auffassen, also ist die Punktmenge, die Bahn:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2 \right\}.$$

Wir können aber auch jeden Punkt dieser Bahn durch seinen Winkel beschreiben, also mit einer Zahl, indem wir bilden:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Formal als Abbildung geschrieben:

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} : & [0, 2\pi) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Nun haben wir:

$$B = \{ \vec{x}(t) \mid 0 \leq t < 2\pi \} = \text{Bild}(\vec{x}).$$

Nun ist  $\vec{x}$  eine Parametrisierung von  $B$ . Für viele Zwecke werden wir (wie im Beispiel) eine *injektive* Parametrisierung  $\vec{x}$  haben wollen. Andererseits beschreibt  $\vec{x}$  nicht nur die Bahn (über ihr Bild), sondern auch, wie diese Bahn durchlaufen wird, physikalisch also auch die jeweilige momentane Geschwindigkeit  $\vec{x}'(t)$  und Beschleunigung  $\vec{x}''(t)$ . (Wir werden zumeist voraussetzen, dass  $\vec{x}$  zwei mal differenzierbar ist). Mathematisch ist es üblich, eine solche eine Bahn parametrisierende Abbildung  $\vec{x}$  als 'Kurve' zu bezeichnen. Die meisten praktischen mit Kurven verbundenen Zwecke erreicht man am besten über Parametrisierungen.

**1.1. Einige Beispiele, mit Anschauung von Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren.** Die Ableitung von Kurven ist wörtlich definiert wie die Ableitung von Funktionen nur einer unabhängigen Variablen:

DEFINITION 14. Wenn  $\vec{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve ist,  $a < t < b$ , dann ist

$$\vec{x}'(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}, \quad \text{wenn dieser Limes existiert.}$$

Für die Ränder kann man noch die einseitigen Ableitungen bilden.

Dazu hat man folgende offensichtliche Beobachtung:

SATZ 23.  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$  ist an der Stelle  $t$  genau dann ableitbar, wenn alle Komponentenfunktionen  $x_i(t)$  es sind, und es gilt dann

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}.$$

Kurven sind also komponentenweise abzuleiten.

Inhaltliche Deutung:  $\vec{x}'(t)$  ist Tangentialvektor, auch Geschwindigkeitsvektor, zur Kurve und weist in die Richtung, in der die Bahn durchlaufen wird, wenn  $\vec{x}'(t) \neq \vec{0}$ . Für  $\vec{x}'(t) = \vec{0}$  hat man momentane Geschwindigkeit  $\vec{0}$ .  $\vec{x}''(t)$  ist Beschleunigungsvektor zur Zeit  $t$  und gibt an, in welcher Richtung die Kurve abbiegt, sich krümmt.

**Bemerkung zur Notation:** Es ist üblicher, für die Ableitung nach der Zeit einen Punkt über dem Buchstaben zu schreiben. Wir folgen dieser Notation hier nicht, weil die Punkte öfter im Druck schlecht zu sehen sind und insbesondere handschriftlich Probleme bereiten können. Man sollte das aber wissen für die Lektüre von vielen Texten, welche diese Notation benutzen. Also:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{x}'(t).$$

1.1.1. *Ellipsen.* Man kann sie parametrisieren mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor stehen für  $a \neq b$  nur in den Achsenpunkten senkrecht aufeinander:

$$\langle \vec{x}'(t), \vec{x}''(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \cos(t) \\ -b \sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle = (a^2 - b^2) \sin(t) \cos(t).$$

Bei Drehung einer solchen Ellipse um  $\alpha$  entgegen dem Uhrzeigersinn bekommt man die Parametrisierung

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\alpha) \cos(t) - b \sin(\alpha) \sin(t) \\ a \sin(\alpha) \cos(t) + b \cos(\alpha) \sin(t) \end{pmatrix}.$$

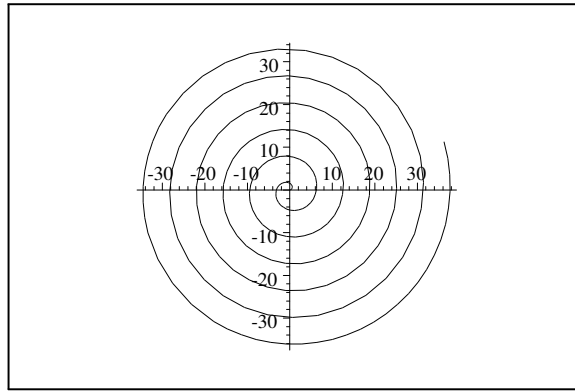
1.1.2. *Archimedische und logarithmische Spirale.* Die archimedische Spirale ist parametrisiert mit

$$\vec{x}(t) = t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Das kann man auch mit komplexen Zahlen so sagen:

$$z(r) = r e^{jr}, \quad 0 \leq r < \infty.$$

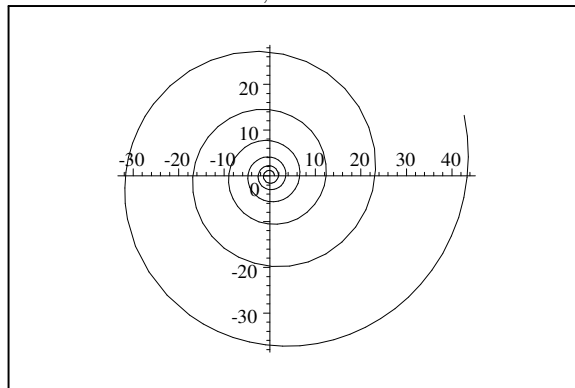
Der Betrag ist eine Funktion des Winkels (Polarkoordinaten-Parametrisierung). Man sieht, dass die Bahn entgegen dem Uhrzeigersinn nach außen spiralt. Dabei haben die Windungen immer konstanten Abstand voneinander. Man kann natürlich auch  $r(\varphi) = \varphi/2$  setzen usw., dann geht es langsamer nach außen. Hier ist ein Bild davon:



Die logarithmische Spirale funktioniert ähnlich, nur wächst der Radius mit  $t$  exponentiell:

$$\vec{y}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

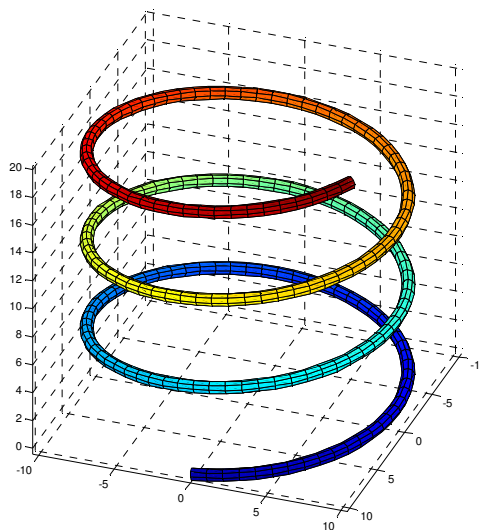
Wieder kann man modifizieren mit Vorfaktor  $e^{\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ . Hier ist ein Bild für  $\alpha = 1/10$ :



1.1.3. *Schraubenkurven*. Diese sind definiert durch folgende Parametrisierung, wobei  $R > 0$  und  $\alpha > 0$  Konstanten sind:

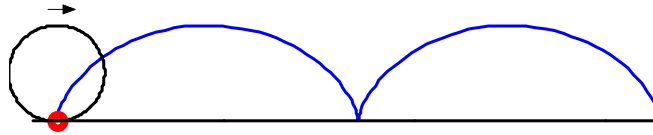
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \\ \alpha t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mit  $t$  schraubt man sich in die Höhe.  $(x, y)$  – Koordinaten beschreiben einen Kreis der Länge  $R$ . Bei einer Umdrehung gewinnt man  $2\pi\alpha$  an Höhe ('Ganghöhe' der Schraube). Das sieht so aus:



1.1.4. *Zykloiden*. Das sind Kurven, die entstehen, wenn man einen Kreis ohne Rutschen über die  $x$ - Achse rollt und dabei die Bewegung eines Kreispunktes verfolgt. Hat der Kreis Radius  $R$  und ist der Punkt zur Zeit  $t = 0$  der Punkt  $(0, 0)$ , der Kreismittelpunkt zur Zeit  $t = 0$  in  $(0, R)$  und rollt man nach rechts ab, dann bekommt man folgende Beschreibung der Bewegung - und damit Parametrisierung einer Zykloide -  $\vec{x}_M(t)$  ist der Ort des Kreismittelpunktes zur Zeit  $t$ , und wir machen die konstante Drehgeschwindigkeit von einer Umdrehung in der Zeitspanne  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}_M(t) + \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ -R \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Rt \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ -R \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Rt - R \sin(t) \\ R - R \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



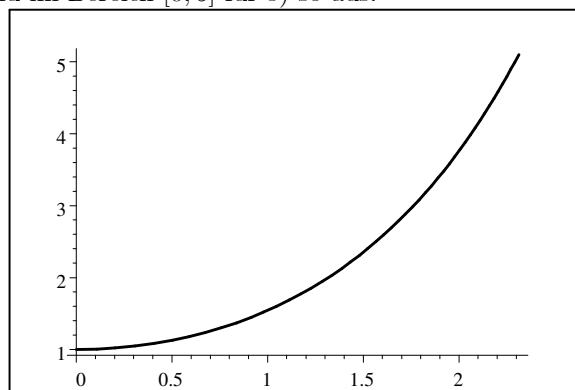
1.1.5. *Kettenlinie und Schleppkurve.* Eine Kettenlinie wird beschrieben von einer der Schwerkraft unterliegenden Kette, welche an zwei Punkten fest aufgehängt ist. Die Kettenlinie zum Parameter  $a > 0$  lautet parametrisiert - wir schreiben Zeilenvektor für bessere Lesbarkeit:

$$\vec{\mathbf{x}}(s) = a \left( \operatorname{arcsinh} \left( \frac{s}{a} \right), \sqrt{1 + \left( \frac{s}{a} \right)^2} \right).$$

Dabei ist

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln \left( x + \sqrt{1 + x^2} \right) \text{ deren Ableitung ist } \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

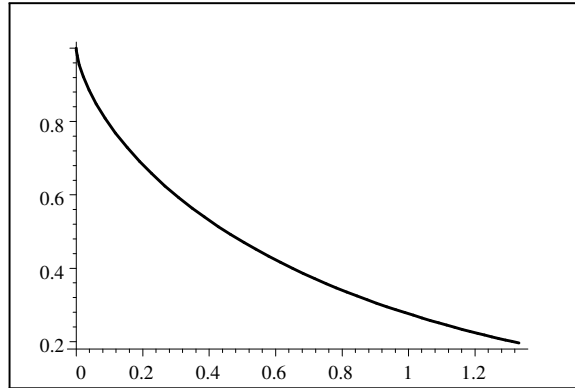
Sie sieht (hier für  $a = 1$  und im Bereich  $[0, 5]$  für  $s$ ) so aus:



Die Traktrix oder Schleppkurve ist parametrisiert mit

$$\vec{\mathbf{y}}(s) = \vec{\mathbf{x}}(s) - s \vec{\mathbf{x}}'(s) = \left( a \operatorname{arcsinh} \left( \frac{s}{a} \right) - \frac{s}{\sqrt{1 + \left( \frac{s}{a} \right)^2}}, a \sqrt{1 + \left( \frac{s}{a} \right)^2} - \frac{s^2}{a \sqrt{1 + \left( \frac{s}{a} \right)^2}} \right).$$

Sie sieht so aus:



Dabei sind die Schnittpunkte der Tangenten mit der  $x$ -Achse immer gleich weit entfernt von dem Punkt, in dem die Tangente gebildet wird. Solch eine Linie beschreibt also ein Hund, der an starrer Leine vom Frauchen gezogen wird, das auf der  $x$ -Achse nach rechts wandert.

**1.2. Umparametrisierungen von Kurven, Länge einer Kurvenbahn.** Offenbar kann man Kurvenbahnen auf verschiedene Weisen parametrisieren, z.B. wird die oben beschriebene Kreisbahn auch parametrisiert durch

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < \pi,$$

ganz anders aber auch durch

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{4\pi^2}\right) \\ \sin\left(\frac{t^2}{4\pi^2}\right) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

im letzteren Fall ist der Betrag der Geschwindigkeit nicht mehr konstant. Gibt es nun eine irgendwie ausgezeichnete Parametrisierung? Eine solche gibt es tatsächlich, wenn es nur eine reguläre Parametrisierung gibt, wir definieren:

**DEFINITION 15.** Eine Kurve  $\vec{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  oder  $n = 3$ ) heißt **regulär** (oder  $\vec{x}$  heißt reguläre Parametrisierung der Bahn, die ihr Bild ist), wenn  $\vec{x}$  stetig differenzierbar ist und

$$\vec{x}'(t) \neq \vec{0} \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Wir benötigen die Länge einer Kurvenbahn:

**DEFINITION 16** (Länge einer Kurvenbahn). Sei die Bahn  $C$  injektiv parametrisiert durch die stetig differenzierbare Parametrisierung  $\vec{x}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  ( $a < b$ ). Dann ist die Länge von  $C$  definiert als:

$$L(C) := \int_a^b |\vec{x}'(t)| dt.$$

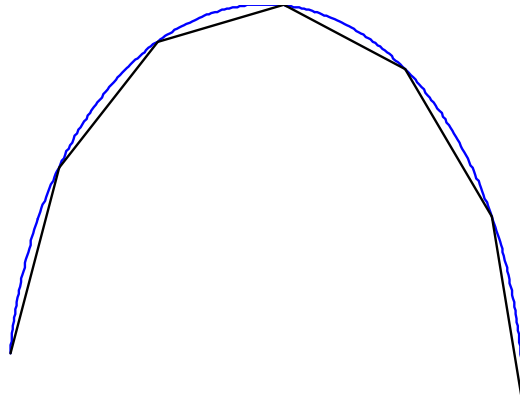
**Zum Verständnis der Definition:** Zunächst beachte man, dass das definierende Integral stets existiert, weil der Integrand stetig ist. Aber es sei auch darauf hingewiesen, dass wegen der Wurzel häufig das Bogenlängenintegral nicht elementar auszurechnen ist und dann nur näherungsweise berechnet werden kann. Dass wirklich die gewünschte Bogenlänge herauskommt, kann man sich so vorstellen:

Nimmt man Punkte  $t_0 = a$ ,  $t_k = k(b-a)/n$ , also  $t_n = b$ , dann hat man die Näherung der Bogenlänge als Summe der Längen kleiner Sekantenstücke:

$$L(C) \approx \sum_{k=0}^{n-1} |\vec{x}(t_{k+1}) - \vec{x}(t_k)|.$$



Folgendes Bild illustriert die Sache:



Nun hat man aber

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_{k+1}) - \vec{x}(t_k) &\approx (t_{k+1} - t_k) \vec{x}'(t_k), \text{ also} \\ |\vec{x}(t_{k+1}) - \vec{x}(t_k)| &\approx \frac{b-a}{n} |\vec{x}'(t_k)|, \text{ damit} \\ \sum_{k=0}^{n-1} |\vec{x}(t_{k+1}) - \vec{x}(t_k)| &\approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} |\vec{x}'(t_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |\vec{x}'(t_k)| \Delta t,\end{aligned}$$

und letztere Summe ist Riemannsumme für das Integral. Wir wissen nun, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\vec{x}'(t_k)| \Delta t = \int_a^b |\vec{x}'(t)| dt,$$

ferner

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |\vec{x}(t_{k+1}) - \vec{x}(t_k)| &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} |\vec{x}'(t_k)| + \varepsilon_n, \text{ mit} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n &= 0, \text{ was aus der gleichmäßigen Stetigkeit von } \vec{x}'(t) \text{ folgt,}\end{aligned}$$

insgesamt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\vec{x}(t_{k+1}) - \vec{x}(t_k)| = \int_a^b |\vec{x}'(t)| dt. \blacksquare$$

**Bemerkung:** Das vorangehende Argument macht auch klar, dass stets derselbe Wert für das Integral  $L(C)$  herauskommt, gleichgültig, wie man eine injektive Parametrisierung der Bahn wählt. Allerdings kann man das auch über die Kettenregel der Ableitung zeigen.

**Beispiel 1:** Wir berechnen die Bogenlänge eines Kreises vom Radius  $R > 0$ : Dazu haben wir die Parametrisierung

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi, \text{ also} \\ \vec{x}'(t) &= R \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \\ |\vec{x}'(t)| &= R,\end{aligned}$$

also ist die Länge des Kreisbogens:

$$L = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R, \text{ wie bekannt.}$$

**Beispiel 2:** Wir betrachten die Länge eines vollen Ellipsenbogens mit Halbachsenlängen  $a, b > 0$ ,  $a \neq b$ : Mit der Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

haben wir

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt,$$

aber dies Integral ist nicht elementar auszurechnen, dies und verwandte heißen gerade 'elliptische Integrale'. Selbstverständlich kann man für  $a = 2$ ,  $b = 1$  einen guten Näherungswert bekommen, in diesem Falle 9.688.

**Beispiel 3: (Ein Beispiel einer Raumkurve)** Wir betrachten eine Schraubenlinie  $C$ , nehmen zwei Windungen, parametrisiert durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Damit

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{x}'(t)| = \sqrt{2}$$

Das ergibt:

$$L(C) = \int_0^{4\pi} \sqrt{2} dt = 4\pi\sqrt{2}.$$

Nunmehr können wir die ausgezeichnete sogenannte 'Parametrisierung nach der Bogenlänge' definieren:

DEFINITION 17. Die (bis auf den Durchlaufsinne eindeutige) Parametrisierung  $\vec{x}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Kurvenbahn im  $\mathbb{R}^n$  heißt Parametrisierung nach der Bogenlänge, wenn für alle  $s \in [0, L]$  gilt:

$$\begin{aligned} s &= \text{Länge der Bahn, welche mit } \vec{x}(u), \quad 0 \leq u \leq s, \text{ parametrisiert ist} \\ &= \int_0^s |\vec{x}'(u)| du. \end{aligned}$$

Wir haben folgende Beobachtungen dazu:

SATZ 24. Für die Parametrisierung nach der Bogenlänge  $\vec{x}(s)$  gilt stets:

$$|\vec{x}'(s)| = 1 \text{ für alle } s.$$

Eine Kurvenbahn  $C$  ist genau dann nach der Bogenlänge parametrisierbar, wenn sie regulär parametrisiert werden kann..

**Begründung:** Man hat

$$\Delta s = \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} |\vec{x}'(u)| du = \Delta s |\vec{x}'(u_1)|, \text{ mit } u_1 \text{ zwischen } s_0 \text{ und } s_0 + \Delta s.$$

Da dies für beliebig kleine Beträge von  $\Delta s$  gilt, hat man

$$|\vec{x}'(u_1)| = 1 \text{ und damit im Limes wegen der Stetigkeit von } \vec{x}' \text{ auch } |\vec{x}'(s_0)| = 1.$$

Damit ist eine Parametrisierung nach Bogenlänge stets regulär. Umgekehrt kann man aus einer regulären Parametrisierung  $\vec{x}(t)$  auch eine nach Bogenlänge gewinnen, indem man definiert:

$$L(t) = \int_a^t |\vec{x}'(u)| du, \quad t \in [a, b].$$

Setze nun, da mit der Regularität von  $\vec{x}$  die Abbildung  $L(t)$  eine Bijektion von  $[a, b]$  auf  $[0, L(b)]$  ist, mit der Umkehrfunktion  $L^{-1}$ :

$$\vec{y}(s) := \vec{x}(L^{-1}(s)). \blacksquare$$

## 2. Kurvenintegrale

**2.1. Kurvenintegrale über ein Skalarfeld und Mittelwerte.** Wenn wir den Mittelwert  $\bar{f}_{[a,b]}$  einer stetigen Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  ( $a < b$ ) wissen wollen, so haben wir zu berechnen:

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Dem entspricht

$$\bar{f}_{[a,b]} \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Hier wird über ein Intervall der  $x$ - Achse integriert. Nun kann man sich auch Funktionswerte auf einem krummen Stück einer Kurvenbahn angeheftet vorstellen und deren Mittelwert bestimmen wollen. Man hat dann ein Skalarfeld ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ )

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ (wir denken vor allem an } n = 2, 3, \text{ die Sache ist aber allgemeiner)}$$

und eine (injektive!) Parametrisierung - diese nehmen wir als differenzierbar an:

$$\vec{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ (das nennt man mathematisch eine Kurve!)}$$

Also: Zur Zahl  $t \in [a, b]$  gehört ein Kurvenpunkt (umkehrbar eindeutig)  $\vec{x}(t)$ , zum Kurvenpunkt  $\vec{x}(t)$  gehört dann die Zahl  $u(\vec{x}(t))$ . Nun kann man den Mittelwert von  $u$  auf der genannten Kurve so bilden -  $C$  ist die Bahn der Kurve:

$$\bar{u}_{[a,b]} = \frac{1}{\text{Länge von } C} \int_a^b u(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt = \frac{1}{\int_a^b |\vec{x}'(t)| dt} \int_a^b u(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt.$$

$$\text{Man schreibt das gern auch so : } \bar{u}_{[a,b]} = \frac{1}{\int_C ds} \int_C u ds$$

**Beispiel:**  $\rho(\vec{x})$  sei eine Massendichte, dann ist

$$\int_a^b \rho(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt = \text{Masse der Kurvenbahn,}$$

und

$$\bar{\rho}_{[a,b]} \cdot \text{Länge der Bahn } C = \text{Masse der Bahn } C,$$

wie es sein sollte. Völlig analog hat man das für elektrische Ladungsdichten und Gesamtladungen.

**Beispiel:** Man möchte den Schwerpunkt einer Kurvenbahn  $C$  ausrechnen, auch für nicht konstante Massendichte  $\rho(\vec{x})$ , dann hat man für den Schwerpunkt  $S$ :

$$\vec{x}_S = \frac{1}{\int_a^b \rho(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt} \int_a^b \rho(\vec{x}(t)) \vec{x}(t) |\vec{x}'(t)| dt = \frac{1}{\int_C \rho ds} \int_C \vec{x} \rho ds$$

Konkretes Beispiel dazu: Wenn  $\rho(\vec{x}) = |\vec{x}|^2$  auf der Bahn des Einheitskreises (also  $\rho(\vec{x}) = 1$  darauf), dann hat man

$$\vec{x}_S^{(C)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt = \vec{0},$$

das war zu erwarten, aber auch für die obere Hälfte  $D$  des Einheitskreises bei derselben Massendichte:

$$\vec{x}_S^{(D)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\pi \end{pmatrix}.$$

Die zweite Komponente hätte man sich nicht sofort denken können!

Wir merken uns noch: Ein erster Typ von Kurvenintegral sieht so aus:  $\int_C u ds$  mit einem Skalarfeld  $u$ . Das hängt zusammen mit dem Mittelwert von  $u$  auf  $C$ , und  $ds$  ist dabei das skalare Bogenelement. Man benötigt eine Parametrisierung der Kurve, die differenzierbar ist, und macht daraus ein gewöhnliches eindimensionales Integral, s.o.

**2.2. Kurvenintegrale vom Arbeitsintegraltyp.** Ein für naturwissenschaftliche Anwendung besonders wichtiger Typ von Kurvenintegralen ist der folgende, der Arbeitsintegraltyp: Die Arbeit, welche gegen das Kraftfeld  $\vec{f}(\vec{x})$  zu verrichten ist, wenn ein Teilchen, auf das am Ort  $\vec{x}$  diese Kraft wirkt, von  $A$  nach  $B$  längs der Kurve  $\vec{x}(t)$  mit  $\vec{x}(a) = \vec{x}_A$  und  $\vec{x}(b) = \vec{x}_B$  bewegt wird, ist (so lautet die korrekte Verallgemeinerung von 'Arbeit gleich Kraft mal Weg' (!):

$$A = \int_{C, \text{Orientierung}} -\vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_a^b -\vec{f}(\vec{x}(t)) \vec{x}'(t) dt.$$

Dabei ist das Produkt im Integral,  $-\vec{f}(\vec{x}(t)) \vec{x}'(t)$ , das Skalarprodukt, wir können auch schreiben:

$$-\vec{f}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t) \text{ oder } \langle -\vec{f}(\vec{x}(t)), \vec{x}'(t) \rangle.$$

Das sollte man auch inhaltlich verstehen: Zu jedem Zeitpunkt ist 'Kraft mal Weg' als Skalarprodukt zu bilden, und darüber ist zu summieren, was das Integral besorgt. Man nennt  $\vec{x}'(t) dt$  auch das vektorielle Bogenelement. Nun kann man im günstigen Fall eines konservativen Kraftfeldes die Arbeit als Potentialdifferenz ausrechnen:

$$A = \varphi(\vec{x}_B) - \varphi(\vec{x}_A), \text{ mit } \text{grad } \varphi = -\vec{f}.$$

Das ist aber nicht immer so. Wir wollen hier lernen, wie man einem Kraftfeld ansehen kann, ob es ein Potential besitzt, so dass alle Arbeitsintegrale so einfach ausgerechnet werden können, und wie man im Falle der Existenz auch ein Potential ausrechnen kann. Im andern Fall wollen wir die Arbeit eben als Kurvenintegral ausrechnen.

DEFINITION 18. *Unter einem Weg versteht man eine Kurvenbahn mit Orientierung (Durchlaufungs-sinn), welche parametrisiert werden kann durch eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$\begin{aligned} |\vec{x}(t)| : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{x}(t). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen nunmehr Wege mit  $C$  usw.

DEFINITION 19. *Das Kurvenintegral (vom Arbeitsintegraltyp ist nunmehr definiert durch:*

$$\int_C \langle \vec{f}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle := \int_a^b \langle \vec{f}(\vec{x}(t)), \vec{x}'(t) \rangle dt,$$

wobei  $\vec{x}(t)$  irgendeine Parametrisierung des Weges ist. (Für die Existenz des Integrals wird vorausgesetzt, dass  $\vec{f}(\vec{x})$  auf der Bahn stetig ist und  $\vec{x}(t)$  stetig differenzierbar.)

**Bemerkung:** Diese Definition ist nur darum sinnvoll, weil sich für andere Parametrisierungen stets derselbe Integralwert auf der rechten Seite ergibt. Das liegt an der Kettenregel. Das Kurvenintegral ist also nicht von der Parametrisierung abhängig - man wird immer die einfachste mögliche wählen.

**Bemerkung:** Für Wege mit Ecken und einige Zwecke wird man eine Kurve mit  $C_1 + C_2 + \dots + C_n$  'stückeln', so dass man für die einzelnen Stücke gut Parametrisierungen angeben kann. Dann hat man natürlich

$$\int_{C_1 + \dots + C_n} \langle \vec{f}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle = \int_{C_1} \langle \vec{f}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle + \dots + \int_{C_n} \langle \vec{f}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle.$$

Es ist sehr wichtig, Unabhängigkeit von der Parametrisierung zu unterscheiden von Wegunabhängigkeit. Über diese sprechen wir jetzt. Wir nehmen ein Rechenbeispiel zum Anlass dafür:

**Beispiel:**  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $\vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ , dann haben wir mit  $C$  im Sinne der Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \int_C \langle \vec{f}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Das Beispiel zeigt einmal die notwendigen Schritte:

1.) Man bekommt von der Parametrisierung die Grenzen für das Integral.

2.) Man bildet  $\vec{f}(\vec{x}(t))$  (alle Komponenten müssen in  $t$  ausgedrückt sein!) und  $\vec{x}'(t)$ .

3.) Man rechnet im Integranden das Skalarprodukt aus und dann das verbleibende eindimensionale bestimmte Integral.

Das Beispiel zeigt aber auch die mögliche Wegabhängigkeit: Gehen wir dieselbe Kreisbahn vom selben Anfangs- und Endpunkt in umgekehrter Richtung, so bekommen wir  $-2\pi$  als Resultat. Oder: Gehen wir auf der Bahn des oberen Halbkreises von  $(1, 0)$  nach  $(-1, 0)$ , so bekommen wir  $\pi$ . Gehen wir aber von  $(1, 0)$  nach  $(-1, 0)$  auf der unteren Kreisbahn, so bekommen wir  $-\pi$ .

Unter welcher Bedingung an das Kraftfeld ist ein Arbeitsintegral stets wegunabhängig?

**DEFINITION 20.** *Unter einem Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  versteht man eine offene Menge, die mindestens eine  $n$ -dimensionale Kugel von einem Radius  $> 0$  enthält. (Ein Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  ist also eine offene Menge, welche mindestens eine Kreisfläche von einem Radius  $> 0$  enthält.) Eine offene Menge ist eine solche, welche mit jedem Punkt auch eine Kreisfläche enthält, die Radius  $> 0$  hat und diesen Punkt enthält.*

**Beispiel:** Die Punktmenge  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| < 5\}$  ist ein Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Der ganze  $\mathbb{R}^n$  ist auch ein Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ .

**SATZ 25.** *Wenn das Feld  $\vec{f}(\vec{x})$  auf dem Gebiet  $G$  ein Gradientenfeld ist, also auf  $G$  ein Potential  $\varphi(\vec{x})$  (Skalarfeld!) existiert mit*

$$\text{grad } \varphi(\vec{x}) = -\vec{f}(\vec{x}), \text{ dann}$$

*gilt für jeden Weg  $C(A, B)$  von  $A$  nach  $B$ , der in  $G$  verläuft:*

$$\int_{C(A, B)} \langle -\vec{f}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle = \varphi(\vec{x}_B) - \varphi(\vec{x}_A).$$

*Das Integral hängt also nur von den Endpunkten und nicht vom Weg dazwischen ab. Es folgt, dass alle Integrale über geschlossene Kurven verschwinden.*

**Beweis:** Man hat mit der Kettenregel des Differenzierens:

$$\begin{aligned} \int_a^b \text{grad } \varphi(\vec{x}(t)) \vec{x}'(t) dt &= \int_a^b \frac{d}{dt} (\varphi(\vec{x}(t))) dt = \varphi(\vec{x}(b)) - (\varphi(\vec{x}(a))) \\ &= \varphi(\vec{x}_B) - \varphi(\vec{x}_A). \end{aligned}$$

Insbesondere kommt Null heraus für  $A = B$ . ■

Wie kann es nun passieren, dass ein Feld  $\vec{f}$  kein Potential besitzt?

**LEMMA 6.** *Wenn  $\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$  stetig differenzierbar ist und ein Potential*

*besitzt auf einem Gebiet, dann gilt dort*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, \dots, x_n) \text{ für alle Paare } i, j.$$

*(Diese Bedingung nennt man auch 'Integrabilitätsbedingung'.)*

**Beweis:** Denn mit einem Potential  $\varphi$  hat man:

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

also

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Nun ist  $\varphi$  nach Voraussetzung zwei mal stetig differenzierbar, also

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

und das bedeutet genau

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, \dots, x_n) \text{ für alle } i, j. \blacksquare$$

Es sei bemerkt: Die Bedingung ist natürlich nur interessant für  $i \neq j$ .

**Bemerkung:** Für  $n = 3$  bedeutet die Bedingung genau:

$$\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{f}}) = \vec{\mathbf{0}} \text{ (überall auf dem Gebiet).}$$

Denn man hat:

DEFINITION 21. Für  $\vec{\mathbf{f}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert man

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung:** Dieser Vektor hat die Bedeutung der lokalen Wirbelstärke, und so ist das Beispiel oben nicht ganz zufällig als Drehfeld gewählt, um mit einem geschlossenen Weg ein Arbeitsintegral zu produzieren, das nicht den Wert Null hat.

**Anwendungsbeispiel:**

$$\vec{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y + x \\ 2x^2 \end{pmatrix} \text{ hat } \operatorname{rot} \vec{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4x \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bereits

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(3y + x) &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial y}(2x - y) &= -1 \end{aligned}$$

widerspricht der Integrabilitätsbedingung (an jedem Punkt!) und zeigt, dass die Feld nirgends ein Potential besitzt. Es ist also nicht immer nötig,  $\operatorname{rot}$  voll auszurechnen. Außerdem klappt die Sache für Kurven in beliebigem  $\mathbb{R}^n$ .

Nun ist aber die interessante Frage, ob das Lemma umkehrbar ist, also  $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{0}}$  oder allgemeiner die Integrabilitätsbedingung bereits ausreicht, um die Existenz eines Potentials zu garantieren. Das ist nicht so, aber das hängt vom Gebiet ab, auf welchem diese Bedingung erfüllt ist:

DEFINITION 22. Ein Gebiet (das wir wie stets als offen voraussetzen) heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in diesem Gebiet sich im Gebiet selbst zu einem Punkt zusammenziehen lässt.

**Beispiele:**  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  sind einfach zusammenhängend, eine offene Kreisfläche im  $\mathbb{R}^2$  oder eine offene Kugel im  $\mathbb{R}^3$  sind es ebenso.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$  und  $\mathbb{R}^3$  ohne die  $z$ -Achse sind nicht einfach zusammenhängend! Nun hat man den Satz:

SATZ 26. Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G$  sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (i)  $\vec{\mathbf{f}}$  hat ein Potential auf  $G$  (ist also konservativ auf  $G$ )
- (ii)  $\vec{\mathbf{f}}$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung auf  $G$
- (iii) Alle geschlossenen Wegintegrale  $\oint_C \langle \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}), d\vec{\mathbf{x}} \rangle$  in  $G$  sind Null.

Was uns noch fehlt, ist eine praktische Methode, im positiven Falle auch zu gegebenem Feld  $\vec{\mathbf{f}}$  ein Potential auszurechnen:

SATZ 27. Wenn  $\vec{\mathbf{f}}$  die Integrabilitätsbedingung auf einem sternförmigen Gebiet (das ist ein solches, in dem von einem Punkt  $\vec{\mathbf{x}}_0$  aus alle anderen auf geradem Wege erreicht werden können), erfüllt, hat man folgendes Potential:

$$-\varphi(\vec{\mathbf{x}}) = \int_0^1 \langle \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{y}}_{\vec{\mathbf{x}}}(t)), \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_0 \rangle dt,$$

wobei

$$\vec{\mathbf{y}}_{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \vec{\mathbf{x}}_0 + t(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_0).$$

Aber wesentlich einfacher ist die folgende Berechnung eines Potentials, die für ein einfach zusammenhängendes Gebiet funktioniert, auf dem die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist:

$$1.) \text{ Bilde } -\varphi(x, y, z) = \int f_1(x, y, z) dx = G(x, y, z) + h(y, z),$$

$$2.) \text{ Bilde } \frac{\partial}{\partial y} (G(x, y, z) + h(y, z)) \text{ und setze das gleich } f_2(x, y, z),$$

$$\text{das ergibt eine Bedingung } \frac{\partial}{\partial y} h(y, z) = u(y, z), \text{ also } h(y, z) = \int u(y, z) dy = U(y, z) + K(z),$$

$$3.) \text{ Bilde } \frac{\partial}{\partial z} (G(x, y, z) + h(y, z) + U(y, z) + K(z)) \text{ und setze das gleich } f_3(x, y, z), \text{ ermittle damit } K(z).$$

$$4.) -\varphi(x, y, z) = G(x, y, z) + U(y, z) + K(z). \text{ (Eindeutig bis auf eine Konstante.)}$$

**Beispiel:**

$$\vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y + 2z^2y \\ 2zy^2 \end{pmatrix}.$$

Dann rechnet man nach, dass die Integrabilitätsbedingungen überall erfüllt sind, oder  $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$  konstant. Also sollte es nach dem Satz ein Potential geben, und wir rechnen es aus mit beiden Methoden:

**Anwendung der ersten Methode (nur um sie einmal zu illustrieren):** Wir wählen  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  und haben  $\vec{y}_{\vec{x}}(t) = t\vec{x}$ , damit also:

$$\begin{aligned} -\varphi(\vec{x}) &= \int_0^1 \langle \vec{f}(t\vec{x}), \vec{x} \rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2xt - yt \\ -xt + 2yt + 2t^3z^2y \\ 2t^3zy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 (2x^2t - 2xyt + 2y^2t + 4t^3z^2y^2) dt \\ &= x^2 - xy + y^2 + z^2y^2. \end{aligned}$$

Der Vorzug dieser Methode ist es, dass sie geeignet ist, die Existenz von Potentialen bei Erfüllung der Integrabilitätsbedingung in sternförmigen Gebieten zu zeigen, für konkrete Rechnungen ist sie meist unpraktischer.

**Mit der zweiten Methode (praktischer!)** (bei den Sternen werden die Bedingungen für die unbekannt Funktionen  $h(y, z)$  und  $k(z)$  formuliert):

$$\begin{aligned} \int (2x - y) dx &= 2x^2 - xy + h(y, z), \\ \frac{\partial}{\partial y} (2x^2 - xy + h(y, z)) &= -x + \frac{\partial}{\partial y} h(y, z) =^* -x + 2y + 2z^2y, \\ h(y, z) &= \int (2y + 2z^2y) dy = y^2 + y^2z^2 + k(z), \\ \frac{\partial}{\partial z} (2x^2 - xy + y^2 + y^2z^2 + k(z)) &= 2zy^2 + \frac{\partial}{\partial z} k(z) =^{**} 2zy^2. \end{aligned}$$

Setzt man nun  $k(z) = 0$ , so hat man wieder:

$$-\varphi(x, y, z) = 2x^2 - xy + y^2 + y^2z^2.$$

Man beachte: Dass die Bedingungen \* und \*\* erfüllbar sind, bedeutet im ersten Fall gerade:  $\frac{\partial}{\partial y} h(y, z)$  hängt nur von  $y, z$  ab, der Term  $-x$  wurde bereits korrekt. Bei \*\* geht es darum, dass das (in diesem Falle nicht vorhandene) fehlende Glied nur von  $z$  abhängen dürfte.

Man wird im einfacheren  $\mathbb{R}^2$ -Falle wohl die zweite Methode vorziehen, für  $n = 3$  kommt es ein wenig auf die beteiligten Funktionen an, meist wird auch die zweite Methode die einfachere sein. Oben

im Beispiel ist die erste durchaus geeignet, aber das lästige Aufsammeln der Terme wurde noch unterdrückt. Es sei natürlich auch bemerkt, dass man Potentiale auch mit einem Computeralgebraprogramm ausgerechnet bekommt.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass der dritte wichtige Differentialoperator im  $\mathbb{R}^3$  die Divergenz ist, ein Skalarfeld, welches die lokale Quellstärke eines Vektorfeldes wiedergibt. Es gibt dazu ein paar nützliche Formeln, die wir hier noch auflisten, für  $\mathbb{R}^3$ , dabei sind  $\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}$  Vektorfelder im  $\mathbb{R}^3$ ,  $u$  ein Skalarfeld im  $\mathbb{R}^3$ .

- 1.)  $grad, div, rot$  sind linear, also  $div(\alpha \vec{\mathbf{f}} + \beta \vec{\mathbf{g}}) = \alpha div(\vec{\mathbf{f}}) + \beta div(\vec{\mathbf{g}})$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , usw.,
- 2.)  $div \operatorname{rot} \vec{\mathbf{f}} = 0$ ,  $rot \operatorname{grad}(u) = \vec{\mathbf{0}}$
- 3.)  $grad(f(u(\vec{\mathbf{x}}))) = f'(u(\vec{\mathbf{x}})) grad u(\vec{\mathbf{x}})$
- 4.)  $rot(u \vec{\mathbf{f}}) = grad(u) \times \vec{\mathbf{f}} + u \operatorname{rot}(\vec{\mathbf{f}})$
- 5.)  $div(u \vec{\mathbf{f}}) = \langle grad(u), \vec{\mathbf{f}} \rangle + u div(\vec{\mathbf{f}})$
- 6.)  $div(\vec{\mathbf{f}} \times \vec{\mathbf{g}}) = \langle \vec{\mathbf{g}}, \operatorname{rot}(\vec{\mathbf{f}}) \rangle - \langle \vec{\mathbf{f}}, \operatorname{rot}(\vec{\mathbf{g}}) \rangle$
- 7.)  $div \operatorname{grad}(u) = \Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u$  (für  $u(x, y, z)$ )
- 8.)  $rot \operatorname{rot}(\vec{\mathbf{f}}) = grad \operatorname{div}(\vec{\mathbf{f}}) - \Delta \vec{\mathbf{f}}$  (Laplace-Operator komponentenweise)

Dazu kommen die Integralsätze von Stokes und Gauß, welche Zusammenhänge zwischen Integralen über Kurven, Flächen und Körper herstellen und große Bedeutung haben. Mehr dazu findet man z.B. bei Meyberg/Vachenauer, auch in meinem Skriptum zu Mathematik C für die Elektrotechniker.

### 3. Krümmung von Kurven

Offensichtlich ist ein Kreisbogen überall gleich 'krumm' und ein Kreisbogen mit kleinerem Radius krummer als einer mit größerem Radius. Daher sollte man die Krümmung eines Kreisbogens mit  $\frac{1}{R}$  messen, bei Radius  $R$ . Richtig kommt für eine Gerade im Limes Krümmung 0 heraus. Offenbar sind andere Kurven wie schon Ellipsen nicht überall gleich krumm, daher wird die Krümmung vom jeweiligen Punkt abhängen, wird also zu einer lokalen Angelegenheit. Aber wie soll man bei einer beliebigen parametrisierten Kurve die Krümmung messen?

**3.1. Grundidee zur allgemeinen Fassung von 'Krümmung' bei Kurven.** Wir setzen eine zwei mal differenzierbare *reguläre* Parametrisierung  $\vec{\mathbf{x}}$  einer Kurve voraus. Wir wissen, dass der Vektor

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) \text{ tangential zur Kurve im Punkt } \vec{\mathbf{x}}(t) \text{ liegt.}$$

Bei regulärer Parametrisierung ist er nicht Null. Es liegt nun nahe, die Krümmung als Änderungsrate des Tangentialvektors aufzufassen, also  $|\vec{\mathbf{x}}''(t)|$  dafür anzusetzen. Das klappt aber nicht so ganz, weil unterschiedliche Parametrisierungen dann in aller Regel zu unterschiedlichen Krümmungswerten führen. Die naheliegende Grundidee ergibt sich durch einen Vergleich mit einem Kreis: Wir legen einen Kreisbogen tangential an die Kurve im Punkt  $\vec{\mathbf{x}}(t)$ . Dessen Krümmung definieren wir dann als Krümmung der Kurve im Punkt  $\vec{\mathbf{x}}(t)$ . Für den Kreis ist nun charakteristisch, dass die Tangentialvektoren stets senkrecht auf den Radialvektoren sitzen, bei der üblichen Parametrisierung  $\vec{\mathbf{y}}(t)$  für den Kreisbogen heißt das:

$$\vec{\mathbf{y}}'(t) \perp \vec{\mathbf{y}}''(t).$$

Daher liegt es nahe, die Parametrisierung  $\vec{\mathbf{x}}$  der gegebenen Kurve so anzusetzen, dass diese Relation auch erfüllt ist. Ferner sollte es nicht auf die Längen der Tangentialvektoren ankommen, sondern nur auf die Änderung eines auf Länge 1 normierten Tangentialvektors pro zurückgelegte Weglänge auf der Kurve. Nun stellt man fest: Alle diese Bedürfnisse werden von der Bogenlängenparametrisierung erfüllt:

SATZ 28. Sei  $\vec{\mathbf{x}}(s)$  eine Bogenlängenparametrisierung der Kurve  $C$ . Dann hat man überall

$$\vec{\mathbf{x}}'(s) \perp \vec{\mathbf{x}}''(s).$$



(Das Resultat  $|\vec{x}'(s)| = 1$  ist schon bekannt.)

**Beweis:** Mit  $|\vec{x}'(s)| = 1$  gilt auch  $|\vec{x}'(s)|^2 = 1$ , also:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} |\vec{x}'(s)|^2 = \frac{d}{ds} \langle \vec{x}'(s), \vec{x}'(s) \rangle \\ &= \langle \vec{x}''(s), \vec{x}'(s) \rangle + \langle \vec{x}'(s), \vec{x}''(s) \rangle \\ &= 2 \langle \vec{x}''(s), \vec{x}'(s) \rangle, \text{ also} \\ \vec{x}'(s) &\perp \vec{x}''(s). \blacksquare \end{aligned}$$

Damit wird folgende Definition nahegelegt:

**DEFINITION 23** (absolute lokale Krümmung einer Kurve). *Eine mit Bogenlängenparametrisierung  $\vec{x}(s)$  gegebene Kurve hat im Punkt  $\vec{x}(s)$  die Krümmung*

$$\kappa(s) = |\vec{x}''(s)|.$$

**3.2. Ausdruck der Krümmung in beliebiger regulärer Parametrisierung.** Zunächst bilden wir mit regulärer Parametrisierung  $\vec{x}(t)$  einer Kurvenbahn  $C$  den Einheits-Tangentenvektor, um dessen Änderung pro Bogenlänge es geht:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)|}.$$

Das hat den Vorteil, dass bereits gilt:

$$\vec{T}(t) \perp \vec{T}'(t).$$

Demn

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \vec{T}(t), \vec{T}(t) \rangle = 2 \langle \vec{T}'(t), \vec{T}(t) \rangle.$$

Sei nun mit der Bogenlänge  $s$ :

$$s = \int_a^{L^{-1}(s)} |\vec{x}'(u)| du.$$

Dann hat man

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d}{ds} s = (L^{-1})'(s) |\vec{x}'(L^{-1}(s))|, \text{ also} \\ (L^{-1})'(s) &= \frac{1}{|\vec{x}'(L^{-1}(s))|}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\vec{y}(s) := \vec{x}(L^{-1}(s))$$

Parametrisierung nach der Bogenlänge, und wir haben

$$\vec{y}'(s) = \vec{x}'(L^{-1}(s)) (L^{-1})'(s) = \frac{\vec{x}'(L^{-1}(s))}{|\vec{x}'(L^{-1}(s))|} = \vec{T}(L^{-1}(s)),$$

also

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= |\vec{y}''(s)| = \left| \frac{d}{ds} \vec{T}(L^{-1}(s)) \right| = \left| \vec{T}'(L^{-1}(s)) (L^{-1})'(s) \right| \\ &= \frac{|\vec{T}'(L^{-1}(s))|}{|\vec{x}'(L^{-1}(s))|}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun wieder  $t$  für  $L^{-1}(s)$  ein, so ergibt sich der

**SATZ 29.** *Die (absolute) Krümmung einer regulären Kurve  $\vec{x}(t)$  an der Stelle  $t$  (also im Kurvenpunkt  $\vec{x}(t)$ ) ist*

$$\kappa_{\vec{x}}(t) = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{x}'(t)|}, \text{ mit } \vec{T}(t) = \frac{\vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)|}.$$

Aber es lässt sich die Krümmung noch ein wenig einfacher ausrechnen:

SATZ 30. Die **absolute** Krümmung einer regulären Kurve  $\vec{x}(t)$  an der Stelle  $t$  (also im Kurvenpunkt  $\vec{x}(t)$ ) ist

$$\kappa_{\vec{x}}(t) = \frac{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|}{|\vec{x}'(t)|^3} \text{ für Kurven im } \mathbb{R}^3,$$

$$\kappa_{\vec{x}}(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} = \frac{|\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t))|}{|\vec{x}'(t)|^3} \text{ für Kurven } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^2.$$

**Beweis:** Zur ersten Formel hat man:

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) &= |\vec{x}'(t)| \vec{T}(t) \times \left( \vec{T}(t) \frac{d}{dt} |\vec{x}'(t)| + |\vec{x}'(t)| \vec{T}'(t) \right) \\ &= |\vec{x}'(t)| \vec{T}(t) \times |\vec{x}'(t)| \vec{T}'(t) \text{ (wegen } \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}) \\ &= |\vec{x}'(t)|^2 \left( \vec{T}(t) \times \vec{T}'(t) \right), \text{ also} \\ |\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)| &= |\vec{x}'(t)|^2 |\vec{T}'(t)|, \text{ weil } \vec{T}(t) \perp \vec{T}'(t) \text{ und } |\vec{T}(t)| = 1. \end{aligned}$$

Nun mit dem vorigen Satz:

$$\kappa_{\vec{x}}(t) = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{x}'(t)|} = \frac{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|}{|\vec{x}'(t)|^3}.$$

Damit ist auch die zweite Formel sofort begründet: Wir legen eine Kurve im  $\mathbb{R}^2$  auf die  $xy$ -Ebene des  $\mathbb{R}^3$ , indem wir eine dritte Komponente Null anfügen. Dann ergibt Anwendung der ersten Formel sofort das Resultat, da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ad - bc \end{pmatrix}, \text{ der Betrag ist also} \\ |ad - bc| &= \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Die Krümmungsformel für den ebenen Fall hat auch ohne Betragsbildung im Zähler eine Bedeutung, das Vorzeichen gibt an, ob es sich um eine Linkskurve oder Rechtskurve handelt:

DEFINITION 24. Die Krümmung einer Kurve  $\vec{x}(t)$  im  $\mathbb{R}^2$  **mit Vorzeichen** an der Stelle  $t$  ist:

$$\kappa_{\vec{x}}^{\text{sign}}(t) = \frac{\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t))}{|\vec{x}'(t)|^3}.$$

Dafür gilt:

FOLGERUNG 4. Die Krümmung mit Vorzeichen hat die Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \kappa_{\vec{x}}^{\text{sign}}(t) > 0 &\iff \text{die Kurve ist im Punkt } \vec{x}(t) \text{ eine Linkskurve,} \\ \kappa_{\vec{x}}^{\text{sign}}(t) < 0 &\iff \text{die Kurve ist im Punkt } \vec{x}(t) \text{ eine Rechtskurve.} \end{aligned}$$

**Begründung:**  $\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t)) > 0$  bedeutet mit geometrischer Deutung der Determinante, dass das System  $(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t))$  ebenso orientiert ist wie das System  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , also der Beschleunigungsvektor nach links abdreht vom Geschwindigkeitsvektor.

**3.3. Das begleitende Zweibein für Kurven im  $\mathbb{R}^2$ .** Wir betrachten eine Kurve  $\vec{x}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ . Dann haben wir den normierten Tangentialvektor

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)|}.$$

Wir haben oben gesehen, dass  $\vec{T}' \perp \vec{T}$ , und damit ist (im  $\mathbb{R}^2$  (!)) eine Normalenrichtung zu  $\vec{T}$  eindeutig bestimmt. Man wählt den Normalenvektor  $\vec{n}$  normiert so, dass  $(\vec{T}(t), \vec{n}(t))$  ein Rechtssystem bildet.

Das heißt:  $\vec{\mathbf{n}}(t)$  entsteht aus  $\vec{\mathbf{T}}(t)$  durch Drehung mit dem Winkel  $\pi/2$  entgegen dem Uhrzeigersinn, deren Matrix lautet:

$$D_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Es folgt:

$$\vec{\mathbf{n}}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{\mathbf{x}}'(t)|} \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = D_{\pi/2} \vec{\mathbf{T}}(t).$$

DEFINITION 25. *Vorausgesetzt wird  $\vec{\mathbf{x}}'(t) \neq 0$ . Das System  $(\vec{\mathbf{T}}(t), \vec{\mathbf{n}}(t))$  heißt dann begleitendes Zweibein der Kurve  $\vec{\mathbf{x}}$  an der Stelle  $t$ .*

Dazu beobachten wir:

$$(1) \quad \vec{\mathbf{T}}'(t) = |\vec{\mathbf{x}}'(t)| \kappa_{\text{sign}}(t) \vec{\mathbf{n}}(t).$$

Denn  $\vec{\mathbf{T}}'$  ist ein Vielfaches von  $\vec{\mathbf{n}}$ , weil  $\vec{\mathbf{T}}' \perp \vec{\mathbf{T}}$ . Der Betrag ist richtig, weil  $\frac{|\vec{\mathbf{T}}'(t)|}{|\vec{\mathbf{x}}'(t)|} = |\kappa_{\text{sign}}(t)|$  und  $|\vec{\mathbf{n}}(t)| = 1$ . Das Vorzeichen ist auch richtig, weil der Vektor  $\vec{\mathbf{T}}'$  in einer Linkskurve in Richtung von  $\vec{\mathbf{n}}$  zeigt, in einer Rechtskurve entgegengesetzt.

Wir beobachten weiter:

$$\begin{aligned} (2) \quad \vec{\mathbf{n}}'(t) &= \left( D_{\pi/2} \vec{\mathbf{T}}(t) \right)' = D_{\pi/2} \vec{\mathbf{T}}'(t) = |\vec{\mathbf{x}}'(t)| \kappa_{\text{sign}}(t) D_{\pi/2} \vec{\mathbf{n}}(t) \\ &= |\vec{\mathbf{x}}'(t)| \kappa_{\text{sign}}(t) D_{\pi/2} D_{\pi/2} \vec{\mathbf{T}}(t) \\ &= -|\vec{\mathbf{x}}'(t)| \kappa_{\text{sign}}(t) \vec{\mathbf{T}}(t). \end{aligned}$$

Das ergibt ein lineares Differentialgleichungssystem für  $\vec{\mathbf{T}}(t)$  und  $\vec{\mathbf{n}}(t)$ , allerdings mit nichtkonstanten Koeffizienten. Für die Parametrisierung nach Bogenlänge nimmt es offenbar eine besonders einfache Form an, weil dann der lästige Faktor  $|\vec{\mathbf{x}}'(t)|$  entfällt:

SATZ 31 (Frenetsche Formeln für das Zweibein von nach Bogenlänge parametrisierten Kurven im  $\mathbb{R}^2$ ). *Es sei  $\vec{\mathbf{x}}(s)$  eine Parametrisierung einer Kurve im  $\mathbb{R}^2$  nach Bogenlänge. Dann hat man mit (1) und (2) oben:*

$$(1') \quad \frac{d}{ds} \vec{\mathbf{T}}(s) = \vec{\mathbf{T}}'(s) = 0 \cdot \vec{\mathbf{T}}(s) + \kappa_{\text{sign}}(s) \vec{\mathbf{n}}(s)$$

$$(2') \quad \frac{d}{ds} \vec{\mathbf{n}}(s) = \vec{\mathbf{n}}'(s) = -\kappa_{\text{sign}}(s) \vec{\mathbf{T}}(s) + 0 \cdot \vec{\mathbf{n}}(s), \text{ was man zusammengefasst auch so schreibt:}$$

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{T}}(s) \\ \vec{\mathbf{n}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_{\text{sign}}(s) \\ -\kappa_{\text{sign}}(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{T}}(s) \\ \vec{\mathbf{n}}(s) \end{pmatrix}$$

### 3.4. Beispiele zur Krümmungsberechnung.

3.4.1. *Krümmung einer Ellipse.* Seien  $a, b > 0$  die Halbachsen. Dann hat man mit  $x(t) = a \cos(t)$  und  $y(t) = b \sin(t)$ :

$$\kappa_{\text{sign}}(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}(t) = \frac{ab \sin^2(t) + ab \cos^2(t)}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}.$$

Man sieht die Linkskurve, welche mit der Parametrisierung vorgegeben wird, am positiven Vorzeichen. Speziell für den Kreis vom Radius  $R$  (also  $ab = R^2$ ) bekommt man damit:  $\kappa(t) = R^2/R^3 = 1/R$ . Für  $a \neq b$  sieht man auch die Stellen extremer Krümmung auf den Achsen.

3.4.2. *Krümmung einer Schraubenlinie.* Für  $r > 0$  und  $\alpha > 0$  hat man die Parametrisierung einer solchen Schraubenlinie:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ \alpha t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) &= \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cos(t) \\ -r \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \alpha \sin t \\ -\alpha \cos t \\ r \end{pmatrix}, \text{ also} \\ |\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)| &= r\sqrt{\alpha^2 + r^2}.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$|\vec{x}'(t)| = \sqrt{r^2 + \alpha^2},$$

insgesamt also die absolute Krümmung:

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|}{|\vec{x}'(t)|^3} = \frac{r}{r^2 + \alpha^2}.$$

#### 4. Begleitende Dreibeine und Torsion bei Raumkurven

Man stelle sich vor, auf einer wilden Achterbahn zu fahren. Der Schwerpunkt des Fahrenden beschreibt dann eine Raumkurve  $\vec{x}(t)$ . Vorwärts geht es zu einem Zeitpunkt in Richtung des Tangentialvektors

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)|},$$

wir setzen wieder die Kurve als regulär voraus, also  $|\vec{x}'(t)| \neq 0$ . Der rechte oder der linke Arm des Fahrenden zeigt in Richtung des Hauptnormalenvektors, je nach dem, wie der Beschleunigungsvektor zeigt. Wir bilden dazu wieder den entsprechenden Einheitsvektor, also - wir haben bereits gesehen, dass  $\vec{T}'$  senkrecht auf  $\vec{T}$  steht:

$$(1) \quad \vec{N}(t) := \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}. \text{ (Hauptnormalenvektor)}$$

Solange wir in einer Ebene verbleiben, bildet  $(\vec{T}, \vec{N})$  das begleitende Zweibein der Kurve, und diese wird im Wesentlichen durch ihre Krümmung beschrieben. Aber auf der Achterbahn ist gerade der Witz, dass die von  $\vec{T}$  und  $\vec{N}$  beschriebene Schmiegeebene wild taumelt. Dazu gehört nun eine neue Beschreibungsgröße, die man 'Torsion' nennt. Diese gibt an, wie sich der Binormalenvektor (angegeben vom Rumpf des Achterbahnfahrers, allerdings nur bis auf Vorzeichen) ändert. Dieser Vektor ist

$$(2) \quad \vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \text{ (Binormalenvektor)}.$$

Das ist wieder ein Einheitsvektor. Damit wird die Fahrt gut beschrieben durch das 'begleitende Dreibein'  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ .

**Bemerkung:** Man beachte: Der Hauptnormalenvektor  $\vec{N}(t)$  ist hier wieder senkrecht zu  $\vec{T}(t)$ , aber so, dass er stets eine positive Komponente in Richtung von  $\vec{x}''(t)$  besitzt. Das ist anders als bei  $\vec{n}$  im  $\mathbb{R}^2$ , darum wird  $\vec{N}$  zur Unterscheidung 'Hauptnormalenvektor' genannt. Daher hat man mit (1):

$$\begin{aligned}\vec{T}'(t) &= |\vec{x}'(t)| \kappa^{\vec{x}}(t) \vec{N}(t), \text{ wobei } \kappa^{\vec{x}}(t) \text{ die absolute Krümmung ist, also} \\ \kappa^{\vec{x}}(t) &= \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{x}'(t)|} \left( = \frac{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|}{|\vec{x}'(t)|^3} \text{ im } \mathbb{R}^3 \right).\end{aligned}$$

Nun hatten wir oben gesehen, dass

$$\vec{T}'(t) \perp \vec{T}(t),$$

ferner ist auch

$$\vec{T}'(t) \perp \vec{B}(t).$$

DEFINITION 26 (und Bemerkung). Zu einer regulären Kurve  $\vec{x}(t)$ , die zwei mal differenzierbar ist und deren Krümmung nirgends Null ist, hat man das begleitende Dreibein

$$\begin{aligned} & \left( \vec{T}, \vec{N}, \vec{B} \right), \text{ mit} \\ \vec{T}(t) &= \frac{\vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)|} \text{ (Einheits-Tangentialvektor),} \\ \vec{B}(t) &= \frac{\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)}{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|} \text{ (Binormalenvektor),} \\ \vec{N}(t) &= \vec{B}(t) \times \vec{T}(t). \end{aligned}$$

(Dies ist die praktische Reihenfolge, das begleitende Dreibein auszurechnen bei gegebener Parametrisierung.)

**Begründung:** Wenn die Krümmung nirgends Null ist, so ist der Vektor  $\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \neq \vec{0}$ , also bilden die Vektoren  $\vec{x}'(t)$ ,  $\vec{x}''(t)$  dieselbe Ebene wie  $\vec{T}(t)$  und  $\vec{N}(t)$ . Ferner ist haben die Systeme  $(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t))$  und  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  dieselbe Orientierung, zusammen ergibt das die angegebene Berechnungsformel für  $\vec{B}$ . Entsprechend ist dann  $\vec{N}$  aus  $\vec{B}$  und  $\vec{T}$  zu berechnen. ■

Wie angekündigt soll die Torsion beschreiben, wie sich der Binormalenvektor ändert. Hier geht es wiederum wie schon bei der Krümmung um die Änderungsrate pro Bogenlängenänderung, also genauer um den Vektor

$$\frac{1}{|\vec{x}'(t)|} \vec{B}'(t).$$

Nun ist  $\vec{B}'(t)$  aber ein Vektor. Wieso kann man diese Änderung mit einer Zahl  $\tau(t)$  beschreiben? Folgendes Lemma klärt das auf:  $\vec{B}'(t)$  ist parallel zu  $\vec{N}(t)$ , also  $\frac{1}{|\vec{x}'(t)|} \vec{B}'(t) = \alpha(t) \vec{N}(t)$  mit einer Zahl  $\alpha(t)$ . Daher beschreibt diese Zahl, wie stark sich der Binormalenvektor pro Bogenlänge ändert, da  $\vec{N}(t)$  bereits normiert ist. Man setzt dann  $\tau(t) := -\alpha(t)$ . (Vorzeichenkonvention, eine Linksschraube bekommt dann positive Torsion).

LEMMA 7. Man hat

$$\vec{B}'(t) \perp \vec{T}(t), \vec{B}(t), \text{ also } \vec{B}'(t) \parallel \vec{N}(t).$$

**Beweis:** Mit  $|\vec{B}(t)| = 1$  hat man:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \vec{B}(t), \vec{B}(t) \rangle = 2 \langle \vec{B}'(t), \vec{B}(t) \rangle, \text{ also } \vec{B}'(t) \perp \vec{B}(t).$$

Außerdem

$$\vec{B}'(t) = \frac{d}{dt} (\vec{T}(t) \times \vec{N}(t)) = \vec{T}'(t) \times \vec{N}(t) + \vec{T}(t) \times \vec{N}'(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}'(t),$$

da  $\vec{T}'(t) \times \vec{N}(t) = \vec{0}$  ( $\vec{T}'$  ist parallel zu  $\vec{N}$ .) Also auch  $\vec{B}'(t) \perp \vec{T}(t)$ . ■

Damit ist folgende Definition gerechtfertigt:

DEFINITION 27 (Torsion einer Raumkurve). Wir setzen die Kurve  $\vec{x}(t)$  als regulär mit nirgends verschwindender Krümmung und drei mal differenzierbar voraus. Dann ist die Torsion  $\tau^{\vec{x}}(t)$  definiert durch die Gleichung:

$$\frac{1}{|\vec{x}'(t)|} \vec{B}'(t) = -\tau^{\vec{x}}(t) \vec{N}(t).$$

(Bei Parametrisierung über Bogenlänge hat man die einfachere Beziehung  $\vec{B}'(s) = -\tau(s) \vec{N}(s)$ .)

**Bemerkung:** Dreimalige Differenzierbarkeit der Kurve benötigt man, da  $\vec{B}$  bereits die 2. Ableitung enthält.

Wir brauchen noch eine Berechnungsformel für  $\tau^{\vec{x}}(t)$ , die praktischer ist als die definierende Gleichung (welche ihrerseits den Sinn der Torsion klarstellt):

SATZ 32. Unter den vorigen Voraussetzungen an die Kurve  $\vec{x}(t)$  hat man:

$$\tau_{\vec{x}}(t) = \frac{\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t))}{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|^2}.$$

**Beweis:** Wir haben  $\tau_{\vec{x}}(t)$  definiert durch die Gleichung

$$\frac{\vec{B}'(t)}{|\vec{x}'(t)|} = -\tau_{\vec{x}}(t) \vec{N}(t).$$

Also bilden wir

$$\begin{aligned} -\tau_{\vec{x}}(t) |\vec{x}'(t)| &= \langle \vec{B}'(t), \vec{N}(t) \rangle = \langle \vec{B}'(t), \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)}{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|}, \frac{\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)}{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|} \times \frac{\vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)|} \right\rangle. \end{aligned}$$

Wir lassen nunmehr der Übersichtlichkeit halber alle 'von -  $t$ '-Klammern weg und bekommen - dabei benutzen wir die Ableitungsformel  $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{C}) = \vec{A}' \times \vec{C} + \vec{A} \times \vec{C}'$  sowie Produktregel, ferner  $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$ , ferner die Bilinearität von Skalarprodukt und Vektorprodukt, schließlich an der Stelle =\*die Vektoridentität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} :$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{B}', \vec{N} \rangle &= \left\langle \left( \frac{d}{dt} \frac{1}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|} \right) \vec{x}' \times \vec{x}'' + \frac{1}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|} (\vec{x}'' \times \vec{x}''' + \vec{x}' \times \vec{x}''''), \frac{\vec{x}' \times \vec{x}''}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|} \times \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|} (\vec{x}' \times \vec{x}'''), \frac{\vec{x}' \times \vec{x}''}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|} \times \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|} \right\rangle \\ &= * \frac{1}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|^2 |\vec{x}'|} \langle \vec{x}' \times \vec{x}''', -\langle \vec{x}', \vec{x}'' \rangle \vec{x}' + \langle \vec{x}', \vec{x}' \rangle \vec{x}'' \rangle \\ &= \frac{1}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|^2 |\vec{x}'|} \langle \vec{x}' \times \vec{x}''', \langle \vec{x}', \vec{x}' \rangle \vec{x}'' \rangle \\ &= -\frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|^2} \det(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}'''). \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\tau_{\vec{x}}(t) = \frac{\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t))}{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|^2}. \blacksquare$$

**Bemerkung:** Auch für eine Raumkurven deren Bahn in einer Ebene verbleibt, ist der Ausdruck sinnvoll. Aber der Zähler wird dann stets Null.

**4.1. Die Frenetschen Formeln für Kurven im  $\mathbb{R}^3$ .** Diese lauten (wir verzichten auf einen Beweis der zweiten Formel): Wenn  $\vec{x}(s)$  eine Kurve in Bogenlänge parametrisiert und  $\vec{x}''''$  existiert, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{T}'(s) &= \kappa_{\vec{x}}(s) \vec{N}(s), \\ \vec{N}'(s) &= -\kappa_{\vec{x}}(s) \vec{T}(s) + \tau_{\vec{x}}(s) \vec{B}(s) \\ \vec{B}'(s) &= -\tau_{\vec{x}}(s) \vec{N}(s) \end{aligned}$$

oder kurz

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}.$$

**4.2. Anwendungsbeispiel: Das begleitende Dreibein zu einer Schraubenkurve.** Wir berechnen zur Schraubenkurve ( $r, \alpha > 0$  fest)

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ \alpha t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

das begleitende Dreibein und die Torsion: Mit

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) \times \vec{\mathbf{x}}''(t) = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cos(t) \\ -r \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r \sin t \\ -\alpha r \cos t \\ r^2 \end{pmatrix}$$

haben wir

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{T}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}} \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ \alpha \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{B}}(t) &= \frac{1}{r\sqrt{\alpha^2 + r^2}} \begin{pmatrix} \alpha r \sin t \\ -\alpha r \cos t \\ r^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}} \begin{pmatrix} \alpha \sin t \\ -\alpha \cos t \\ r \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{N}}(t) &= \vec{\mathbf{B}}(t) \times \vec{\mathbf{T}}(t) = \frac{1}{\alpha^2 + r^2} \begin{pmatrix} \alpha \sin t \\ -\alpha \cos t \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir wollen in diesem Falle konkret verifizieren, dass  $\vec{\mathbf{B}}'$  parallel ist zu  $\vec{\mathbf{N}}$  und damit direkt die Torsion bestimmen:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}}'(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}} \begin{pmatrix} \alpha \sin t \\ -\alpha \cos t \\ r \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}} \begin{pmatrix} \alpha \cos t \\ \alpha \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}} \vec{\mathbf{N}}(t). \text{ Also} \\ \tau(t) &= \frac{1}{|\vec{\mathbf{x}}'(t)|} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + r^2} \sqrt{\alpha^2 + r^2}} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + r^2} \text{ (konstant)}. \end{aligned}$$

Wir berechnen erneut noch einmal die Torsion über die unmittelbare Berechnungsformel: Wir haben

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}'''(t) &= \begin{pmatrix} r \sin(t) \\ -r \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also} \\ \tau(t) &= \frac{\det(\vec{\mathbf{x}}'(t), \vec{\mathbf{x}}''(t), \vec{\mathbf{x}}'''(t))}{|\vec{\mathbf{x}}'(t) \times \vec{\mathbf{x}}''(t)|^2} \\ &= \frac{1}{|\vec{\mathbf{x}}'(t) \times \vec{\mathbf{x}}''(t)|^2} \det \begin{pmatrix} -r \sin(t) & -r \cos(t) & r \sin(t) \\ r \cos(t) & -r \sin(t) & -r \cos(t) \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\alpha}{r^2(\alpha^2 + r^2)} \det \begin{pmatrix} -r \cos(t) & r \sin(t) \\ -r \sin(t) & -r \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Man beachte auch, dass es vielfach praktisch ist,

$$\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)) = \langle \vec{x}'''(t), \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \rangle$$

zu benutzen, weil man schon für andere Zwecke  $\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)$  berechnet hat, in unserem Beispiel also:

$$\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)) = \left\langle \begin{pmatrix} r \sin(t) \\ -r \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha r \sin t \\ -\alpha r \cos t \\ r^2 \end{pmatrix} \right\rangle = r^2 \alpha.$$

## 5. Evoluten und Evolventen von Kurven im $\mathbb{R}^2$

Wir setzen wieder eine Kurve mit zwei mal differenzierbarer regulärer Parametrisierung voraus. Wir haben zu einer Kurve im  $\mathbb{R}^2$  an jeder Stelle die lokale Krümmung gebildet. Die Idee dazu war es, in jedem Punkt der Kurve einen Kreis tangential an die Kurve zu legen, der heißt *Schmiegekreis*, dessen Krümmung dann die lokale Krümmung der Kurve angab. Nun haben wir zu jedem Kurvenpunkt auch den Mittelpunkt des zugehörigen Schmiegekreises. Die Mittelpunkte der Schmiegekreise ergeben mit laufendem Kurvenpunkt eine zweite Kurve, und das ist die Evolute der Kurve.

**DEFINITION 28** (und Satz). *Eine glatte Kurve  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  hat als ihre Evolute die Kurve der Mittelpunkte ihrer Krümmungs- oder Schmiegekreise. Man erhält folgende Parametrisierung der Evolute bei  $\kappa_{\text{sign}}^{\vec{x}}(t) \neq 0$ :*

$$\vec{y}(t) = \vec{x}(t) + \frac{1}{\kappa_{\text{sign}}^{\vec{x}}(t)} \vec{n}^{\vec{x}}(t).$$

Dabei ist

$$\vec{n}^{\vec{x}}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

der Einheitsnormalenvektor zur Kurve, welcher vom Tangentialvektor  $\vec{x}'(t)$  entgegen dem Uhrzeigersinn um  $\pi/2$  gedreht ist (um den Ursprung). Als praktischere Endformel für  $\vec{y}(t)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \vec{x}(t) + \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \\ &= \vec{x}(t) + \frac{|\vec{x}'(t)|^2}{\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t))} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zur **Begründung** brauchen wir nur einzusehen, dass in einer Linkskurve  $\kappa_{\text{sign}}(t) > 0$  ist und daher der Faktor bei  $\vec{n}(t)$  das richtige Vorzeichen hat. Ebenso stimmt das Vorzeichen für eine Rechtskurve.

### 5.1. Beispiele für Evoluten: 1.) Für die Parabel

$$\vec{x}(t) = (t, t^2), t \in \mathbb{R},$$

haben wir:

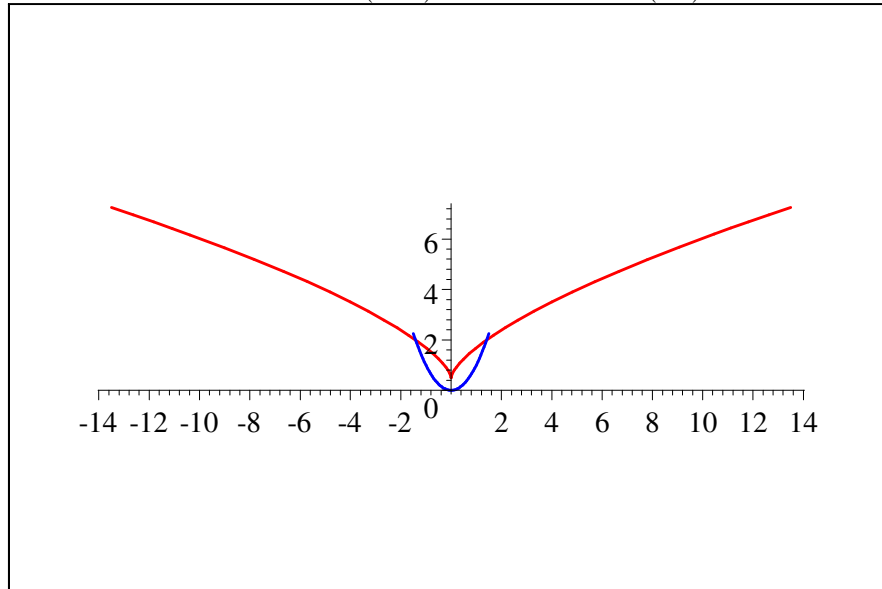
$$x(t) = t, y(t) = t^2,$$

also direkt mit der Endformel die folgende Parametrisierung der Evolute:

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + \frac{1+4t^2}{2} \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4t^3 \\ \frac{1}{2} + 3t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Hier zeichnen wir in einem Bild die Parabel (blau) und ihre Evolute (rot):



Es ist dabei zu sehen, dass die Parabel sehr schnell ziemlich gerade wird und die Mittelpunkte der Krümmungskreise daher schnell in die Ferne laufen. Gezeichnet sind beide Kurven nur im Bereich  $-1.5 \leq t \leq 1.5$ . Der rechte Teil der Evolute gehört zum linken Teil der Parabel. Die Evolute hat eine Spitze bei  $t = 0$ . Man nennt sie 'Neilsche Parabel'.

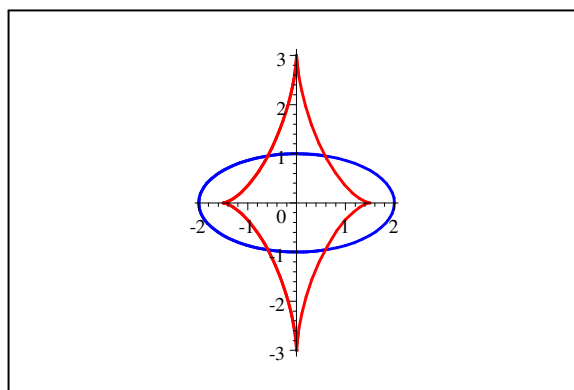
2.) Für die Ellipse

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

bekommen wir die folgende Parametrisierung für die Evolute:

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{4 \sin^2(t) + \cos^2(t)}{2} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -2 \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) (2 - 2 \sin^2(t) - \frac{1}{2} \cos^2(t)) \\ \sin(t) (1 - 4 \sin^2(t) - \cos^2(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier sind die Ellipse (blau) und ihre Evolute (rot) gezeichnet:



Man sieht deutlich die Punkte der Ellipse, in welchen die Krümmung maximal / minimal ist, und die zugehörigen Punkte auf der Evolute.

3.) Die Evolute der speziellen oben beschriebenen Zykloiden

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} Rt - R \sin(t) \\ R - R \cos(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix},$$

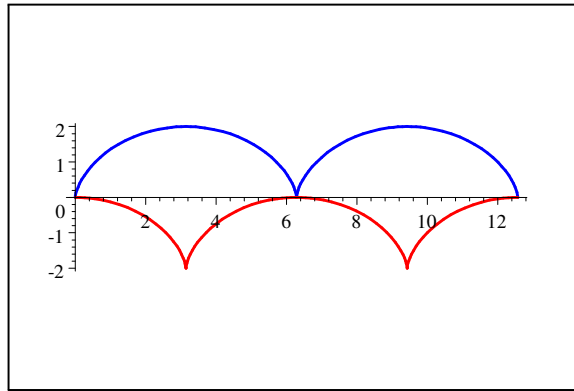
dann hat man

$$\begin{aligned} \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} &= \frac{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)}{(1 - \cos(t))\cos(t) - \sin^2(t)} \\ &= \frac{2 - 2\cos(t)}{\cos(t) - 1} = -2, \text{ also} \end{aligned}$$

ist die Evolute parametrisiert mit

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= R \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} + \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \\ &= R \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2 + 2\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= R \begin{pmatrix} t + \sin t \\ -1 + \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zeichnen wir Kurve (wieder blau) und Evolute (wieder rot) auf für  $R = 1$ , für den Parameterbereich  $[0, 2\pi]$  - alles geht periodisch so fort:



Es fällt sofort auf, dass sie gleich aussehen, die Evolute aus der Zykloiden entsteht durch Verschieben mit dem Vektor  $(\pi, -2)$ . Das können wir auch nachrechnen, wir haben

$$\begin{aligned} \vec{x}(t - \pi) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t - \pi - \sin(t - \pi) \\ -1 - \cos(t - \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \pi + \sin(t) \\ -1 + \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{y}(t). \end{aligned}$$

Also

$$\vec{y}(t) = \vec{x}(t - \pi) + \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**5.2. Evolventen.** Die Bildung der Evolventen (auch 'Involute' genannt) aus einer Kurve  $\vec{y}(t)$  ist genau der umgekehrte Prozess: Gesucht ist eine Kurve  $\vec{x}(t)$ , deren Krümmungsmittelpunkte die Bahn von  $\vec{y}(t)$  darstellen. Wir haben gesehen, dass die Evolventen von Zykloiden wieder solche sind. Gewisse Evolventen haben aber auch eine interessante weitere geometrische Deutung, worauf ihr Name anspielt: Es sind 'Abwickelkurven': Man stelle sich ein endliches Kurvenbahnstück vor, auf dem ein Faden genau anliegt ('festgeklebt'). Dann reißt man den Faden (vorsichtig) an einem Ende so ab, dass das bereits abgenommene Stück stets straff gespannt ist. Die Bahn, welche vom gefassten Ende dabei beschrieben wird, ist eine Evolvente der ursprünglichen Bahn.

Man kann geometrisch leicht einsehen, dass zu einer gegebenen Kurve  $\vec{x}$  keine eindeutige Evolvente  $\vec{y}$  existiert, in dem Sinne, dass der Krümmungsmittelpunkt des Punktes  $\vec{y}(t)$  genau der Punkt  $\vec{x}(t)$  ist: Zu einer solchen Bahn von  $\vec{y}$  könnte man etwa weiter außen eine parallele Bahn bilden, deren Krümmungsmittelpunkte wiederum die  $\vec{x}(t)$  sind. Alle diese sind Evoluten im Sinne der Umkehrung des Prozesses der Evolventenbildung. Man hat den Satz:

SATZ 33 (Parametrisierung einer Evolventen zu einer gegebenen Kurve). Wenn eine Kurve  $\vec{x}(s)$  in Bogenlängenparametrisierung gegeben ist,  $0 \leq s \leq \tau$ , dann ist die Kurve

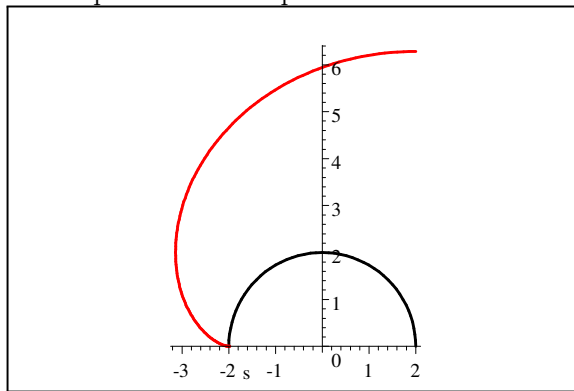
$$\vec{y}(s) = \vec{x}(s) + (\tau - s) \vec{x}'(s) \text{ eine Evolvente von } \vec{x}, \text{ im Bereich } 0 \leq s \leq \tau.$$

Ferner ist diese Kurve (allerdings in umgekehrtem Durchlaufsinne) auch als 'Abwickelkurve' der Kurve  $\vec{x}$  in diesem Bereich zu verstehen, die Abwicklung startet bei  $\vec{x}(\tau) = \vec{y}(\tau)$  und endet bei  $\vec{y}(0)$  (Der Abstand zwischen  $\vec{y}(s)$  und  $\vec{x}(s)$  steigt an mit fallendem Wert von  $s$  bis zum Abstand  $\tau$  bei  $s = 0$ ).

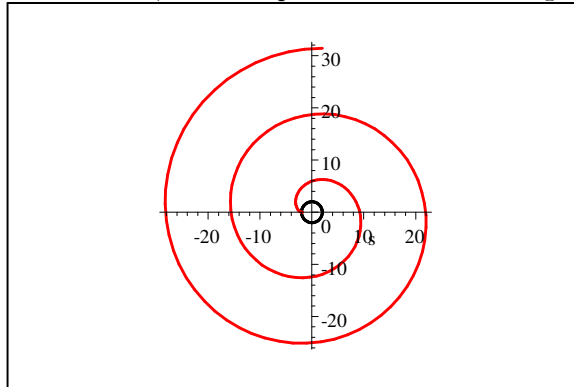
**Bemerkung:** Wegen der Parametrisierung nach Bogenlänge ist  $\vec{x}'(s) = \vec{T}^{\vec{x}}(s)$ . Man beachte jedoch, dass  $\vec{y}(s)$  keine Bogenlängenparametrisierung der Evolvente ist.

**Zum Beweis:**  $\vec{y}'(s) = \vec{x}'(s) - \vec{x}'(s) + (\tau - s) \vec{x}''(s)$ . Also ist  $\vec{y}'(s)$  parallel zu  $\vec{x}''(s)$  und damit parallel zu  $\vec{n}^{\vec{x}}(s)$ , weil  $\vec{x}''(s) = \left(\vec{T}^{\vec{x}}\right)'(s) = \kappa_{\text{sign}}^{\vec{x}}(s) \cdot \vec{n}^{\vec{x}}(s)$ . Es folgt, dass  $\vec{x}(s) - \vec{y}(s)$  parallel zu  $\vec{n}^{\vec{y}}(s)$  ist (oberer Index  $\vec{y}$  (!)), weil  $\vec{x}'(s)$  senkrecht zu  $\vec{x}''(s)$  steht und damit senkrecht zu  $\vec{y}'(s)$ . Wir verzichten darauf, zu zeigen, dass tatsächlich  $\tau - s$  auch der Krümmungsradius des Schmiegekreises an die Bahn von  $\vec{y}$  im Punkt  $\vec{y}(s)$  ist.

**Beispiel:** Wir zeigen eine Kreisevolvente - der Kreis hat Radius 2 und musste auf Bogenlänge umparametrisiert werden, was in komplizierteren Beispielen nur numerisch funktioniert:



Wir wählen hier  $\tau = \pi$ . Natürlich kann man mehrere Runden abwickeln und wählt dann etwa  $\tau = 5\pi$ , das sieht dann so aus - man erkennt deutlich die archimedische Spirale, und man erkennt auch mehrere Evoluten z. B. für den oberen Halbkreis, hier drei parallele Bahnen analog zum vorigen Bild:





## Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

### 1. Einleitung: Motivierung und Grundbegriffe

Viele Aussagen kann man nicht mit Sicherheit behaupten, zum Beispiel kann man nicht mit Sicherheit sagen, dass es morgen regnet / nicht regnet, dass ein Maschinenteil unter definierter Dauerbelastung nach spätestens 100 Betriebsstunden nicht mehr funktioniert, dass man nächste Woche im Lotto keine sechs Richtige haben wird. Die vernünftige Reaktion darauf ist nun nicht, dass man gar nichts mehr sagt (weil man nichts Gewisses sagen kann), auch nicht, dass man eine Aussage als gewiss ausgibt, die es nicht ist. Sondern man wird eine Wahrscheinlichkeitsaussage machen. Nun hört man häufig Aussagen der Form: 'Wahrscheinlich passiert das Ereignis  $A$ ' oder 'Wahrscheinlich passiert  $A$  nicht'. Solche Aussagen kann man sich sparen, weil sie nichts aussagen. Sinnvoll aber sind Aussagen, in denen eine Wahrscheinlichkeit quantitativ angegeben wird, also Aussagen der Form: ' $p$  ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $A$ '. Eine solche Aussage hat natürlich wieder nur einen Sinn für jemanden, der sich dabei vorstellt: Wenn man das zugehörige Experiment  $N$  mal ausführt, so hat man  $pN$  Fälle zu erwarten, in welchen das Ereignis  $A$  passiert. Es sollte einen Unterschied bedeuten, ob man ein Unfallrisiko von  $1/10^6$  oder von  $1/5$  hat. Nun kommt es oft vor, dass die verfügbare Information nicht ausreicht, eine Wahrscheinlichkeit sehr genau oder gar ganz genau anzugeben. Dann ist es immer noch wertvoll, Aussagen der Form zu haben: 'Mit einer Wahrscheinlichkeit von  $999/1000$  ist die fragliche Wahrscheinlichkeit  $p$  für  $A$  unter  $1/10^5$ '.

Generell hat man folgendes Problem: Sehr komplexe Systeme kann man nicht präzise im kleinsten Detail beschreiben und seine Eigenschaften naturwissenschaftlich exakt ermitteln, aber gerade dann hat man es mit Massenphänomenen zu tun, die man wiederum statistisch gut beschreiben kann. An die Stelle der Beschreibungsgrößen für die einzelnen Teilchen tritt der Mittelwert der Masse von Teilchen. Wahrscheinlichkeiten selbst sind ein Beispiel für Mittelwerte: Ein Ereignis  $A$  tritt im Mittel pro Versuch mit relativer Häufigkeit  $p$  ein, dann ist  $p$  die Wahrscheinlichkeit für  $A$ . Umgekehrt hängen alle Mittelwerte mit Wahrscheinlichkeiten so zusammen: Wenn eine Größe  $X$  bei einem Zufallsexperiment die Werte  $x_1, \dots, x_n$  (paarweise verschieden) annehmen kann, dabei den Wert  $x_i$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i$  annimmt, dann ist  $\sum_{i=1}^n x_i p_i$  der Erwartungswert der Größe  $X$ , also der Mittelwert. Solche Mittelwerte kann man beobachten, wenn man eine lange Versuchsreihe durchführt: Dann wird der zu beobachtende arithmetische Mittelwert der beobachteten Werte von  $X$  nahe bei diesem Erwartungswert liegen. Umgekehrt kann man aus einer solchen Versuchsreihe nach Wahrscheinlichkeit auf den Erwartungswert zurückschließen. Wir werden sehen, wie das geht.

### 2. Vorbereitung: Grundlegendes über das Rechnen mit Mengen

Das Folgende wird ziemlich bekannt sein und sollte daher wohl nur 'überflogen' werden. Allerdings sollte man sich die de Morganschen Gesetze sehr bewusst machen, das kann sonst leicht eine Quelle unangenehmer Fehler sein. Außerdem führen wir eine Notation für die Anzahl einer endlichen Menge ein und ein praktisches Rechengesetz dafür.

Zwischen zwei Mengen  $A, B$  kann die folgende Teilmengenbeziehung bestehen (oder auch nicht):

$$A \subset B : \iff \text{für alle } x : (\text{wenn } x \in A, \text{ dann } x \in B).$$

Insbesondere ist definiert:

$$A = B : \iff A \subset B \text{ und } B \subset A.$$

Man verknüpft Mengen  $A, B$  zu neuen Mengen, insbesondere zu

$$\begin{aligned} A \cup B & : = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} \text{ (Vereinigung)} \\ A \cap B & : = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} \text{ (Durchschnitt)} \end{aligned}$$

Wir werden jeweils eine Grundmenge  $\Omega$  haben, und alle dann zu betrachtenden Mengen werden Teilmengen von  $\Omega$  sein. Dann ist definiert:

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{A \mid A \subset \Omega\} \text{ (Potenzmenge von } \Omega \text{)}.$$

In diesem Rahmen definieren wir dann die Operation der Komplementbildung:

$$\bar{A} := \{x \in \Omega \mid x \notin A\} \text{ (Komplement in } \Omega \text{)}$$

Allgemeiner bilden wir auch Mengendifferenzen:

$$\begin{aligned} A \setminus B & : = \{x \in A \mid x \notin B\} \text{ (} A \text{ minus } B \text{), also} \\ A \setminus B & = A \cap \bar{B}. \end{aligned}$$

Also ist  $\bar{\bar{A}} = A$ ,  $\Omega \setminus \Omega = \emptyset$  (die leere Menge, welche überhaupt kein Element enthält). Folgende Booleschen Rechengesetze sind wichtig und entsprechen der simplen Aussagenlogik, also dem logischen Umgang mit 'und', 'oder', 'nicht' (Assoziativität, Allmenge, leere Menge und Komplement, Idempotenz, Distributivgesetze, de Morgansche Gesetze der Reihe nach):

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) & = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) & = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup \bar{A} & = \Omega, \\ A \cap \bar{A} & = \emptyset, \\ A \cup A & = A, \\ A \cap A & = A, \\ A \cup (B \cap C) & = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) & = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ \overline{A \cup B} & = \bar{A} \cap \bar{B}, \\ \overline{A \cap B} & = \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}$$

Man leitet z.B. ab:

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}).$$

Schließlich bezeichnen wir für endliche Mengen mit  $|A|$  die Anzahl der Elemente von  $A$ . Das ist dann eine Zahl aus  $\mathbb{N}_0$ . Es ist sicher klar, dass  $|A \cup B| = |A| + |B|$ , **wenn**  $A \cap B = \emptyset$ . Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung ziemlich wichtig ist folgende Rechenregel für die Menge

$$A^B := \{f \mid f : B \rightarrow A\},$$

und für endliche Mengen  $A, B$  hat man:

$$|A^B| = |A|^{|B|}.$$

Beispiel: Ein Wort der Länge 5 (also mit 5 Buchstaben) aus einem Alphabet mit 26 Buchstaben kann man auf  $26^5$  Weisen bilden. Denn jedes derartige Wort ist aufzufassen als Abbildung  $\{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 26\}$ .

### 3. Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wir erklären diese Grundbegriffe an einem sehr einfachen und einem etwas komplizierteren Beispiel: Das einfache: Mit einem gewöhnlichen Würfel wird einmal gewürfelt. Das kompliziertere: Mit einem gewöhnlichen Würfel wird drei mal gewürfelt.

DEFINITION 29. *Ein Ergebnisraum ist eine nicht leere Menge  $\Omega$ . Inhaltliche Deutung: Die Elemente von  $\Omega$  sind die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments.*

**Beispiele:** Beim einmaligen Würfeln hat man  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Denn es kommt eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 heraus. Beim dreimaligen Würfeln hat man

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Denn es kommt eine Folge der Länge drei der möglichen Augenzahlen von 1 bis 6 heraus.

**Bemerkung:** In der einfachsten Wahrscheinlichkeitsrechnung ist  $\Omega$  endlich, wichtig sind dann auch noch die Fälle, dass  $\Omega$  abzählbar unendlich ist (also mit den natürlichen Zahlen durchzuzählen), dann aber noch der Fall, dass  $\Omega$  der Menge aller reellen Zahlen entspricht.

Der entscheidende Schachzug bei der mathematischen Fassung des Begriffs der Wahrscheinlichkeit (das Ganze gelang erst Kolmogorov 1933 (!)) ist nun Folgender: Man fragt nur nach Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen im Rahmen eines Zufallsexperiments, zu dem ein fester Ergebnisraum  $\Omega$  gehört.

Wir geben nun ein paar Beispiele, welche die folgenden Definitionen motivieren werden: Beim einmaligen Würfeln fragt man etwa, wie wahrscheinlich es ist, dass eine Augenzahl unter 3 herauskommt. Oder bei dreimaligem Würfeln nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens eine Sechs dabei ist. Stets ist es ein Ereignis, das bei Durchführung des betreffenden Zufallsexperiments geschehen kann, nach dessen Wahrscheinlichkeit man fragt, und stets kann man ein solches Ereignis so fassen im Rahmen des betreffenden  $\Omega$ :

(1) 'das herauskommende  $\omega \in \Omega$  hat die Eigenschaft  $E$ '.

Im ersten Beispiel: ' $\omega < 3$ ', im zweiten Fall ' $\omega = (a_1, a_2, a_3)$ ', und es gilt nicht, dass es  $i \neq j$  gibt,  $1 \leq i, j \leq 3$ , so dass  $a_i = a_j = 6$ '. Nun kann man jede Eigenschaft im Rahmen einer Grundmenge  $\Omega$  identifizieren mit einer Teilmenge von  $\Omega$ , man bildet also zum Ereignis (1):

(2)  $A_E := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ hat die Eigenschaft } E\} \subset \Omega$ .

Auf diese Weise werden die im Rahmen von  $\Omega$  formulierbaren Ereignisse einfach Teilmengen von  $\Omega$ . Wir wollen nun die Menge aller Ereignisse in den Griff bekommen. Jedenfalls ist das eine Teilmenge von  $\Omega$ . Im endlichen Fall nimmt man einfach die gesamte Potenzmenge von  $\Omega$ , also die Menge aller Teilmengen von  $\Omega$ . Insbesondere für  $\Omega = \mathbb{R}$  macht das Schwierigkeiten, dann verlangt man nur, was für alle praktischen Bedürfnisse ausreicht: Man nimmt eine sogenannte  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{S}$  von Teilmengen von  $\Omega$ , und die soll alle Intervalle enthalten und abgeschlossen sein unter abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten sowie Komplementbildung.  $\emptyset$  und  $\mathbb{R} = \Omega$  selbst gehören dann insbesondere dazu. Nun kommt ein Drittes dazu: jedem Element aus  $\mathcal{S}$  wird eine Wahrscheinlichkeit eindeutig zugeordnet. Das sollte eine Zahl im Bereich  $[0, 1]$  sein. Man hat also eine Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P: \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ . Aber es sollte diese Funktion  $P$  nicht beliebig sein. Denn denken wir an eine bekannte Erfahrungstatsache: Wenn man ein Zufallsexperiment oft wiederholt und betrachtet die relative Häufigkeit, mit der ein Ereignis  $A \in \mathcal{S}$  dabei vorgekommen ist, so stabilisiert sich auf Dauer gerade die Wahrscheinlichkeit als zu beobachtende relative Häufigkeit (diese ist die Anzahl der Versuche, bei denen sich  $A$  ereignet hat, geteilt durch die Anzahl aller Versuche). Die beobachtete relative Häufigkeit wird fast niemals genau die Wahrscheinlichkeit sein, aber stets sehr nahe daran bei großer Versuchsreihe. Darum sollte die Funktion  $P$  die wesentlichen Eigenschaften besitzen, welche der Begriff 'relative Häufigkeit' besitzt, nämlich:  $P(\Omega) = 1$ , und  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , falls  $A \cap B = \emptyset$ .

Wir fassen nunmehr das Ganze zum Kolmogorovschen Begriffssystem zusammen:

**DEFINITION 30.** Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ , wobei  $\Omega$  ein Ergebnisraum,  $\mathcal{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra von Mengen in  $\mathcal{P}(\Omega)$  (= Potenzmenge von  $\Omega$ ) ist und  $P$  eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf  $\mathcal{S}$ , welche folgende Eigenschaften hat:

$$P: \begin{array}{l} \mathcal{S} \rightarrow [0, 1] \\ A \mapsto P(A) \end{array}, \text{ und}$$

$$(i) P(\Omega) = 1$$

$$(ii) P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k), \text{ falls } A_m \cap A_k = \emptyset \text{ für } k \neq m, k, m \in \mathbb{N}.$$

Speziell im Fall endlicher Menge  $\Omega$  kann man stets  $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$  wählen, und anstelle des Axioms (ii) genügt es, nur zu fordern, dass

$$(ii)' P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ falls } A \cap B = \emptyset.$$

**Bemerkung:** Klar folgt  $(ii)'$  aus  $(ii)$ . Wenn aber  $\Omega$  endlich ist, dann gilt das auch umgekehrt: Es gibt dann nur endlich viele Teilmengen von  $\Omega$ , also nur endliche viele Ereignisse, und aus  $(ii)'$  kann man mit Induktion die Aussage auch für disjunkte Vereinigungen von endlich vielen Mengen folgern.

Noch eine Bemerkung zu  $(ii)'$ : Die Existenz der unendlichen Summe ist völlig unproblematisch, da sie beschränkt und monoton wachsend ist.

Wir kommen zu ein paar Folgerungen aus dem Axiomensystem, die große Bedeutung für das praktische Wahrscheinlichkeitsrechnen haben:

FOLGERUNG 5. Für jede Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P$  und für alle Ereignisse  $A, B$  in  $\mathcal{S}$  gilt:

- (1)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ,
- (2)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , (ohne Bedingung an  $A, B$ ),
- (3)  $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$ .

**Begründungen:**  $1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$  mit den Axiomen  $(i)$ ,  $(ii)$  und der Tatsache  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ . Also (1).

Zu (2):  $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$ , und diese Vereinigung ist disjunkt. Also mit

$$\begin{aligned} B &= (B \cap \bar{A}) \cup P(B \cap A) \text{ (diskunkte Vereinigung):} \\ P(B) &= P(B \cap \bar{A}) + P(B \cap A), \end{aligned}$$

insgesamt

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B \cap \bar{A}) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Zu (3): Mit  $A \subset B$  hat man  $A \cap B = A$ , also mit dem eben Benutzten:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) \\ &= P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

**Eine Warnung:** Aus (1) folgt sofort  $P(\emptyset) = 0$ . Aber man darf nicht aus  $P(A) = 0$  darauf schließen, dass  $A = \emptyset$ . Hier ein Beispiel: Würfelt man unendlich oft, dann ist das Ereignis: 'Eine Folge konstant Sechs wird gewürfelt' nicht leer, es enthält eine Folge, aber seine Wahrscheinlichkeit ist Null. Oder: Man schießt zufällig auf das Intervall  $[0, 1]$ . Dann ist das Ereignis  $[2, 3]$  nicht leer, aber seine Wahrscheinlichkeit ist Null. Ebenso kann ein Ereignis  $A \subsetneq \Omega$  existieren mit  $P(A) = 1$ . Also: Wenn ein Ereignis logisch unmöglich ist, so hat es Wahrscheinlichkeit Null, aber das ist nicht umkehrbar. Ebenso folgt aus logischer Sicherheit die Wahrscheinlichkeit 1, aber das ist wieder nicht umkehrbar.

Wir kommen nun zur elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung durch 'Abzählen', die man immer in Laplace-Räumen hat:

DEFINITION 31.  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  heißt Laplace-Raum, wenn  $\Omega$  endlich ist und alle Elementarereignisse

$$\{\omega\}, \omega \in \Omega,$$

dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Folgerungen sind sofort:

$$\begin{aligned} \text{Mit } |\Omega| &= n \text{ gilt dann} \\ P(\{\omega\}) &= \frac{1}{n}, \text{ und für alle } A \subset \Omega \text{ gilt:} \\ (*) \quad P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \text{relative Häufigkeit von } A \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

Die folgende Aussage gilt stets bei endlichem  $\Omega$ , auch wenn die Elementarereignisse nicht dieselben Wahrscheinlichkeiten besitzen:

$$(+)\quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

**Bemerkung:** Die Formel  $(*)$  beschreibt man traditionell verbal auch so: 'Die Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch die Anzahl der möglichen Fälle'. Dabei heißen nur einfach genau die zu  $A$  gehörigen Fälle 'günstig', auch wenn sie fatal sein sollten.



**Warnung:** Man beachte jedoch, dass diese Formel *nur* dann gilt, wenn alle Elementarereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit haben.

**Begründung der Formeln:** Zunächst ist (+) richtig, weil mit  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$  (die aufgezählten Elemente seien paarweise verschieden) gilt:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^k \{\omega_{i_k}\}\right) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i=1}^k P(\{\omega_{i_k}\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

Für die leere Menge  $A$  gilt die Formel ebenfalls, die Summe rechts wird dann leer, bekommt also den Wert Null. Aus (+) folgt mit der Laplaceeigenschaft sofort (\*), weil dann gilt:

$$\sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \frac{1}{n} \cdot |A|. \blacksquare$$

### Beispiele:

1.) Die Wahrscheinlichkeitsräume, die zum Würfeln mit einem symmetrischen Würfel oder auch zum dreimaligen Würfeln damit gehören, haben die Laplace-Eigenschaft. Also hat man:

Drei mal wird gewürfelt. Wir betrachten das Ereignis  $A$ : 'Es werden genau zwei Sechsen gewürfelt'. Dann kann man die Zahl der 'günstigen Fälle', d.h. die Zahl  $|A|$ , so ausrechnen:

$$|A| = 3 \cdot 5,$$

weil man 3 Möglichkeiten hat, die Positionen für die Sechsen zu wählen, unabhängig noch 5 Möglichkeiten für den verbleibenden Wurf, der keine Sechs ist. Außerdem ist in diesem Beispiel

$$|\Omega| = 6^3,$$

also

$$P(A) = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}.$$

Im selben Rahmen betrachten wir das Ereignis  $B$ : 'Die Augensumme aller drei Würfe ist  $\leq 4$ '. Dann zählen wir wieder ab, wie viele Elementarereignisse, also konkrete Folgen von drei Augenzahlen, dazu gehören, es sind:

$$(1, 1, 1), \\ (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1),$$

also

$$P(B) = \frac{4}{6^3} = \frac{1}{54}.$$

### 2.) Ein Beispiel, das die Laplace-Eigenschaft nicht besitzt:

Zufallsexperiment: Es wird zwei mal gewürfelt, wieder mit einem symmetrischen Würfel. Wir fassen aber als Ergebnisse nur die möglichen Augensummen auf, bilden also

$$\Omega = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \leq k \leq 12\}.$$

Dann hat man

$$P(\{2\}) = \frac{1}{36}, \quad P(\{3\}) = \frac{2}{36}, \quad P(\{7\}) = \frac{6}{36}.$$

Man hat  $|\Omega| = 11$ , aber keineswegs  $P(\{\omega\}) = \frac{1}{11}$ . Woher kennt man denn überhaupt die genannten Wahrscheinlichkeiten? Klar arbeitet man man dem Laplaceraum, bei dem  $\Omega' = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ , dabei bekommt jedes Paar dieselbe Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{36}$ , und zur Augensumme 7 gehören die Paare

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).$$

Damit kann man dann die Resultate auszählen.

Das Rechnen mit diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen stützt sich in wesentlich komplizierteren Fällen auf systematische Typen (vgl. den entsprechenden Abschnitt), später dann sogar auf Näherung mittels kontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Zunächst kommen wir jedoch im Begriffsrahmen dieses Abschnitts noch zu einem wichtigen neuen Grundbegriff und damit zu einer erweiternden Klasse elementarer Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Abschließend eine banale, aber nicht ganz unwichtige Bemerkung. Sie kennen sicher die Gepflogenheit, Wahrscheinlichkeiten in Prozent anzugeben. Der Zusammenhang zu den Wahrscheinlichkeiten im Bereich  $[0, 1]$  ist klar: Es handelt sich um einen Faktor 100. Also ist eine Wahrscheinlichkeit '1%' dasselbe wie 0.01 in unserer Aufstellung. Aber dazu gibt es folgende:

**Dringende Empfehlung:** Mit Wahrscheinlichkeiten in Prozent steht es wie mit Winkeln in Grad: Zum Rechnen taugen Sie nichts und generieren erzeugen üble Fehler, aber bei der Angabe von Endresultaten werden sie besser allgemein verstanden (aus Gründen der Gewohnheit eben). Man sollte also keinerlei Rechnung mit den Wahrscheinlichkeiten 'in Prozent' durchführen. Dies dringlich zu machen, zwei Beispiele:

1.) Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, hat man (für Wahrscheinlichkeiten alle im Bereich  $[0, 1]$  genommen) bei unabhängigen  $A, B$  :  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Für  $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$  also  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Aber in Prozent:  $50 \cdot 50 = 2500$ , und das ist keine Wahrscheinlichkeit in Prozent.

2.) Wir werden den Erwartungswert bei einer Größe mit möglichen Werten  $x_1, \dots, x_n$  berechnen als

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k,$$

wobei der Wert  $x_k$  angenommen wird mit Wahrscheinlichkeit  $p_k$ . Dieser Wert ist also im langen Mittel zu erwarten. Tatsächliche Mittelwerte pegeln sich dort ein. Mit den prozentualen Wahrscheinlichkeiten käme nur dann derselbe Sinn heraus, wenn man die Formel mit einem Faktor  $\frac{1}{100}$  auf der rechten Seite versähe. Eine korrekte Formel wäre also unnötig komplizierter. (Es gibt auch noch mehr von diesen Beispielen.) Wir fügen hinzu:

**Alle in diesem Skriptum angeführten Formeln zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik verwenden nur die Wahrscheinlichkeiten im Bereich  $[0, 1]$  und niemals prozentuale.**

#### 4. Der Begriff der Unabhängigkeit und das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Ein wichtiger Schachzug bei praktischer Berechnung von Wahrscheinlichkeiten besteht darin, beim Abzählen in verschiedene disjunkte Teilmengen zu unterteilen. Der Grund dafür, dass man die Wahrscheinlichkeiten dieser Teilmengen besser berechnen kann, liegt nicht nur darin, dass die Teilmengen kleiner sind und nicht so viele Fälle jeweils aufgeführt werden müssen. Sondern man betrachtet ein Ereignis  $A$  als eingetreten und zählt nur noch die Fälle von  $B$ , die schon in  $A$  liegen. Das gibt dann die Anzahl der günstigen Fälle von  $B \cap A$ . Dies wollen wir nun nicht mehr nur über Anzahlen, sondern allgemein mit Wahrscheinlichkeiten ausführen. Denn es hat weitere wichtige Aspekte: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand die Piratenpartei wählt, ist sicher in der Wählergruppe der Leute unter 25 Jahren größer als in der Wählerschaft über 25. Man sagt zu einem solchen Sachverhalt dann: Die Ereignisse: 'Wähler über 25' und 'Wähler der Piratenpartei' sind nicht unabhängig. Einerseits ist ein solcher Sachverhalt vielfach als solcher interessant (wenn die Wahrscheinlichkeiten in den verschiedenen Töpfen **deutlich** verschieden sind), andererseits hängen viele sehr wichtige Dinge der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik daran. Erwähnen wir hier erst nur den Umstand, dass wir bisher keine wirklich 'vernünftige' Formel für  $P(A \cap B)$  haben - die Formel  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$  ist für praktische Zwecke wenig brauchbar. Bereits aus elementarem Alltagsverständnis wird man gern  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  rechnen wollen, aber das gilt keineswegs allgemein. Wir werden nunmehr genau erklären, wann das gilt, und für den andern Fall eine brauchbare Alternative bereitstellen. Wir definieren nunmehr den äußerst wichtigen Grundbegriff der Unabhängigkeit zweier Ereignisse auf der Grundlage des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit:

DEFINITION 32. Für zwei Ereignisse  $A, B$  mit  $P(B) \neq 0$  definiert man

$$(4) P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{'Wahrscheinlichkeit von } A \text{ bedingt durch } B').$$

Die Ereignisse  $A, B$  heißen *unabhängig*, wenn  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , sonst *abhängig*.

**Zum Verständnis:** Die bedingte Wahrscheinlichkeit versteht man anschaulich gut, wenn man denkt an die Wahrscheinlichkeit von  $A$ , wenn man aus dem Topf  $B$  zieht. Denn im Topf  $B$  bedeutet  $A$  dasselbe

wie  $A \cap B$  (der Zähler), und nun ist durch  $P(B)$  zu teilen, weil nunmehr  $B$  die Wahrscheinlichkeit 1 bekommen soll. Wie oben eingeführt, ist es natürlich, Ereignisse  $A, B$  unabhängig zu nennen, wenn

$$P(A) = P(A|B).$$

Das ist aber nur brauchbar, wenn  $P(B) \neq 0$ . Andererseits ergibt die Definition von  $P(A|B)$  sofort, dass

$$P(A) = P(A|B) \iff P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Daher ist die eingeführte Definition des Begriffs der Unabhängigkeit gerade nur die Verallgemeinerung auf den Fall, dass  $P(A)$  oder  $P(B)$  auch Null sein kann.

Die Definitionen ergeben sofort zwei brauchbare Formeln zu Berechnung von  $P(A \cap B)$ :

FOLGERUNG 6. *Man hat*

- (5)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , *wenn  $A, B$  unabhängig sind.*  
 (6)  $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$  (*wenn nur  $P(B) \neq 0$ .*)

**Bemerkung:** Nur auf den ersten Blick erscheinen diese Formeln wenig praktikabel. Aber man bedenke: Die erste Formel kann man oft dann anwenden, wenn aus der Situation klar ist, dass zwei Ereignisse 'nichts miteinander zu tun' haben und daher sofort ohne jede Rechnung als unabhängig erkannt werden können. Z.B. haben die Augenzahlen der einzelnen Würfe bei fortgesetztem Würfeln nichts miteinander zu tun, und so sind Ereignisse wie: 'Sechs im ersten Wurf', 'Augenzahl unter 3 beim vierten Wurf' sicher unabhängig voneinander. Andererseits hat man vielfach schon intuitiv eine Abhängigkeit zu erwarten und rechnet dann nicht mit der ersten Formel, sondern mit der zweiten. Hier erscheint zunächst der Ausdruck  $P(A|B)$  als Problem, aber das ist er so oft nicht, vielmehr kann man solche bedingten Wahrscheinlichkeiten oft leichter direkt ermitteln als die unbedingte  $P(A)$ . Ein Beispiel: Man würfelt zwei mal. Wie wahrscheinlich ist eine Augensumme  $< 6$  (Ereignis  $A$ )? Das ist schwieriger zu beantworten als die Frage, wie wahrscheinlich  $A$  ist bedingt dadurch, dass der erste Wurf eine 1 (2, 3, 4, 5, 6) ergab. Klar ist

$$\begin{aligned} P(A | \text{erster Wurf ist } 1) &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \\ P(A | \text{erster Wurf ist } 2) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ P(A | \text{erster Wurf ist } 3) &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \\ P(A | \text{erster Wurf ist } 4) &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Offenbar kommt hinzu:

$$P(A | \text{erster Wurf ist } \geq 5) = 0.$$

Damit hat man über die zweite Formel z.B.:

$$P(A \cap \text{'erster Wurf ist } 1\text{'}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$

Nun kann man auch  $P(A)$  über folgende Formel ausrechnen:

FOLGERUNG 7 (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit). *Wenn die Mengen  $B_1, \dots, B_m$  eine Klasseneinteilung von  $\Omega$  bilden, also*

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega \text{ und } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq m,$$

*dann hat man*

$$(7) \quad P(A) = \sum_{k=1}^m P(A|B_k) P(B_k).$$

**Begründung:** Man hat

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^n (A \cap B_k)\right) \stackrel{\text{Ax. (ii)}}{=} \sum_{k=1}^m P(A \cap B_k) \stackrel{(6)}{=} \sum_{k=1}^m P(A|B_k) P(B_k). \blacksquare$$

**Beispiel:** Im angeführten Beispiel für das Ereignis  $A$ : 'Augensumme  $< 6$ ' ergibt sich

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Wir haben noch eine weitere typisch interessante Fragestellung: Man hat gewisse Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein medizinischer Test 'falsch positiv' anzeigt oder 'falsch negativ'. Typisch sind Werte wie 0.02 für Beides. Diese Wahrscheinlichkeiten sind bedingte, nämlich - wir nennen das Ereignis 'Test ist positiv' einfach 'pos', das Ereignis 'krank' bezeichnen wir mit  $K$ :

$$\begin{aligned} P(\text{pos}|\bar{K}) &= 0.02, \\ P(\text{pos}|K) &= 1 - P(\overline{\text{pos}}|K) = 1 - 0.02 = 0.98. \end{aligned}$$

Nun zeigt der Test bei einer zufällig ausgewählten Person: 'Positiv'. Es wäre nun sehr naiv, zu urteilen, die Person sei mit Wahrscheinlichkeit 0.98 krank. Denn nennen wir das Ereignis 'krank'  $K$ , dann haben wir nur - wir bezeichnen das Ereignis: 'Test positiv' mit 'pos':

$$P(\text{pos}|K) = 0.98,$$

und das dürfen wir nicht verwechseln mit  $P(K|\text{pos})$ . Aber gerade letzterer Wert interessiert uns. Dazu haben wir folgende wichtige Bayessche Formel:

FOLGERUNG 8 (Bayessche Formel). *Es gilt für beliebige Ereignisse  $A, B$  mit  $P(A), P(B) \neq 0$ :*

$$(8) \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Dabei ist oft praktisch  $P(A)$  gemäß der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit auszurechnen als

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}),$$

so dass entsteht:

$$(8') \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}.$$

**Begründung:** (8) ist offenbar gleichwertig zu  $P(B|A)P(B) = P(A|B)P(B)$ , aber das bedeutet wieder dasselbe wie  $P(B \cap A) = P(A \cap B)$ , was klar ist. ■

Diese simple Formel ermöglicht es nun gerade, eine Bedingungsrichtung *korrekt* umzudrehen, wie es unser Problem verlangte. Wir führen das nun aus, im Beispiel des medizinischen Tests haben wir also

$$\begin{aligned} P(K|\text{pos}) &= \frac{P(\text{pos}|K)P(K)}{P(\text{pos}|K)P(K) + P(\text{pos}|\bar{K})P(\bar{K})} \\ &= \frac{0.98 \cdot P(K)}{0.98 \cdot P(K) + 0.02 \cdot P(\bar{K})}. \end{aligned}$$

Wir haben eingefüllt, was wir wissen. Nun benötigen wir eine entscheidende Größe, um die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(K|\text{pos})$  auszurechnen, nämlich  $P(K)$ . Typisch wäre  $P(K) = 0.01$ . Sehr hoch läge schon  $P(K) = 0.2$ . Im ersten Fall  $P(K) = 0.01$  erhält man:

$$P(K|\text{pos}) = \frac{0.98 \cdot 0.01}{0.98 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99} \approx 0.33.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der positiv Getestete wirklich krank ist, liegt dann unter  $1/3$ . Das hat also nichts mit dem naiven Wert 0.98 zu tun. Geben wir noch die Zahl für  $P(K) = 0.2$ . Dann hat man tatsächlich

$$P(K|\text{pos}) = \frac{0.98 \cdot 0.2}{0.98 \cdot 0.2 + 0.02 \cdot 0.8} \approx 0.92,$$

und das ist immer noch  $< 0.98$ .

Es sei bemerkt, dass sich in der Technik völlig analoge Probleme stellen: Eine Funktionseinheit aus mehreren Komponenten ist defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt es daran, dass eine gewisse Komponente defekt ist?

Ein gehobener Zweck von Statistik besteht nun darin, anhand von Messdaten Parameter zu schätzen bzw. aus Modellklassen ein Modell auszuwählen. Dafür verwendet man durchaus gerade die sogenannte

Bayessche Methode, die auf (unter Umständen recht komplizierten) Ausführungen der Bayesschen Formel basiert. Die Sache fußt darauf, dass man die Wahrscheinlichkeit eines Modells bedingt durch die vorhandene Information berechnet, indem man das Wissen darüber benutzt, wie wahrscheinlich diese Information zu bekommen wäre, wenn das Modell zuträfe.

### 5. Zufallsvariablen, zufällige Größen

Diese Worte bezeichnen dasselbe, manchmal sagt man auch nur 'Variable', wenn scho klar ist, dass man im Zusammenhang der Statistik bzw. Wahrscheinlichkeitstheorie spricht. Wenn wir an den Gebrauch von 'Variable' bei Funktionen anknüpfen, so haben wir es hier mit abhängiger Variablen zu tun. Genauer also: Eine Zufallsvariable ist ein Abbildung, und diese ist jeweils völlig präzise definiert. Was ist dann das 'Zufällige' daran? Nun, man befindet sich im Rahmen eines Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  und hat nun eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Man denkt nun daran, das zugehörige Zufallsexperiment werde durchgeführt. Dann kommt ein zufälliges Ergebnis  $\omega \in \Omega$  heraus. An diesem wird nun der Wert  $X(\omega)$  beobachtet. Dieser ist nun zufällig, in dem Maße, wie zufällig  $\omega$  herauskam. Nun darf insbesondere im Fall  $\Omega = \mathbb{R}$  die Abbildung  $X$  keine ganz beliebige sein, man möchte bei Zufallsvariablen fragen können, wofür man sich typisch interessiert: 'Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein  $X$ -Wert unter 150 heraus?', usw. Man verlangt also, dass folgende Ereignisse jedenfalls in  $\mathcal{S}$  liegen:

$$\begin{aligned} X < \alpha &:= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < \alpha\}, \text{ analog} \\ \alpha < X, \alpha < X < \beta, \alpha \leq X < \beta &\text{ usw.} \end{aligned}$$

Achtung: Ein Ausdruck wie ' $X < \alpha$ ' ist eigentlich Unsinn. Aber hier ist genau erklärt, als welche Menge in der Ereignisalgebra er zu nehmen ist. Umgekehrt lenkt der exakte Ausdruck für die Menge durch Vieles, das immer gleich bleibt, vom Wesentlichen ab - nämlich von den Grenzen. Außerdem haben wir bereits am Anfang gesehen, dass Ereignisse zunächst ganz natürlich durch Aussagen informell beschrieben werden. Das macht man gern in praktischer Anwendung. Die kurzen Ausdrücke wie ' $X < \alpha$ ' knüpfen da an, verkürzen nur symbolisch die Aussagen, machen sie aber direkt verständlich, genauer formuliert wäre ' $X < \alpha$ ' in Worten: 'Das im Experiment herauskommende  $\omega \in \Omega$  hat die Eigenschaft, dass  $X(\omega) < \alpha$ .' Oder ein wenig kürzer: 'Es kommt ein  $X$ -Wert  $< \alpha$  heraus'. Man sieht, dass sich die Beziehungen wie  $<$  auf  $X(\omega)$  beziehen und nicht auf  $X$ . Im sonstigen mathematischen Sprachgebrauch wäre ' $X < \alpha$ ' gerade so zu verstehen, dass alle Elemente von  $\text{Bild}(X)$  diese Eigenschaft haben. Das ist nun hier gerade nicht gemeint.

Wir werden zunächst im Wesentlichen mit endlichem  $\Omega$  und  $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$  arbeiten, und dann entfällt die genannte Bedingung der  $P$ -Messbarkeit der Mengen wie  $X < \alpha$  usw. In diesem einfachen Fall ist jede Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable. Insbesondere sind dann auch stets die Ereignisse  $X = \alpha$ , für eine Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$ , von Interesse. Wir fassen zusammen:

DEFINITION 33. *Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  gegeben. Dann heißt eine Abbildung*

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

*eine Zufallsvariable (Zufallsgröße, zufällige Größe), wenn alle Ereignisse der Form  $X \in I$  mit einem Intervall  $I$  in  $\mathcal{S}$  liegen, also  $P(X \in I)$  existiert. Im Falle eines endlichen  $\Omega$  und  $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$  ist jede Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable.*

**Bemerkung:** Im praktischen Gebrauch gibt man gern bequem eine verbale Beschreibung, die nur die Ermittlung des Wertes bei gegebenem Ausgang aus  $\Omega$  kennzeichnet, also keine formale mathematische Definition. Wir werden das in den folgenden Beispielen in typischer Weise ausführen.

**Beispiele:**

1.) Für  $A \in \mathcal{S}$  ist die Größe

$$X_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \omega \in A, \\ 0, & \text{wenn } \omega \notin A \end{cases}$$

eine Zufallsvariable. Aus diesen baut man weitere wichtige zusammen, z.B.

2.) Es wird  $n$  mal gewürfelt. Dann ist die Zufallsvariable 'X = Anzahl der Sechsen' (bequeme Beschreibung!) so formal zu definieren:

$$X((a_1, \dots, a_n)) := |\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ und } a_k = 6\}|, \text{ für } a_1, \dots, a_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Das Ereignis  $X < 4$  bedeutet dann: 'Es werden bei den  $n$  Würfeln höchstens 3 Sechsen gewürfelt'.

3.) Entsprechend ist die Zufallsvariable 'X = Augensumme bei  $n$  Würfeln mit einem Würfel' formaler zu schreiben:

$$X((a_1, \dots, a_n)) := \sum_{k=1}^n a_k, \text{ für } a_1, \dots, a_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

**5.1. Verknüpfungen von Zufallsvariablen.** Wie man Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verknüpft durch Addition, Multiplikation mit einer Zahl, Multiplikation der Funktionen, usw., so verknüpft man auch Zufallsvariablen, welche auf demselben Ergebnisraum definiert sind, also

DEFINITION 34. Seien  $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen, dann sind es auch die folgenden:

$$\begin{aligned} (\alpha X)(\omega) &= \alpha(X(\omega)), \\ (X + Y)(\omega) &= X(\omega) + Y(\omega), \\ (XY)(\omega) &= X(\omega)Y(\omega), \\ \frac{X}{Y}(\omega) &= \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}, \text{ wenn stets } Y(\omega) \neq 0. \end{aligned}$$

Ferner kann man mit einer stetigen Funktion  $f: \text{Bild}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  auch bilden:

$$f \circ X(\omega) = f(X(\omega)).$$

**Bemerkung:** Besonders wichtig sind zunächst die ersten beiden Verknüpfungen, mit denen die Zufallsvariablen auf  $\Omega$  einen Vektorraum bilden.

**5.2. Die Verteilung von Zufallsvariablen.** Die interessierende Frage bei einer Zufallsvariablen  $X$  lautet stets: Welche Werte kommen mit welcher Wahrscheinlichkeit vor. Das nennt man dann 'die Verteilung von  $X$ '. Je nach Sachlage hat man eine besonders gute oder auch mehrere erwünschte Beschreibungen der Verteilung. Die hat man nun mathematisch-technisch genau zu fassen.

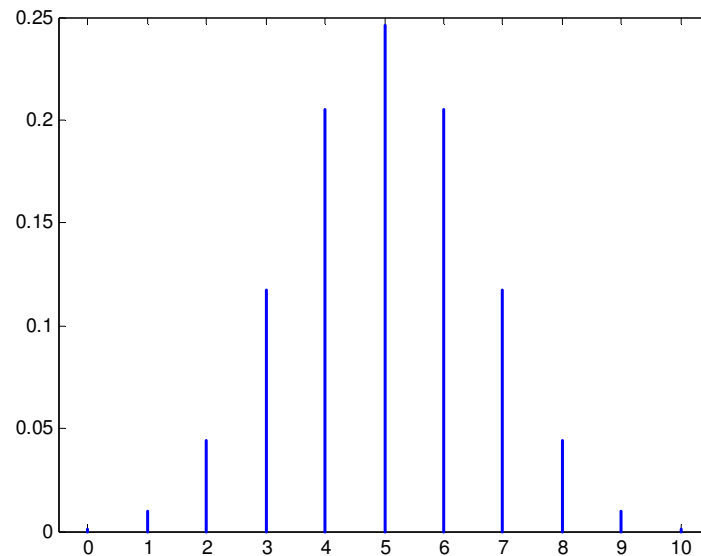
DEFINITION 35 (nichtkumulierte Verteilung bei diskreten Zufallsvariablen). Sei  $\Omega$  endlich oder höchstens abzählbar unendlich (dann heißt die Verteilung von  $X$  auf  $\Omega$  diskret). Dann ist die (nichtkumulierte) **Verteilung von  $X$**  die folgende Abbildung:

$$f_X(\alpha) := P(X = \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Beispiel:** Sei  $X$  = Augensumme bei zwei Würfeln mit symmetrischem Würfel, dann ist  $f_X(2) = \frac{1}{36}$ , weiter ist  $f_X(3.5) = f_X(50) = 0$  usw. (Viel mehr Beispiele im nächsten Abschnitt über die wichtigsten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen.)

**Zum allgemeinen Verständnis:** Die Verteilung von  $X$  ordnet also jeder reellen Zahl zu, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie als  $X$ -Wert vorkommt. Zur graphischen Darstellung: Man zeichnet sinnvoll Stäbe, deren Längen proportional zu den Werten sind, wie sonst Funktionsgraphen auch, nur, dass hier die Stäbe dazu da sind, dass man überhaupt etwas deutlich sieht (sonst hätte man nur einzelne Punkte) Das sieht

dann z. B. so aus, hier im Beispiel  $X = \text{Anzahl der 'Köpfe' bei 10 Münzwürfen}$ :



Die Werte sind Wahrscheinlichkeiten, entsprechend ist die Ordinate zu beschriften. Es sollte klar sein, dass es keinen Sinn hat, die Stabenden miteinander zu verbinden. Abgesehen von den Stäben ist der Funktionswert der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_X$  überall Null.

Nun hat diese Beschreibung keinen Sinn bei kontinuierlichen Verteilungen: Für eine solche Verteilung gilt in der Regel, dass  $P(X = \alpha) = 0$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Die so gebildete Funktion  $f_X$  wäre konstant Null und gäbe keinerlei Information! Dafür hat man nun eine Beschreibung der Verteilung, die *immer* funktioniert, bei jeder Zufallsvariablen (also auch bei den diskreten):

DEFINITION 36 (Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen). *Es sei  $X$  eine beliebige Zufallsvariable. Dann ist folgende Abbildung die **Verteilungsfunktion von  $X$**  (auch kumulierte Verteilung genannt):*

$$F_X(\alpha) := P(X \leq \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

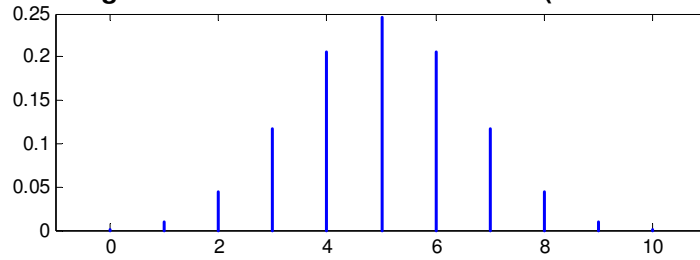
### Beispiele:

1.) Im Fall einer diskreten Verteilung mit Werten  $x_1, \dots, x_n$ , welche mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  angenommen werden,  $i = 1, \dots, n$ , ist die Verteilungsfunktion stückweise konstant, und man hat

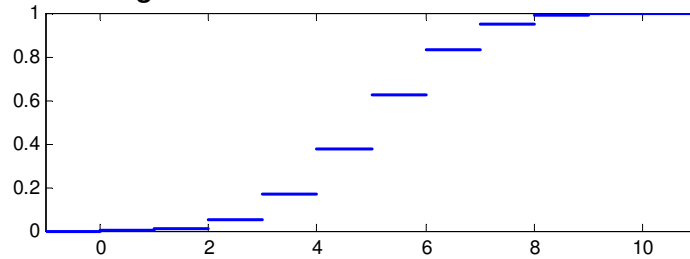
$$F(x) = \sum_{\{i|x_i \leq x\}} p_i.$$

Im Beispiel der Variablen  $X = \text{Anzahl der 'Köpfe' bei 10 Münzwürfen}$  sieht das so aus, unteres Bild, hier noch einmal zum Vergleich das Stabdiagramm zu  $f_X$ :

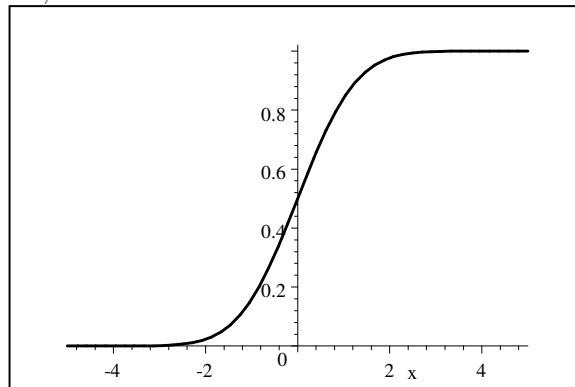
**Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeiten (nicht kumuliert)**



**Verteilungsfunktion: kumulierte Wahrscheinlichkeiten**



2.) Im Fall einer Normalverteilung ist die Verteilungsfunktion differenzierbar und insbesondere stetig, sie sieht so aus, hier für  $\mu = 0, \sigma = 1$



Wir fragen nach einem geeigneten nichtkumulierten Bild für eine stetige Verteilung, z.B. für eine Normalverteilung. Wie wir sahen, kann man  $f_X$  dann nicht brauchen, weil die Werte alle Null werden. Aber für kleine Intervalle der Form  $[a, a + \varepsilon]$  hat man eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit

$$P(a \leq X \leq a + \varepsilon),$$

und wenn man diese durch  $\varepsilon$  teilt, so bekommt man im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  gerade die Ableitung von  $F_X$  an der Stelle  $a$ . Diese ist dann als Wahrscheinlichkeitsdichte für  $X$  zu deuten, sie gibt an jeder Stelle  $a$  den Zuwachs der Wahrscheinlichkeit pro  $X$ -Werte-Differenz. Wir definieren daher:

**DEFINITION 37.** Eine Zufallsvariable  $X$  mit stückweise differenzierbarer Verteilungsfunktion  $F_X$  hat die Wahrscheinlichkeitsdichte

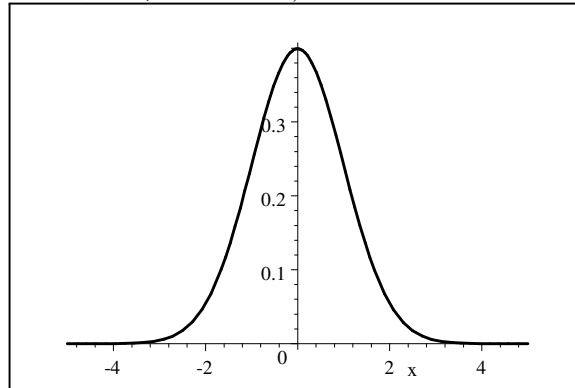
$$f_X(a) = F'_X(a).$$

(An den (höchstens abzählbar unendlich vielen) Stellen  $b$ , an denen  $F_X$  nicht ableitbar ist, kann der Wert  $f_X(b)$  beliebig festgelegt werden, er ist irrelevant.) Umgekehrt sagt man, dass die Variable  $X$  mit der Dichte  $f$  verteilt sei, wenn für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx.$$



**Zum Verständnis:** Wenn  $X$  nach dieser Definition mit der Dichte  $f$  verteilt ist, so folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sofort, dass  $F'_X(a) = \frac{d}{da} \int_{-\infty}^a f(x) dx = f(a)$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist also stets die Ableitung der Verteilungsfunktion. Da  $F_X$  monoton steigt, ist diese Ableitung stets  $\geq 0$ . Man kann nun auch anschaulich verstehen, dass die Normalverteilungsdichte (hier wieder zur Normalverteilung mit  $\mu = 0, \sigma = 1$ ) so aussehen muss:



Ihre Werte sind keine Wahrscheinlichkeiten, sondern eben Wahrscheinlichkeitsdichten, welche angeben, wie stark die Verteilungsfunktion jeweils lokal ansteigt. Man kann also nicht etwa auf der Ordinate Wahrscheinlichkeiten ablesen. Aber man findet Wahrscheinlichkeiten wieder, mit der Flächendeutung des Integrals: Die Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq b)$  ist gerade der Flächeninhalt, der zwischen  $x_1 = a$  und  $x_2 = b$  vom Graphen der Dichtefunktion mit der  $x$ -Achse eingeschlossen wird. Insbesondere ist  $F_X(a)$  graphisch abzulesen als der Flächeninhalt der Fläche unter der Dichtekurve links von  $a$ . Man beachte, dass bei stetigen Verteilungen stets gilt:  $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$ , da auf den einzelnen Punkt nur die Wahrscheinlichkeit Null entfällt.

**5.3. Empirische Verteilungen von Zufallsvariablen.** Wenn man nicht weiß (und auch nicht wissen kann), wie die genaue Verteilung einer Zufallsvariablen aussieht, dann ist es nützlich bis unumgänglich, das entsprechende Experiment häufig zu wiederholen, also von der Zufallsvariablen  $X$  viele Werte  $x_1, \dots, x_n$  zu beobachten. Die empirische Verteilung gibt dann die Information, welche Werte wie häufig herauskamen. Dabei gibt es eine wichtige Fallunterscheidung:

1. Fall: Wenn  $X$  von vornherein (oder vielleicht auch nach dieser Erfahrung) nur wenige Werte annimmt, dann wird man die Darstellung durch Stabdiagramm benutzen und damit die Funktion

$$f_{X,emp}(a) : = \text{relative Häufigkeit, mit welcher der Wert } a \text{ herauskam} \\ \left( = \frac{|\{x_i \mid x_i = a\}|}{n} \right)$$

graphisch darstellen. Es werden also bei der empirischen Verteilung einfach nur die unbekanntes Wahrscheinlichkeiten durch beobachtete relative Häufigkeiten ersetzt. (Ebenso könnte man dann auch eine empirische Verteilungsfunktion gewinnen und aufmalen.)

2. Fall: Wenn  $X$  sehr viele verschiedene Werte annimmt, dann ist der erste Weg nicht gut, man hätte lauter Stäbe der Länge nahe  $1/n$ . Dann kann man eine vernünftige Zahl von Grenzen  $a_1, \dots, a_k$  ( $k$  viel kleiner als  $n$ , höchstens  $\sqrt{n}$  als Faustregel) festlegen und die Funktionswerte

$$F_{X,emp}(a_k) := \text{relative Häufigkeit, mit welcher ein Wert } \leq a_k \text{ herauskam,}$$

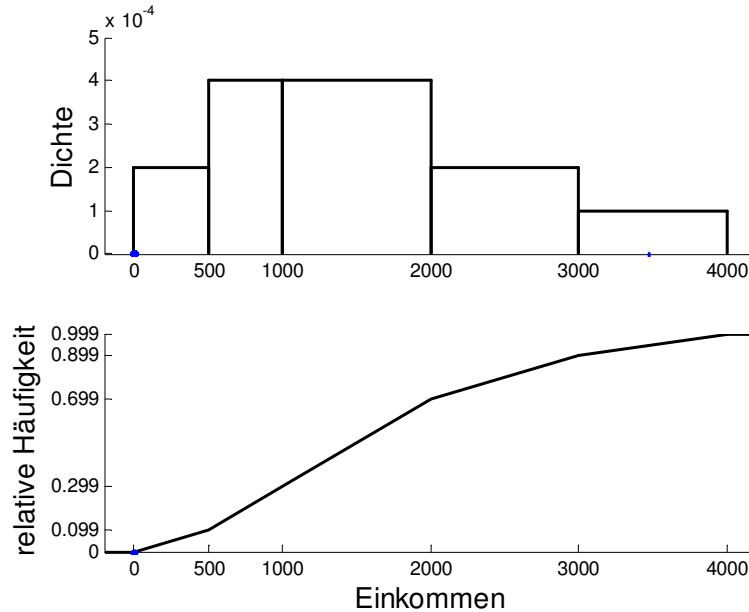
bestimmen und die entsprechenden Punkte geradlinig verbindet - d.h. es wird linear interpoliert. Dann bekommt man die entsprechende empirische Dichtefunktion  $f_{X,emp}$ , welche die jeweils konstanten Steigungen von  $F_{X,emp}$  als Werte hat. Man bildet also

$$f_{X,emp}(x) = \frac{F_{X,emp}(a_{k+1}) - F_{X,emp}(a_k)}{a_{k+1} - a_k} \text{ für } a_k < x < a_{k+1}.$$

Solche Darstellungen findet man vielfach für reale Verteilungen, etwa für eine Einkommensverteilung könnte das so aussehen:

Einkommen	0 – 500	500 – 1000	1000 – 2000	2000 – 3000	3000 – 4000
relative Häufigkeit	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

Diese Daten sähen dann graphisch so aus - die nichtkumulierte oben nennt man auch ein Histogramm:



**Vorsicht: Dichte ist relative Häufigkeit pro Einheit der Abszisse, nicht etwa relative Häufigkeit!** So ist zu beachten, dass die Flächeninhalte der Histogrammkästen gerade die Wahrscheinlichkeiten wiedergeben, die jeweils auf die Intervalle entfallen. Zum Intervall  $[500, 1000]$  gehört die relative Häufigkeit 0.2, zum Intervall  $[1000, 2000]$  die relative Häufigkeit 0.4, und daher sind die Dichtewerte dort gleich (!). Wenn möglich, wählt man gern gleich breite Intervalle, das hat den Vorteil, dass die Kästenhöhen proportional zu den jeweiligen relativen Häufigkeiten sind und keine intuitiven Ablesefehler auftreten.

**5.4. Der Begriff der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen.** Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse, die im Zusammenhang mit Zufallsvariablen formuliert werden, auch für die Berechnung von Erwartungswerten und Varianzen (vgl. den nächsten Abschnitt) spielt es häufig eine Rolle, ob zwei Variablen  $X, Y$  unabhängig sind oder nicht. Unabhängigkeit bedeutet: Kennt man den Wert der einen Variablen, so bleiben die Wahrscheinlichkeiten für die Werte der anderen unverändert. Oft ist es aus der Situation klar, dass zwei Variablen unabhängig sind. Beispiel: Man würfelt 10 mal,  $X =$  Augenzahl im dritten Wurf,  $Y =$  Augenzahl im fünften Wurf, diese Variablen sind sicher unabhängig. Ebenso versteht man sofort, dass die Augensumme aller 10 Würfe sicher nicht unabhängig ist vom Resultat des ersten Wurfs (oder auch des letzten). Man sollte hier aber stets bedenken, dass 'Abhängigkeit' im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinn deutlich weniger besagt als Abhängigkeit im Sinne einer Funktion. Wenn  $x$  bestimmt ist, dann ist  $f(x)$  damit eindeutig bestimmt, das ist die stärkste Form der Abhängigkeit. Wir definieren nun den statistischen Begriff der Abhängigkeit:

**DEFINITION 38.** *Zwei Variablen  $X, Y$  mit nur endlich vielen Werten oder höchstens abzählbar unendlich vielen Werten (also mit diskreter Verteilung) sind unabhängig genau dann, wenn für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  die Ereignispaare*

$$X = a, Y = b \text{ unabhängig sind.}$$

*Zwei Variablen  $X, Y$  mit Dichtefunktionen  $f, g$  sind unabhängig genau dann, wenn die Dichtefunktion des Paares  $(X, Y)$  das Produkt von  $f$  und  $g$  ist. Man kann einheitlich so definieren:  $X, Y$  heißen unabhängig genau dann, wenn alle Ereignispaare*

$$X \leq a, Y \leq b, a, b \in \mathbb{R},$$

unabhängig sind. (Das ist dann auch brauchbar, wenn eine der Variablen eine stetige Verteilung hat und die andere diskret ist.)

**Bemerkung:** Es geht weniger darum, diese Definition rechnerisch in Beispielen nachzuprüfen, als vielmehr darum, eine Unabhängigkeit per Konstruktion herbeizuführen und die Vereinfachungen zu nutzen, die sich daraus ergeben. Das wichtigste

**Beispiel:** Man führt das Zufallsexperiment, bei dem ein Wert von  $X$  beobachtet wird,  $n$  mal aus. Dann sei  $X_i$  der  $X$ -Wert, der im  $i$ . Versuch beobachtet wird. Nach Konstruktion sind die  $X_i$  unabhängig, sogar das ganze Tupel  $(X_1, \dots, X_n)$  ist unabhängig. Wir sprechen von den  $X_i$  als von  $n$  'unabhängigen Kopien von  $X$ '. In diesem Rahmen hat man die äußerst wichtige 'Mittelungsgröße'

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

deren beobachteten Wert (bei den  $n$  Versuchen) man nutzt, um den Erwartungswert von  $X$  zu schätzen. Die Untersuchung der Wahrscheinlichkeit, mit welcher diese Schätzung eine bestimmte Genauigkeit besitzt, ist ein elementares Hauptanliegen der Statistik. Das werden wir behandeln.

**Bemerkung zur Verallgemeinerung des Unabhängigkeitsbegriffs auf mehr als zwei Ereignisse:** Es genügt für die Unabhängigkeit von  $A_1, \dots, A_n$  mit  $n > 2$  nicht, dass  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$ , sondern man muss zusätzlich fordern, dass auch alle  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  unabhängig sind für  $2 \leq k < n$ .

## 6. Die wichtigen Verteilungsparameter Erwartungswert und Varianz (bzw. Streuung)

Vielfach interessiert man sich nicht für die volle Information der Verteilung einer Zufallsvariablen, sondern vor allem für den Erwartungswert und die Streuung (bzw. Varianz). Das sind Kennzahlen der Verteilung, mit folgender Bedeutung: Der Erwartungswert ist derjenige, auf den sich in langer Versuchreihe das beobachtete empirische arithmetische Mittel einpegelt. Im Fall einer empirischen Verteilung hat man nur als Näherungswert dafür den arithmetischen Mittelwert aller beobachteten Werte. Die Varianz ist der Erwartungswert des quadratischen Abstandes der einzelnen Werte von  $X$  zum Erwartungswert von  $X$ . Man geht dann über zur Streuung, welche ein Maß für die Differenz der Größenwerte selbst zu ihrem Erwartungswert liefert. Sie ist definiert als Wurzel der Varianz. Wir definieren das nun und stellen die üblichen Symbole vor:

DEFINITION 39. Der Erwartungswert einer Variablen  $X$  ist im Falle einer diskreten Verteilung

$$E(X) = \mu(X) := \sum_a aP(X = a).$$

Ist  $X$  mit der Dichte  $f_X$  verteilt, so ist

$$E(X) = \mu(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Die Varianz von  $X$  ist so definiert:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2(X) := E\left((X - E(X))^2\right).$$

Die Streuung von  $X$  ist definiert durch

$$\sigma(X) := \sqrt{\sigma^2(X)}.$$

**Zum Verständnis:** In der Definition des Erwartungswertes für den diskreten Fall hat man zumeist nur endliche viele Werte  $a \in \mathbb{R}$ , für welche  $P(X = a) \neq 0$  ist, die Summe wird dann endlich und ist unproblematisch. Wenn aber unendlich viele Werte  $a_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , existieren mit  $P(X = a_i) \neq 0$ , dann könnte die unendliche Reihe nicht mehr konvergieren, und dann existiert  $E(X)$  nicht. Dasselbe kann im kontinuierlichen Fall mit dem Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$  geschehen, dass es nicht existiert. Entsprechendes ist zur Varianz zu sagen. Aber die praktisch wichtigsten Verteilungen haben alle Erwartungswert und Varianz. Berechnung von  $\mu$  und  $\sigma$  für zusammengesetzte Zufallsvariablen

Es gelten dafür folgende leicht zu verifizierende Formeln:

- (i)  $\mu(\alpha X + \beta Y) = \alpha\mu(X) + \beta\mu(Y)$  (stets),
- (ii)  $\mu(X \cdot Y) = \mu(X)\mu(Y)$ , wenn  $X, Y$  unabhängig sind,
- (iii)  $\sigma^2(X) = \mu(X^2) - \mu^2(X)$ ,
- (iv)  $\sigma(X + \alpha) = \sigma(X)$ , entsprechend  $\sigma^2(X + \alpha) = \sigma^2(X)$ ,
- (v)  $\sigma(\alpha X) = |\alpha|\sigma(X)$ , entsprechend  $\sigma^2(\alpha X) = \alpha^2\sigma^2(X)$ ,
- (vi)  $\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$ , wenn  $X, Y$  unabhängig sind\*, also
- (vii)  $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$ , wenn  $X, Y$  unabhängig sind\*.

\*) : Hier genügt bereits die *lineare Unabhängigkeit*, die gleichbedeutend damit ist, dass

$$\text{Cov}(X, Y) := \mu((X - \mu(X))(Y - \mu(Y))) = 0 \text{ ('Kovarianz von } X, Y\text{')}).$$

### Einige Begründungen:

Zu (i) zeigt man zunächst leicht:  $\mu(\alpha X) = \alpha\mu(X)$  mit:

$$\mu(\alpha X) = \sum_b \alpha b P(X = b) = \alpha \sum_b b P(X = b) = \alpha\mu(X).$$

Wir benötigen noch die Aussage, dass  $\mu(X + Y) = \mu(X) + \mu(Y)$ . Beides zusammen ergibt (i). Tatsächlich ist die Additivität nur mit einer kleinen Raffinesse einsichtig, damit man nicht etwa die Unabhängigkeit von  $X, Y$  voraussetzen muss (siehe (ii), dort wird sie benötigt, allerdings nur in einer schwachen Form): Wir zeigen zuerst mittels der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$(1) \mu(X) = \sum_b \sum_a a P(X = a \cap Y = b),$$

weil

$$\sum_b \sum_a a P(X = a \cap Y = b) = \sum_a a \sum_b P(X = a \cap Y = b) \stackrel{*(\text{totale Wahrscheinlichkeit})}{=} \sum_a a \sum_b P(X = a).$$

Nun folgt analog:

$$(2) \mu(Y) = \sum_b \sum_a b P(X = a \cap Y = b),$$

Mit (1) und (2) hat man dann:

$$\begin{aligned} \mu(X + Y) &= \stackrel{(\text{Definition})}{=} \sum_{a,b} (a + b) P(X = a \cap Y = b) \\ &= \sum_{a,b} a P(X = a \cap Y = b) + \sum_{a,b} b P(X = a \cap Y = b) \\ &= \stackrel{(1),(2)}{=} \mu(X) + \mu(Y). \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Dieser Beweis ist formuliert für den Fall, dass alle Summen endlich sind - zu summieren ist über alle Wertepaare, welche die Variablen  $X, Y$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $> 0$  annehmen. Aber man kann alles auch für unendliche Reihen lesen, also für den Fall abzählbar unendlich vieler Werte. Was noch besser ist: Man braucht nur die Summenzeichen durch Integrale zu ersetzen,  $da, db$  hinzuzufügen und  $P(X = a \cap Y = b)$  durch eine gemeinsame Dichte für die Paare, also  $f(a, b)$  zu ersetzen, um den Beweis für Zufallsvariablen mit Dichtefunktionen zu bekommen. (Integriert wird jeweils von  $-\infty$  bis  $\infty$ , und natürlich muss es Bedingungen für die Existenz der Integrale geben.)

Zu (ii) für den diskreten Fall (im anderen geht das wie in (i) ganz ähnlich mit den Integralen anstelle der Summen):

$$\begin{aligned} \mu(XY) &= \sum_{a,b} ab P(X = a \cap Y = b) \stackrel{X, Y \text{ unabh.}}{=} \sum_{a,b} ab P(X = a) P(Y = b) \\ &= \left( \sum_a a P(X = a) \right) \left( \sum_b b P(Y = b) \right) \end{aligned}$$

Wir begründen (iii):

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= \mu\left((X - \mu(X))^2\right) = \mu(X^2 - 2\mu(X)X + \mu^2(X)) \\ &= \mu(X^2) - 2\mu^2(X) + \mu^2(X) = \mu(X^2) - \mu^2(X).\end{aligned}$$

Das funktioniert offensichtlich, wenn nur  $\mu(X)$  und  $\mu(X^2)$  existieren.

Zu (vi):

$$\begin{aligned}\sigma^2(X+Y) &= \mu\left((X - \mu(X) + Y - \mu(Y))^2\right) \\ &= \mu\left((X - \mu(X))^2\right) + \mu\left((Y - \mu(Y))^2\right) + 2\mu\left((X - \mu(X))(Y - \mu(Y))\right) \\ &= \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2Cov(X, Y).\end{aligned}$$

Also (vii) unter der Voraussetzung, dass  $Cov(X, Y) = 0$ . ■

### Beispiele zur Anwendung:

1.) Wenn  $X$  eine beliebige Zufallsvariable ist mit  $\sigma(X) \neq 0$ , dann hat man

$$\begin{aligned}\mu(\bar{X}) &= \mu(X), \\ \sigma(\bar{X}^{(n)}) &= \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}, \\ \mu\left(\frac{X - \mu(X)}{\sigma(X)}\right) &= 0, \\ \sigma\left(\frac{X - \mu(X)}{\sigma(X)}\right) &= 1.\end{aligned}$$

2.) Mittelwertsgrößen: Man wiederholt das zu  $X$  gehörige Zufallsexperiment  $n$  mal *unabhängig*, dann bildet man das arithmetische Mittel der beobachteten  $X$ -Werte als Wert von  $\bar{X}$ . Diese Variable kann man mit der Definition:  $X_i := X$ -Wert im  $i$ . Versuch so schreiben:

$$\bar{X} := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i.$$

Nun hat man

$$\begin{aligned}\mu(\bar{X}) &= \mu\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu(X) = \mu(X), \\ \sigma^2(\bar{X}) &= \sigma^2\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma^2(X) = \frac{1}{n} \sigma^2(X), \text{ also} \\ \sigma(\bar{X}) &= \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Letzteres ist das berühmte 'Wurzel  $n$ -Gesetz', das man sich wegen seiner großen Bedeutung merken sollte. Dass die Streuung des Mittelwertes nur mit  $\sqrt{n}$  fällt, hat die Konsequenz, dass man für sehr genaue Schätzungen von unbekanntem Erwartungswerten unangenehm große Stichproben benötigt.

**6.1. Eine Faustregel für die Streuung, welche diese erläutert.** Eine Faustregel heißt so, weil sie nichts Präzises sagt, aber eben doch etwas Substantielles. Hier lautet sie:

In aller Regel liegen über 90% der Populationswerte im Bereich  $\mu(X) \pm 2\sigma(X)$ , genauer formuliert :

Für beinahe alle Zufallsvariablen, denen man begegnet, gilt :  $P(\mu(X) - 2\sigma(X) \leq X \leq \mu(X) + 2\sigma(X)) \geq 0.9$ .

Im nächsten Abschnitt wird mit der Tschebyscheffschen Ungleichung diese Faustregel durch etwas ganz Genaueres ersetzt. Aber dabei verliert man für viele praktische Zwecke zu viel, man kommt nur auf '≥ 0.75' statt '≥ 0.9'. Dabei wird man häufig die angesprochene Wahrscheinlichkeit über 0.95 finden.

Illustration: Nehmen Sie die Variablen: 'Wasserverbrauch von Haushalten', 'Stromverbrauch...', 'Wohnfläche...', 'Körperlänge...', 'Augensumme von  $n$  Würfel-Würfeln', 'Lebensdauer von Geräten bestimmten Typs', 'Messfehler bei einer bestimmten physikalischen Messung', usw., usw. Sie werden keine finden, für welche die Faustregel nicht gilt.

Die von  $\sigma(X)$  beschriebene 'Breite' einer Verteilung begrenzt also die Wahrscheinlichkeit dafür, das ein zufällig beobachteter Wert von  $X$  weiter als  $2\sigma(X)$  vom Erwartungswert  $\mu(X)$  liegt. Darum ist  $\sigma(X)$  auch viel besser als etwa einen kleinsten und größten möglichen Wert von  $X$  zu nennen, selbst wenn diese existieren. Diese Zahlangaben mögen zuweilen eine kleine zusätzliche Information geben, die manchmal sehr wichtig sein wird, z.B. der größtmögliche Ansturm auf eine medizinische Versorgungsstelle. Aber über die Verteilung von  $X$  und die meisten interessierenden Fragen dazu sagen sie fast gar nichts.

**6.2. Die Tschebyscheffsche Ungleichung.** Eine Vorbemerkung zur Transkription dieses russischen Namens: Die hier verwandte ist im deutschsprachigen Raum traditionell. Moderner wird man so etwas wie 'Chebyshev' finden, mit dem Vorteil, das man das im Englischen gut wiedererkennt.

SATZ 34. Für jede beliebige Zufallsvariable  $X$  (für die  $\mu(X)$  und  $\sigma(X)$  existieren) und jede Zahl  $\alpha > 0$  gilt

$$P(|X - \mu(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\alpha^2}.$$

**Beweis:**

$$\sigma^2(X) = \sum_{|a - \mu(X)| \leq \alpha} (a - \mu(X))^2 P(X = a) + \sum_{|a - \mu(X)| \geq \alpha} (a - \mu(X))^2 P(X = a),$$

also

$$\alpha^2 P(|X - \mu(X)| \geq \alpha) \leq \sum_{|a - \mu(X)| \geq \alpha} (a - \mu(X))^2 P(X = a) \leq \sigma^2(X). \blacksquare$$

**Zum Verständnis:** Diese Ungleichung macht klar, dass die Varianz von  $X$  auch mit mathematischer Genauigkeit die Wahrscheinlichkeit dafür begrenzt, dass  $X$  einen Wert mindestens im Abstand  $\alpha > 0$  vom Mittelwert annimmt. Sie gibt also eine gültige wichtige Deutung für die Varianz im Stile der Faustregel. Natürlich liefert die Ungleichung nur dann ein nichttriviales Resultat, wenn die rechte Seite einen Wert unter 1 annimmt.

**Eine systematisch wichtige Anwendung:** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Variable  $\bar{X}$  einen Wert annimmt, der von  $\mu(X) = \mu(\bar{X})$  um wenigstens  $\alpha > 0$  entfernt ist, geht nach Null mit  $n \rightarrow \infty$ . Denn  $\sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sigma^2(X)$  geht nach Null für  $n \rightarrow \infty$ . Mehr noch: Man kann mit einer sehr groben Abschätzung für  $\sigma^2(X)$  nach oben für festen Wert  $\alpha > 0$  angeben, welches  $n$  man braucht, um mit einem beobachteten Wert von  $\bar{X}$  den Mittelwert  $\mu(X)$  mit Genauigkeit  $\alpha$  zu schätzen, mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p$  (die man natürlich groß wählt).

Beispiel: Man möchte eine unbekannte Wahrscheinlichkeit  $P(A) = p_0$  schätzen durch die relative Häufigkeit, mit der man das Ereignis  $A$  in  $n$  Versuchen beobachtet. Das Resultat soll mit Wahrscheinlichkeit 0.99 eine Ungenauigkeit von nur 0.01 aufweisen. Dann hat man jedenfalls für die Variable  $X$  (Wert 1, wenn  $A$  beobachtet wird, 0 sonst):

$$\sigma^2(X) \leq \frac{1}{4}, \text{ also } \sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{4n}.$$

wir suchen also  $n$ , so dass

$$\frac{1}{4n \cdot 0.0001} = \frac{2500}{n} \leq 0.01.$$

Wir finden, dass  $n = 250000$  genügt. Bei 250000 unabhängigen Ausführungen des Zufallsexperiments haben wir also eine Wahrscheinlichkeit von 0.99, dass die beobachtete relative Häufigkeit, mit der  $A$  herauskommt, von  $P(A) = p_0$  um höchstens 0.01 entfernt ist.

**Bemerkung:** Später werden wir dies Resultat mittels Normalverteilung und dann noch  $t$ -Verteilung noch wesentlich verbessern können. Der Vorteil der Tschebyscheffschen Ungleichung liegt aber darin, dass ihr keinerlei Voraussetzung über die Verteilung von  $X$  zugrunde liegt.

In dieser Linie liegt der folgende Satz, der immerhin erlaubt, das erwähnte 'empirische Gesetz der großen Zahlen' nachzuzeichnen:

SATZ 1 (das schwache Gesetz der großen Zahlen). Wenn  $X$  eine beliebige Zufallsvariable ist und  $\mu(X), \sigma(X)$  existieren, dann hat man für alle  $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{X}^{(n)} - \mu(X)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Gleichwertig ist (über Komplementbildung):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\overline{X}^{(n)} - \mu(X)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

**Beweis:** Mit der Tschebyscheffschen Ungleichung haben wir -  $\varepsilon$  bleibt im Verlauf fest gewählt:

$$0 \leq P\left(\left|\overline{X}^{(n)} - \mu(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2\left(\overline{X}^{(n)}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Es folgt sofort, dass  $\alpha_n(\varepsilon) := P\left(\left|\overline{X}^{(n)} - \mu(X)\right| \geq \varepsilon\right)$  eine Nullfolge ist, d.h. mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null geht. ■

**Bemerkungen:**

1. Das oft eigens für sich genannte 'Bernoullische Gesetz der großen Zahlen' ist nur der Spezialfall davon, dass  $X$  eine Bernoulli-Variable ist (also nur mit Werten 1, 0). Es lohnt sich aber auch, diesen Fall konkret anzuschauen: Dann ist  $\mu(X)$  einfach die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  in einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum. Man hat weiter  $\mu(X) = P(A) =: p$  und  $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$ . Die Voraussetzungen des Satzes sind also erfüllt, und der Satz besagt dann in Worten: Wenn man den Stichprobenumfang  $n$  groß genug wählt, so hat man eine beliebig hohe Wahrscheinlichkeit (also beliebig nahe an 1) dafür, dass die gefundene empirische relative Häufigkeit so nahe bei dem tatsächlichen  $P(A)$  liegt, wie man will. Die empirische relative Häufigkeit ist der zu findende Wert von  $\overline{X}^{(n)}$ . Wir haben hier die zweite Lesart verwendet und oben bereits konkrete Beispiele gegeben.

2. Man sollte auch den allgemeinen Fall in der zweiten Lesart verbal kompakt formulieren: Bei genügendem Stichprobenumfang ist das arithmetische Mittel der Werte einer Zufallsvariablen mit beliebig hoher Wahrscheinlichkeit beliebig nahe am Erwartungswert der Variablen. (Für eine empirische Variable in einer riesigen Population ist der Erwartungswert einfach der arithmetische Mittelwert in der Gesamtpopulation.)

3. Der Satz besagt also, dass man sich am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen kann und ermittelt, wie groß der Abstand zum Gewünschten ist, obgleich man das Gewünschte niemals genau zu wissen bekommt. Allerdings muss man einen Preis bezahlen: Die Aussage ist nur eine mit hoher Wahrscheinlichkeit, keine absolut sichere. Außerdem macht die Forderung nach einer hohen Wahrscheinlichkeit auch Arbeit - sie verlangt große Stichprobenumfänge und insbesondere ordentliche Stichproben - nicht etwa solche, die 'zufällig' bei der Hand liegen. ('Bequem zur Hand' ist alles andere als wirklich zufällig!) Es sei noch einmal bemerkt, dass dies 'am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen' auch einen geeigneten Umgang mit der dann natürlich auch unbekanntem Streuung verlangt, aber nicht daran scheitert.

Zu (vi):

$$\begin{aligned} \sigma^2(X+Y) &= \mu\left((X - \mu(X) + Y - \mu(Y))^2\right) \\ &= \mu\left((X - \mu(X))^2\right) + \mu\left((Y - \mu(Y))^2\right) + 2\mu\left((X - \mu(X))(Y - \mu(Y))\right) \\ &= \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2Cov(X, Y). \end{aligned}$$

Also (vii) unter der Voraussetzung, dass  $Cov(X, Y) = 0$ . ■

**Beispiele zur Anwendung:**

1.) Wenn  $X$  eine beliebige Zufallsvariable ist mit  $\sigma(X) \neq 0$ , dann hat man

$$\begin{aligned} \mu(\overline{X}) &= \mu(X), \\ \sigma(\overline{X}) &= \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}, \\ \mu\left(\frac{X - \mu(X)}{\sigma(X)}\right) &= 0, \\ \sigma\left(\frac{X - \mu(X)}{\sigma(X)}\right) &= 1. \end{aligned}$$

2.) Mittelwertsgrößen: Man wiederholt das zu  $X$  gehörige Zufallsexperiment  $n$  mal *unabhängig*, dann bildet man das arithmetische Mittel der beobachteten  $X$ -Werte als Wert von  $\overline{X}$ . Diese Variable kann

man mit der Definition:  $X_i := X$ - Wert im  $i$ . Versuch so schreiben:

$$\bar{X} := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i.$$

Nun hat man

$$\begin{aligned} \mu(\bar{X}) &= \mu\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu(X) = \mu(X), \\ \sigma^2(\bar{X}) &= \sigma^2\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma^2(X) = \frac{1}{n} \sigma^2(x), \text{ also} \\ \sigma(\bar{X}) &= \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Letzteres ist das berühmte 'Wurzel  $n$ -Gesetz', das man sich wegen seiner großen Bedeutung merken sollte. Dass die Streuung des Mittelwertes nur mit  $\sqrt{n}$  fällt, hat die Konsequenz, dass man für sehr genaue Schätzungen von unbekanntem Erwartungswerten unangenehm große Stichproben benötigt. von  $\bar{X}$  zugrunde liegt.

## 7. Die wichtigsten diskreten Verteilungen

**7.1. Kombinatorische Vorbereitungen.** Wir stellen hier einige kombinatorische Tatsachen zusammen, die für das Folgende nützlich sind:

Wenn wir  $n$  Objekte haben, aus denen wir beliebige Folgen der Länge  $k$  bilden (mit erlaubten Wiederholungen), so gibt es dafür offenbar  $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$  Möglichkeiten. Wenn wir Folgen ohne Wiederholungen bilden, so gibt es dafür offenbar  $n(n-1)\dots(n-k+1)$  Möglichkeiten. Diese Zahl können wir mit  $n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 1 \cdot \dots \cdot n & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$  dann auch so schreiben:

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

DEFINITION 40.  $n!$  (' $n$  Fakultät') ist definiert durch  $0! := 1$ ,  $(n+1)! = (n+1)n!$ . Die Binomialkoeffizienten sind definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

SATZ 35.  $n!$  ist die Anzahl der Möglichkeiten,  $n$  Objekte anzuordnen.  $\binom{n}{k}$  ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge von  $n$  Elementen eine  $k$ -elementige Teilmenge auszuwählen, für  $k = 0, 1, \dots, n$ .

**Begründung:** Es ist offenbar die Zahl der Möglichkeiten,  $n = 0$  Objekte anzuordnen, Eins. (Oder fangen Sie an mit  $n = 1$ , dann gibt es wieder genau eine Anordnungsmöglichkeit.) Nun kann man bei  $n+1$  Objekten zunächst den Platz für das  $n+1$ . Objekt auf  $n+1$  Weisen bestimmen, dann hat man noch unabhängig alle Möglichkeiten, die restlichen  $n$  Objekte anzuordnen. Wenn wir mit Induktionsvoraussetzung für letztere Anzahl  $n!$  haben, dann also insgesamt  $(n+1)n!$  Möglichkeiten. Damit ist die erste Aussage durch Induktion bewiesen.

Zur zweiten Aussage: Man hat mit den Überlegungen zum Eingang

$$\frac{n!}{(n-k)!} \text{ Möglichkeiten,}$$

$k$  Objekte aus  $n$  Objekten in einer bestimmten Reihenfolge auszuwählen. und nun gibt es  $k!$  mögliche Reihenfolgen, in denen dieselbe Teilmenge ausgewählt werden kann, daher ist die fragliche Anzahl gerade

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \blacksquare$$

SATZ 36.



FOLGERUNG 9 (Verallgemeinerung auf Multinomialkoeffizienten).

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} = \text{Anzahl der Möglichkeiten, } n \text{ Objekte auf } r \text{ Töpfe zu verteilen,}$$

so dass  $k_s$  Objekte jeweils in den  $s$ . Topf kommen, für

$$k_1 + \dots + k_r = n.$$

Zur Begründung: Für  $r = 1$  stimmt die Aussage offensichtlich, für  $r = 2$  ist sie oben schon bewiesen. Sie gelte für  $r$  Töpfe. Wir zeigen, dass sie dann auch für  $r + 1$  Töpfe gilt: Es mögen  $k$  Objekte in die ersten  $r$  Töpfe kommen,  $n - k = k_{r+1}$  Objekte in den  $r + 1$ . Topf. Dann gibt es dafür nach dem vorigen Satz

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ Möglichkeiten.}$$

Unabhängig davon gibt es nun nach Induktionsvoraussetzung noch

$$\frac{k!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} \text{ Möglichkeiten,}$$

die erwähnten  $k$  Objekte auf die ersten  $r$  Töpfe zu verteilen, mit  $k_1 + \dots + k_r = k$ . Das macht zusammen

$$\frac{k!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r! k_{r+1}!} \text{ Möglichkeiten,}$$

die  $n$  Objekte auf  $r + 1$  Töpfe so zu verteilen, dass  $k_s$  Objekte im  $s$ . Topf landet,  $s = 1, \dots, r + 1$ . ■

#### Anwendungsbeispiele:

1.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben bei 5 zufällig ausgewählten Menschen wenigstens zwei im selben Monat Geburtstag? Dass alle fünf in verschiedenen Monaten Geburtstag haben, dafür gibt es

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \text{ Möglichkeiten,}$$

unter insgesamt  $12^5$  Möglichkeiten für die Geburtstagsmonate der Fünf, also ist die gefragte Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12^5} = \frac{89}{144} \approx 0.62.$$

Vorausgesetzt wird allerdings, dass alle Geburtstagsmonate gleich wahrscheinlich sind. Diese Wahrscheinlichkeit ist erstaunlich hoch, man würde sie intuitiv wohl stets unterschätzen.

2.) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 Kugeln auf drei Schachteln zu verteilen, so dass drei jeweils in die erste, drei in die zweite und 4 in die dritte Schachtel kommen? Diese Anzahl ist

$$\frac{10!}{3!3!4!} = 4200.$$

## 7.2. Binomialverteilung.

DEFINITION 41. Eine Zufallsvariable heißt  $(n, p)$ -binomialverteilt, mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq p \leq 1$ , wenn sie die Gestalt hat:  $X = \text{Trefferzahl bei } n \text{ unabhängigen Versuchen mit Einzeltrefferwahrscheinlichkeit } p$ .

**Beispiel:** Würfelt man 10 mal mit einem gewöhnlichen Würfel, so ist die Größe 'Anzahl der Sechsen'  $\left(10, \frac{1}{6}\right)$ -binomialverteilt.

SATZ 37. Ist  $X (n, p)$ -binomialverteilt, so hat man:

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ für } k = 0, 1, \dots, n.$$

Ferner sind Erwartungswert und Streuung:

$$\begin{aligned} \mu(X) &= np, \\ \sigma(X) &= \sqrt{np(1-p)}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Man muss dabei die Wahrscheinlichkeiten für Intervalle über längere Summen ausrechnen, dazu gehören auch die Werte der Verteilungsfunktion. Wir werden diese Werte später über Normalverteilung sehr gut nähern können.

**Beispiele:**

1.) Die Wahrscheinlichkeit für höchstens 3 Sechsen bei 20 Würfeln mit einem Würfel ist:

$$\begin{aligned} P(X_{20} \leq 3) &= \sum_{k=0}^3 \binom{20}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{20-k} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{20} + 20 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{19} + 190 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{18} + 1140 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{17} \\ &\approx 0.57. \end{aligned}$$

2.) Die Wahrscheinlichkeit für höchstens 30 Sechsen bei 200 Würfeln ist

$$P(X_{200} \leq 30) = \sum_{k=0}^{30} \binom{200}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{200-k} \approx 0.3.$$

Die Wahrscheinlichkeit für höchstens 300 Sechsen bei 2000 Würfeln ist

$$P(X_{2000} \leq 300) = \sum_{k=0}^{300} \binom{2000}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2000-k} \approx 0.0233.$$

Hier bekommt man die Resultate allenfalls noch mit einem Computeralgebraprogramm.

Denken Sie darüber nach, warum bei diesen analogen Problemen nicht stets dasselbe Resultat herauskommt.

**Begründung des Satzes:** Dass  $k$  'Treffer' und  $n - k$  'nicht Treffer' kommen in einer bestimmten, aber beliebigen Reihenfolge, hat wegen der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten für  $\cap$  die Wahrscheinlichkeit

$$p^k (1-p)^{n-k}.$$

Nun gibt es  $\binom{n}{k}$  mögliche Anordnungen für die 'Treffer' und 'Nieten', und die Ereignisse 'genau  $k$  Treffer in Anordnung (1)', 'genau  $k$  Treffer in Anordnung (2)' schließen einander aus, daher die Formel für  $P(X = k)$ . Die Formeln für Erwartungswert und Streuung zeigt man zuerst für  $n = 1$ . Wir bezeichnen mit  $X_1$  eine  $(1, p)$ -binomialverteilte Zufallsvariable, mit  $X_n$  eine  $(n, p)$ -binomialverteilte Zufallsvariable. Dann hat man

$$\begin{aligned} \mu(X_1) &= 1 \cdot P(X_1 = 1) + 0 \cdot P(X_1 = 0) \\ &= p, \text{ also} \\ \mu(X_n) &= n\mu(X_1) = np. \end{aligned}$$

Ferner für die Varianz:

$$\begin{aligned} \sigma^2(X_1) &= \mu(X_1 \cdot X_1) - \mu^2(X_1) \\ &= P(X_1 = 1) - p^2 = p - p^2 \\ &= p(1-p). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, dass (mit der Unabhängigkeit der Versuche):

$$\sigma^2(X_n) = n\sigma^2(X_1) = np(1-p). \blacksquare$$

Wir können die Wahrscheinlichkeitsformel noch ein wenig verallgemeinern: Hat man die Ereignisse  $B_1, \dots, B_r$ , die eine Klasseneinteilung bilden, dabei  $P(B_s) = p_s$  für  $s = 1, \dots, r$ , dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei  $n$  Versuchen genau  $k_s$  mal  $B_s$  herauskommt, gleich

$$P(X_1 = k_1 \cap \dots \cap X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}.$$

Wir haben hier mit  $X_s$  die Variable bezeichnet: 'Anzahl der Vorkommen von  $B_s$  bei  $n$  Versuchen'. Man beachte, dass stets  $k_1 + \dots + k_r = n$  gelten muss, und dass ohnehin  $p_1 + \dots + p_r = 1$ .

**Beispiel:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man bei 10 Würfeln mit einem gewöhnlichen Würfel drei mal eine Zahl unter 3, 2 mal eine 3 und 5 mal eine Zahl über 3 (in beliebiger Reihenfolge (!))? Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{35}{432} \approx 0.08.$$

**7.3. Hypergeometrische Verteilung.** Wir stellen uns vor, dass wir aus einer Urne mit  $N$  Kugeln  $n$  Kugeln *ohne Zurücklegen* ziehen. In der Urne seien  $K$  'Trefferkugeln'. Wir interessieren uns für die Variable  $X =$  Trefferzahl. Dann hat man wieder

$$X = \sum_{k=0}^n X_k,$$

wobei  $X_k =$  Trefferzahl bei Ziehen der  $k$ . Kugel. Aber die Variablen  $X_k$  sind nicht mehr unabhängig (bei Ziehen mit Zurücklegen wäre die gesamte Trefferzahl  $(n, \frac{K}{N})$  – binomialverteilt). Hier liegt die  $(N, K, n)$  – hypergeometrische Verteilung vor. Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Trefferzahlen sind leicht auszurechnen: Wir haben die Laplace-Situation, und  $\Omega$  ist die Menge aller Teilmengen der  $N$  Kugeln, welche  $n$  Elemente enthalten. Also

$$|\Omega| = \binom{N}{n}.$$

Ebenso ist für das Ereignis  $X = k$  die Anzahl der Fälle einfach

$$\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k},$$

weil man dabei  $k$  Kugeln aus  $K$  Trefferkugeln und unabhängig  $n-k$  Kugeln aus den  $N-K$  'Nietenkugeln' ziehen muss. Also ist die Verteilung einfach:

$$P(X = k) = f_X(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

**Beispiel:** In einer Urne sind  $N = 5$  Kugeln, davon sind  $K = 3$  rote Kugeln, wir ziehen  $n = 3$  Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen wir dabei genau zwei rote? Wir haben

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Zum Vergleich: Bei Ziehen mit Zurücklegen bekommt man mit der  $(3, \frac{3}{5})$  – Binomialverteilung:

$$P(X_{binv} = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 = 0.432.$$

Die letztere Wahrscheinlichkeit ist also deutlich geringer. Das ist auch so zu erwarten: Tatsächlich ist die Varianz der entsprechenden hypergeometrischen Verteilung geringer als die der Binomialverteilung.

Wir berechnen  $\mu$  und  $\sigma^2$  für eine  $(N, K, n)$  – hypergeometrisch verteilte Variable.

Zunächst stellen wir fest, dass mit den eingeführten Variablen  $X_k$  gilt:

$$(1) \quad \mu(X_k) = \frac{K}{N}, \text{ also unabhängig von } k.$$

Dafür haben wir natürlich mit bedingten Wahrscheinlichkeiten zu rechnen außer für  $k = 1$ , klar gilt die Aussage (1) für  $k = 1$ . Nun hat man aber weiter mit Induktion - wir setzen die Aussage für  $k$  voraus:

$$\begin{aligned} \mu(X_{k+1}) &= P(X_{k+1} = 1 | X_k = 1) P(X_k = 1) + P(X_{k+1} = 1 | X_k = 0) P(X_k = 0) \\ &= \frac{K-1}{N-1} \frac{K}{N} + \frac{K}{N-1} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \\ &= \frac{K}{N-1} \left(\frac{K-1+N-K}{N}\right) \\ &= \frac{K}{N}. \end{aligned}$$

Es folgt aus (1) nun:

$$\mu(X) = \sum_{k=1}^n \mu(X_k) = n \frac{K}{N}.$$

Der Erwartungswert ist also wie bei der entsprechenden Binomialverteilung. Aber die Varianz ist kleiner, wir berechnen sie so:

$$\sigma^2(X) = \mu(X^2) - \mu^2(X).$$

Nun ist

$$\mu(X^2) = \mu\left((X_1 + \dots + X_n)^2\right) = \sum_{k=1}^n \mu(X_k^2) + \sum_{i \neq j} \mu(X_i X_j).$$

Dabei hat man mit  $X_k = X_k^2$  (in diesem Falle!):

$$\sum_{k=1}^n \mu(X_k^2) = n \frac{K}{N}.$$

Ferner für  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ :

$$\begin{aligned} \mu(X_i X_j) &= 1 \cdot P(X_i = 1 \cap X_j = 1) \\ &= P(X_i = 1 | X_j = 1) \cdot P(X_j = 1) \\ &= \frac{K-1}{N-1} \cdot \frac{K}{N}. \end{aligned}$$

Die Paare  $(i, j)$  mit  $i \neq j$  haben die Anzahl  $n(n-1)$ . Also

$$\begin{aligned} \mu(X^2) &= n \frac{K}{N} + n(n-1) \frac{K-1}{N-1} \cdot \frac{K}{N} \\ &= n \frac{K}{N} \left(1 + (n-1) \frac{K-1}{N-1}\right). \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= n \frac{K}{N} \left(1 + (n-1) \frac{K-1}{N-1}\right) - n^2 \frac{K^2}{N^2} \\ &= n \frac{K}{N} \left(1 + (n-1) \frac{K-1}{N-1} - n \frac{K}{N}\right) \\ &= n \frac{K}{N} \cdot \frac{N^2 - Nn - NK + nK}{(N-1)N} \\ &= n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1} \end{aligned}$$

Jetzt sieht man deutlich: Die Varianz der entsprechenden Binomialverteilung wäre

$$n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} = np(1-p).$$

Hier kommt also noch der Faktor  $\frac{N-n}{N-1}$  hinzu, der kleiner als 1 ist, wenn  $n > 1$ . Wenn  $N$  viel größer ist als  $n$ , so ist der Unterschied sehr gering, auch kann man dann die hypergeometrische Verteilung überhaupt durch Binomialverteilung nähern. Aber mit mäßigem  $N$  und beträchtlichem  $n$  werden die Unterschiede sehr groß. Etwa für  $N = 11$  und  $n = 6$  wird die Varianz durch den Faktor halbiert. Entsprechend wird die Wahrscheinlichkeit größer, nahe beim Erwartungswert zu liegen. Das sah man oben im Wahrscheinlichkeitsbeispiel.

Wir fassen zusammen:

SATZ 38. Für eine  $(N, K, n)$ -hypergeometrisch verteilte Zufallsvariable  $X$  gilt:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= f_X(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \\ \mu(X) &= n \frac{K}{N}, \\ \sigma^2(X) &= n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}. \end{aligned}$$

**Eine Anwendung der hypergeometrischen Verteilung:** Man hat etwa folgende absolute Häufigkeiten beobachtet, mit denen Geräte nach Reparatur defekt oder in Ordnung waren:

	defekt	funktionstüchtig
Werkstatt A	5	1
Werkstatt B	1	5

Wie wahrscheinlich wäre eine solche Abweichung (nach beiden Seiten, also auch zugunsten von A), wenn man annimmt, dass von den 12 Geräten genau sechs objektiv reparierbar waren und von den 12 Geräten zufällig je sechs zu beiden Werkstätten geschickt worden wären, so dass das Resultat nichts mit der Qualität der Werkstätten zu tun hätte? Diese Wahrscheinlichkeit wäre:

$$2 \cdot \left( \frac{\binom{6}{1} \binom{6}{5}}{\binom{12}{6}} + \frac{\binom{6}{0} \binom{6}{6}}{\binom{12}{6}} \right) \approx 0.08.$$

Das wäre also noch immer nicht so unwahrscheinlich, dass man es nicht als 'Zufall' betrachten könnte. Allerdings würde man bereits ein wenig darin zweifeln, ob Werkstatt A genau so gut ist wie B. Für solche Tafeln wird es natürlich lästig, hypergeometrisch zu rechnen, wenn die Beobachtungszahlen viel größer sind. Dann benutzt man die  $\chi^2$ -Verteilung mit einem Freiheitsgrad (s.u.). Statt an Geräte kann man auch denken an 'geheilt' - 'nicht geheilt' und 'Medikament A', 'Medikament B'. Auch dann kann man fragen, wie wahrscheinlich eine solche Abweichung wäre, wenn man nur Leute, die ohne Medikamente überhaupt 'geheilt' oder 'nicht geheilt' würden, zufällig den Medikamenten zugeführt hätte - so etwas soll ja wohl vorkommen.

**Verallgemeinerung auf mehr als zwei Sorten:** Analog zur Multilinearverteilung hat man auch eine leichte Verallgemeinerung der hypergeometrischen Verteilung auf den Fall von mehr als zwei Sorten der Kugeln in einer Urne: Sind in einer Urne  $N$  Kugeln, davon  $K_i$  der Sorte  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , mit  $m \geq 2$ , also insbesondere  $\sum_{i=1}^m K_i = N$ , und werden  $n$  Kugeln herausgezogen *ohne Zurücklegen*, dann bezeichnen wir mit  $X_i$  die Anzahl der gezogenen Kugeln der Sorte  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Es gilt dann für alle Tupel  $(k_i)_{1 \leq i \leq m}$  mit  $k_i \in \mathbb{N}_0$  für  $1 \leq i \leq m$  und  $\sum_{i=1}^m k_i = n$ :

$$\begin{aligned} P(X_1 = k_1 \cap X_2 = k_2 \cap \dots \cap X_m = k_m) &= P\left(\bigcap_{i=1}^m P(X_i = k_i)\right) \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \prod \binom{K_i}{k_i}. \end{aligned}$$

Die Begründung ist einfach: Wieder haben wir einen Laplace-Raum mit  $\binom{N}{n}$  möglichen Fällen, und wieder zählt man nur die Zahl der 'günstigen' Fälle ab und kommt auf  $\prod \binom{K_i}{k_i}$ .

**7.4. Poisson-Verteilung.** Wir wollen die Poissonverteilung betont nicht als Näherung der Binomialverteilung für gewisse Parameterbereiche auffassen, weil sie ihre eigene Rolle spielt. Es handelt sich darum: Man hat eine Variable 'Trefferzahl', die sich nicht auf eine Zahl  $n$  diskreter Versuche bezieht, sondern 'Treffer' sollen zu jedem Zeitpunkt passieren können und vor allem unabhängig davon eintreten, ob zuvor viele oder wenige 'Treffer' passierten. Ein Beispiel:  $X$  = Zahl kosmischer Teilchen, die pro Sekunde auf einer Fläche eintreffen. Oder auch die Zahl atomarer Zerfälle, die in einem radioaktiven Material pro Sekunde festzustellen sind. In solchen Fällen hat man einen festen Erwartungswert  $\lambda > 0$  für die Zahl

der Treffer pro Zeiteinheit (oder pro Raum-Zeit-Einheit). Dieser Erwartungswert und die Unabhängigkeit sind die definierenden Merkmale allein.

**Bemerkung:** Oft wird heute noch von der Poissonverteilung als von der Verteilung 'seltener Ereignisse' gesprochen. Das ist ein Relikt aus frühen bekannten Anwendungen ('Tödliche Unfälle mit Pferden in der preußischen Armee'), hat aber nichts mit der Sache zu tun. Kosmische Teilchen kommen als wahre Schauer, dabei wird  $\lambda$  riesig sein. Gerade heute lägen ganz andersartige Anwendungen nahe. Darum ist es stets ungünstig, mathematische Begriffe und Resultate auf zunächst liegende Anwendungen herunter zu projizieren. Das ergibt nicht nur eine Blockierung weitergehender Anwendungen, sondern es entstehen dabei auch Vorstellungen, die schief liegen und nicht zur Sache Gehöriges als definierend umdeuten. Dies Phänomen ist sehr häufig zu beobachten. Allerdings entpuppt sich, wenn man genauer hinschaut, dass der Grund für die schiefe Auffassung im vorliegenden Fall in einer zu ungenauen Formulierung liegt: Wenn  $\lambda$  groß ist, so hat man eine sehr gute Näherung der  $\lambda$ -Poissonverteilung durch die Normalverteilung (mit dem entsprechenden  $\mu = \lambda$  und  $\sigma = \sqrt{\lambda}$ ). Also ist nur bei kleinem  $\lambda$  (also den 'selteneren Ereignissen') wichtig, mit der Poissonverteilung selbst zu rechnen. (Kein Mensch käme aber darauf, dass es sich um eine numerische Bemerkung handelt, wenn er hört, die Poissonverteilungen seien 'die der seltenen Ereignisse'.)

Wenn es nun zur Wahrscheinlichkeitsfunktion geht, dann werden wir allerdings Binomialverteilungen verwenden, doch in dem Sinne, dass wir die  $\lambda$ -Poissonverteilung als Limes der Binomialverteilungen mit  $\lambda = np$  fest und  $n \rightarrow \infty$  (also entsprechend  $p = \lambda/n \rightarrow 0$ ) bilden. Damit nähern wir uns der kontinuierlichen Zeit, die gemeint ist.

Wir haben ( $k$  wird festgehalten (!)):

$$\begin{aligned} P(X_{binv(n, \lambda/n)} = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Nun bilden wir den Limes für  $n \rightarrow \infty$ . Der erste Faktor geht offenbar gegen 1, der zweite ist konstant, und der dritte geht gegen  $e^{-\lambda}$ . Wir kennen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

und daraus folgt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda},$$

weil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)^k = 1^k = 1.$$

Damit haben wir für eine  $\lambda$ -Poisson-verteilte Zufallsvariable  $X$ :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Wir berechnen noch Erwartungswert und Varianz - der Erwartungswert ist  $\lambda$  nach Konstruktion. Nun hat man

$$\mu(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda(\lambda + 1).$$

Damit also

$$\sigma^2(X) = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda.$$

Die Varianz ist also wieder  $\lambda$ . Das sollte auch nicht überraschen, da die Varianzen der Binomialverteilungen, als deren Limes wir die Poissonverteilung bildeten, ebenfalls gegen  $\lambda = np$  gehen - sie sind  $np(1-p) = \lambda(1 - \frac{\lambda}{n})$ , und das geht gegen  $\lambda$ .

SATZ 39. Sei  $X$   $\lambda$ -Poisson-verteilt (stets  $\lambda > 0$ ). Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \text{ für } k \in \mathbb{N}_0, \\ \mu(X) &= \lambda, \\ \sigma^2(X) &= \lambda, \text{ also } \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

**Beispiel:** Erwartet man auf einer winzigen Fläche 5 kosmische Teilchen pro Sekunde, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, in der nächsten Sekunde genau 3 Teilchen zu beobachten:

$$P(X = 3) = e^{-5} \frac{5^3}{3!} \approx 0.14.$$

## 8. Verteilungen mit Dichte

**8.1. Normalverteilungen.** Das sind die wichtigsten überhaupt. Das liegt daran, dass lange Summen unabhängiger Variablen beinahe immer näherungsweise normalverteilt sind. Dabei bedeutet 'lang' tatsächlich oft in der Praxis bereits, dass Längen unter 10 bereits ausreichen. Insbesondere ist die Verteilung einer Mittelwertsgröße  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  mit  $X_k$  Kopie von  $X$  stets näherungsweise normalverteilt, bereits mit geringem  $n$ . Das gilt natürlich dann auch für  $\sum_{k=1}^n X_k$ , also z.B. für eine binomialverteilte Variable. Welches  $n$  für eine gute Näherung ausreicht, das hängt von der Schiefe der Verteilung ab. Im Allgemeinen ist  $n = 10$  schon sehr gut. Aber beispielsweise für eine Binomialverteilung ist die Faustregel  $np(1-p) \geq 10$ . Das bedeutet: Wenn  $p(1-p)$  klein ist, d.h. die Binomialverteilung sehr schief, braucht man größeres  $n$ .

Wir werden zunächst das technische Grundwissen bereitstellen, um dann typische Anwendungen auszuführen.

DEFINITION 42. Eine Variable  $X$  heißt  $(\mu, \sigma)$ -normalverteilt, wenn sie verteilt ist mit der Dichte

$$\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Also lautet ihre Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \Phi_{\mu, \sigma}(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  sind dabei gerade Erwartungswert und Streuung. Die Normalverteilung mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  heißt Standard-Normalverteilung.

FOLGERUNG 10. Man hat folgende praktisch wichtigen Formeln:

$$(1) \quad \Phi_{\mu, \sigma}(a) = \Phi_{0,1}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Sei  $a_{\mu, \sigma}(p)$  für  $0 < p < 1$  dadurch definiert, dass

$$\Phi_{\mu, \sigma}(a_{\mu, \sigma}(p)) = p. \text{ D.h. } a_{\mu, \sigma}(p) = \Phi_{\mu, \sigma}^{-1}(p).$$

Dann hat man

$$(2) \quad a_{\mu, \sigma}(p) = \mu + \sigma \cdot \Phi_{0,1}^{-1}(p),$$

$$(3) \quad a_{0,1}(p) = \Phi_{0,1}^{-1}(p).$$

Also: Für eine  $(\mu, \sigma)$ -normalverteilte Zufallsvariable  $X$  gilt:

$$(4) \quad P(X \leq a) = \Phi_{0,1}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

$$(5) \quad P\left(\mu - \sigma a_{0,1}\left(p + \frac{1-p}{2}\right) \leq X \leq \mu + \sigma a_{0,1}\left(p + \frac{1-p}{2}\right)\right) = p.$$

Der Bereich  $\mu \pm \sigma a_{0,1}\left(p + \frac{1-p}{2}\right)$  heißt naheliegender zweiseitiges  $p$ -Vertrauensintervall (symmetrisch um  $\mu$ ) für die  $(\mu, \sigma)$ -Normalverteilung. Entsprechend gibt (2) die Grenzen für einseitige Vertrauensintervalle.

**Bemerkung:** (5) ist anschaulich leicht zu verstehen: Nach (2) liegt im Bereich  $(\mu + \sigma a_{0,1}(p + \frac{1-p}{2}), \infty)$  die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1-p}{2}$ , mit der Symmetrie um  $\mu$  also auch im Bereich  $(-\infty, \mu - \sigma a_{0,1}(p + \frac{1-p}{2}))$  genau diese Wahrscheinlichkeit, zusammen  $1-p$ . Somit liegt im Bereich  $\mu \pm \sigma a_{0,1}(p + \frac{1-p}{2})$  die Wahrscheinlichkeit  $p$ .

**Bemerkung:** Der Parameter  $\sigma$  bedeutet eine Streckung längs der  $x$ -Achse mit Faktor  $\sigma$  und eine Stauchung längs der  $y$ -Achse mit Faktor  $\sigma$ . Die Dichte sieht glockenförmig aus, der Gipfel liegt bei  $x = \mu$ , die Streuung ist der Abstand zwischen Mittelwert und den Wendepunkten. Die Verteilung ist symmetrisch um  $\mu$ .

Die Folgerung ergibt sich direkt aus Streckung und Verschiebung sowie der Symmetrie.

**Praktische Bemerkung:** Man kann das Integral nicht elementar ausrechnen. Darum benötigt man eine Tabelle für die Standard-Normalverteilung, dann kann man die anderen auch berechnen. Mit einem Computeralgebraprogramm ist das nicht nötig, man bekommt alles numerisch. Benötigte sofort für beliebige  $\mu, \sigma$ . Aber es bleibt nützlich, ein paar Grundwahrscheinlichkeiten und entsprechende Grenzen für die Standard-Normalverteilung zu kennen, damit kann man Vieles im Kopf überschlagen. Hier ist eine solche Tabelle:

$a$	-3.1	-2.58	-2.33	-1.96	-1	1	1.96	2.33	2.58	3.1
$\Phi_{0;1}(a)$	0.001	0.005	0.01	0.025	0.159	0.841	0.975	0.99	0.995	0.999

### Wichtigste Anwendungen:

1.) Wenn  $X$  eine  $(\mu, \sigma)$ -normalverteilte Zufallsvariable ist, dann hat man z.B.

$$P(X > \mu + \sigma) = 1 - \Phi_{0;1}\left(\frac{\nu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi_{0;1}(1) = \Phi_{0;1}(-1) = 0.159.$$

2.) Wenn  $X$  eine  $(100, 10)$ -normalverteilte Zufallsvariable ist, dann lautet das zweiseitige 95%-Vertrauensintervall für  $X$ , symmetrisch um  $\mu = 100$ :

$$100 \pm 10 \cdot 1.96.$$

Das ist also grob das Intervall  $[80; 120]$ . Man hat also um Bereich  $\mu \pm 2\sigma$  etwas mehr als 95% aller Fälle. Das ist eine gern benutzte Faustregel. Ebenso macht man sich klar, wie groß dann erst die Anteile in den Bereichen  $\mu \pm 3\sigma$ ,  $\mu \pm 5\sigma$  sind. Im letzteren Fall fehlt nur noch weniger als ein Millionstel an 1.

3.) Es sei  $p = 0.4$  eine 'Treffer'-Wahrscheinlichkeit im Einzelversuch. Für die Variable 'relative Trefferhäufigkeit bei 1000 unabhängigen Versuchen' hat man dann in sehr guter Näherung das zweiseitige 99%-Vertrauensintervall:

$$0.4 \pm \frac{\sqrt{0.4 \cdot 0.6}}{\sqrt{1000}} \cdot 2.33,$$

also wird mit Wahrscheinlichkeit 0.99 die beobachtete relative Häufigkeit der Treffer in folgendem Bereich liegen:

$$[0.3639; 0.4361].$$

Es sei bemerkt, dass man dies exakt auszurechnen hätte mit der entsprechenden Binomialverteilung. Das wäre aber sehr viel mühsamer und unnötig genau.

Abschließend wollen wir noch den wichtigen Zentralen Grenzwertsatz formulieren, der sehr allgemein aussagt, dass lange Summen unabhängiger Variablen näherungsweise normalverteilt werden unter gewissen Bedingungen an die Streuungen. Klar muss man ausschließen, dass eine der Variablen Streuung  $> 0$  hat und alle anderen Streuung Null, um einen Extremfall zu nennen. Das besorgt die Lyapunov-Bedingung im folgenden Satz.

**SATZ 2 (Zentraler Grenzwertsatz).** *Es sei  $(X_k)_k$  eine Folge von Zufallsvariablen mit  $\mu(X_k) = \mu_k$  und  $\sigma(X_k) = \sigma_k$  und ferner existiere ein  $\delta > 0$ , so dass  $\mu\left((X_k - \mu_k)^{2+2\delta}\right)$  existiert und folgende Lyapunov-Bedingung erfüllt ist:*

$$(L) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \mu\left(|X_k - \mu_k|^{2+2\delta}\right)}{\left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)^{1+\delta}} = 0,$$



dann geht die Verteilungsfunktion der Variablen

$$U_n := \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}$$

gegen  $\Phi_{0,1}$ , also die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. Das heißt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n \leq a) = \Phi_{0,1}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

**Bemerkung:** Unsere Standard-Anwendung dieses Satzes ist die auf Variablen der Form  $\bar{X}$ . Dann hat man  $X_k = X$  und  $\mu_k = \mu$ ,  $\sigma_k = \sigma$ , ferner  $\mu(|X_k - \mu_k|^{2+2\delta}) = \mu_\delta$ , alle unabhängig von  $k$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \mu(|X_k - \mu_k|^{2+2\delta})}{(\sum_{k=1}^n \sigma_k^2)^{1+\delta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\mu_\delta}{(n\sigma^2)^{1+\delta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^\delta} \cdot \frac{\mu_\delta}{\sigma^{2+2\delta}} \right) = 0.$$

Mit dem Satz folgt nun im Spezialfall, dass

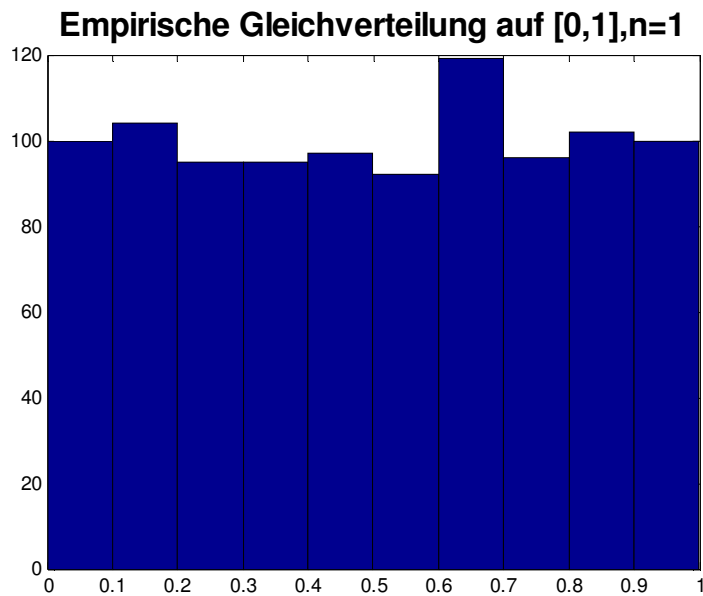
$$U_n = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}} = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

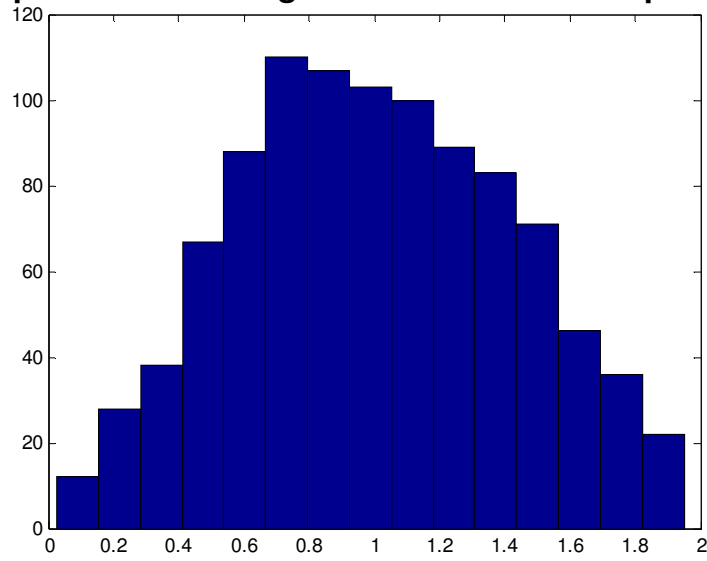
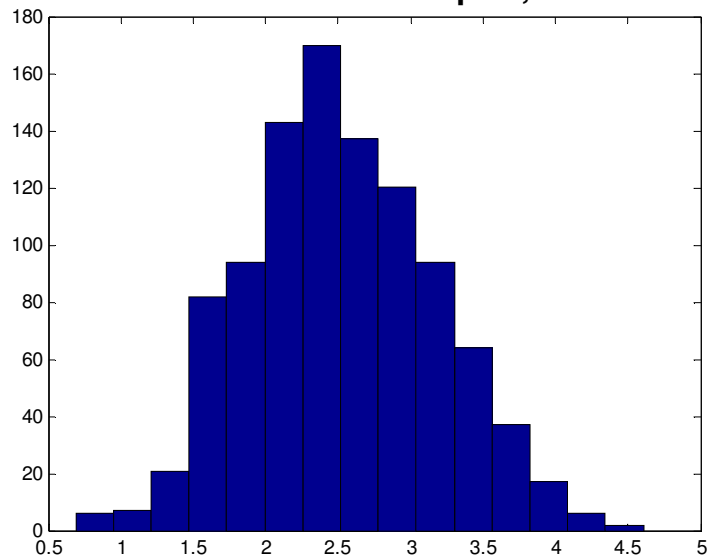
näherungsweise standard-normalverteilt ist. Nun haben wir

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_n + \mu.$$

Da  $U_n$  näherungsweise  $(0, 1)$ -normalverteilt ist, ist  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  also näherungsweise  $\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ -normalverteilt.

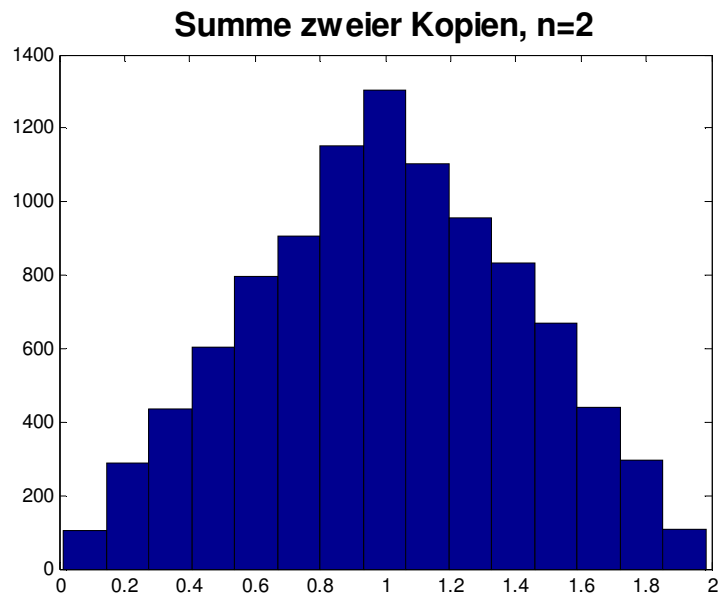
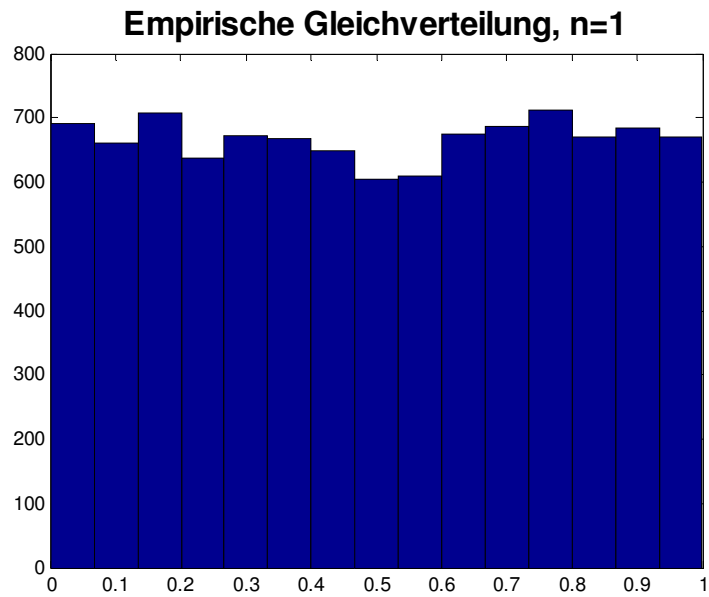
Abschließend wollen wir noch illustrieren, dass auch die Verteilung von  $\sum_{k=1}^n X_k$  mit unabhängigen Kopien  $X_k$  einer gleichverteilten Variablen auf  $[0, 1]$  gegen eine Normalverteilung geht, und dies tun wir anhand empirischer Verteilungen, mit Stichprobenumfang 1000, um zugleich zu demonstrieren, dass sich die empirischen Verteilungen mit wachsendem Stichprobenumfang der exakten Verteilung nähern. Wir zeigen beide Umstände in Dichtefunktionsbildern -  $n$  ist jeweils der Index, für den  $\sum_{k=1}^n X_k$  gebildet wird:

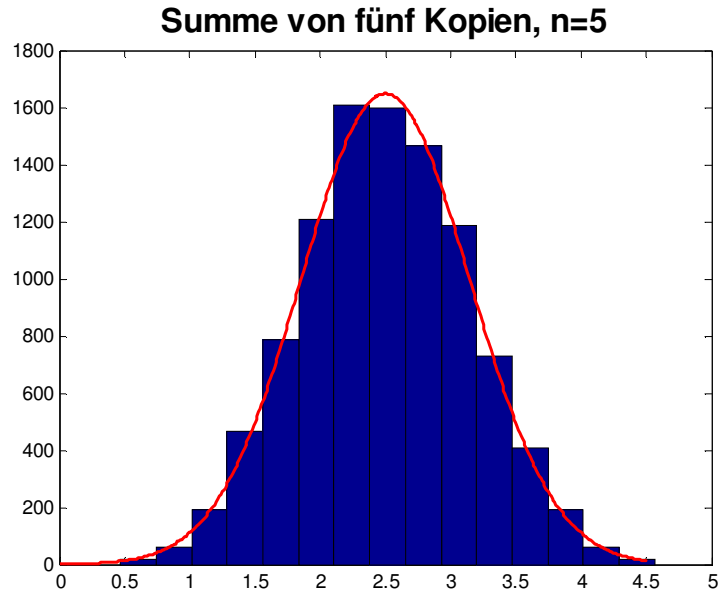


**Empirische Verteilung der Summe zweier Kopien,  $n=2$** **Summe von fünf Kopien,  $n=5$** 

**Bemerkung:** Man sieht, wie aus der Gleichverteilung bereits mit der Summe von fünf Kopien die Normalverteilungs-Gestalt entsteht. Die Näherungen sind noch grob bei dem gewählten Stichprobenumfang 1000. Für  $n = 2$  ergibt sich exakt eine Dreiecksverteilung. Wir zeigen dasselbe noch einmal mit

Stichprobenumfang 10000 mit viel besserer Näherung an die mathematisch exakten Dichten:





**Bemerkung:** Im letzten Bild wurde mit passender Skalierung die zugehörige Normalverteilungsglocke mit eingezeichnet (rot). Dazu beachtet man  $\mu = 5/2$  und  $\sigma = \sqrt{5/12}$ , da die Varianz der Gleichverteilung auf  $[0, 1]$  lautet:

$$\sigma^2 = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

## 9. Einige Anwendungen der Normalverteilung

**9.1. Anwendung auf die Binomialverteilungen.** Wenn wir wissen wollen, in welchem (möglichst kleinen) Bereich um 1000 die Anzahl der 'Treffer' bei 2000 Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 liegt, bei Trefferwahrscheinlichkeit  $p = 1/2$ , dann wäre es auch noch mit einem Computeralgebraprogramm sehr mühsam, diese Frage zu beantworten. Mit der Normalverteilung, welche die Parameter  $\mu, \sigma$  mit der angesprochenen Binomialverteilung gemeinsam hat, ist das sehr leicht und fast im Kopf zu machen: Wir haben  $\mu = 1000$ ,  $\sigma = \sqrt{2000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10\sqrt{5}$  und nun bilden wir das 95%-Vertrauensintervall symmetrisch um  $\mu = 1000$  für die  $(1000, 10\sqrt{5})$ -Normalverteilung, das ist

$$1000 \pm 1.96 \cdot 10 \cdot \sqrt{5},$$

die Grenzen sind also 956.1730676 und 1043.826932 und wir haben das Intervall

$$[956; 1044],$$

da unsere binomialverteilte Variable nur ganzzahlige Werte zulässt. Das ist die *exakte Antwort* auf unsere Frage. Tatsächlich bestätigt man mit einem geeigneten Computeralgebraprogramm, dass für eine Zufallsvariable  $X$ , welche binomialverteilt ist mit  $n = 2000$  und  $p = \frac{1}{2}$  gilt:

$$\begin{aligned} P(956 \leq X \leq 1044) &= 0.9509 \text{ (gerundet) und} \\ P(957 \leq X \leq 1043) &= 0.9455 \text{ (gerundet).} \end{aligned}$$

Wir haben geringere Genauigkeit zu erwarten bei  $p \neq 1/2$  und bei kleinerem  $n$ . Versuchen wir uns am Beispiel  $n = 278$ ,  $p = 0.1$ . Dann bekommen wir für die Frage nach dem kleinsten Intervall um  $\mu = 27.8$ , das die Wahrscheinlichkeit 0.95 besitzt, mit der Normalverteilung:

$$27.8 \pm 1.96 \cdot \sqrt{278 \cdot 0.1 \cdot 0.9},$$

ganzzahlig also das Intervall

$$[17; 38]$$

Auch das sind die exakten Grenzen, welche für die Binomialverteilung gelten, unter der Voraussetzung, dass das Intervall so weit wie möglich symmetrisch zum Mittelwert liegt. Lassen wir diese Forderung beiseite, so können wir die untere Grenze durch 18 ersetzen. Auch das gibt die Näherung mit der Normalverteilung her, wenn man die sogenannte **Stetigkeitskorrektur** vornimmt:

**BEMERKUNG 1** (Stetigkeitskorrektur). *Nähert man eine diskrete Verteilung einer Zufallsvariablen  $X$ , die nur ganzzahlige Werte annimmt, durch eine stetige Verteilung (deren Verteilungsfunktion sei  $F$ ), z.B. eine Normalverteilung, dann werden die Resultate genauer, wenn man die Näherung mit folgender sogenannter Stetigkeitskorrektur für die Grenzen vornimmt:*

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &\approx F\left(k + \frac{1}{2}\right), \\ P(X \geq k) &\approx F\left(k - \frac{1}{2}\right), \\ P(k_1 \leq X \leq k_2) &\approx F\left(k_2 + \frac{1}{2}\right) - F\left(k_1 - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Für die Bildung von (nahezu um  $\mu$  symmetrischen) Vertrauensintervallen zur Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  heißt das: Wenn  $[a, b]$  das entsprechende Intervall zu  $F$  ist, also  $F(b) - F(a) = \alpha$ , dann setze für  $X$  das Intervall an:  $[\alpha, \beta]$ , mit

$$\begin{aligned} \alpha &= k_1, \text{ mit } k_1 := \text{größte ganze Zahl mit } k_1 - \frac{1}{2} \leq a, \\ \beta &= k_2, \text{ mit } k_2 := \text{kleinste ganze Zahl mit } k_2 + \frac{1}{2} \geq b. \end{aligned}$$

**Erklärung:** Man kann die exakte diskrete Verteilung mit einem Histogramm exakt wiedergeben, bei dem für jeden Wert  $k$  von  $X$  ein Histogrammkästchen gebildet wird mit den Grenzen  $k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}$  und der Höhe  $P(X = k)$ . Dann nähert sich die Dichte  $f = F'$  der Treppenfunktion. Nun ist die Wahrscheinlichkeit  $P(k_1 \leq X \leq k_2)$  also näherungsweise der Flächeninhalt der vom Graphen von  $f$  mit der  $x$ -Achse eingeschlossenen Fläche im Bereich der Histogrammkästen zu den Werten  $k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$ , und dazu gehört als untere Grenze  $k_1 - \frac{1}{2}$ , als obere  $k_2 + \frac{1}{2}$ . Ebenso erklären sich alle anderen Aussagen.

**Beispiele zum Genauigkeitsvergleich mit und ohne Stetigkeitskorrektur:**

**1. Beispiel:** Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit für höchstens 6 mal 'Kopf' bei 10 Münzwürfen, also  $P(X \leq 6)$  für eine binomialverteilte Variable  $X$  mit  $n = 10, p = \frac{1}{2}$ . Das gibt exakt

$$P(X \leq 6) = \sum_{k=0}^6 \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{53}{64} = 0.828125.$$

Mit Näherung durch entsprechende Normalverteilung,  $\mu = 5, \sigma = \frac{1}{2}\sqrt{10}$  bekommt man

**bei Näherung ohne Stetigkeitskorrektur :**

$$P(X \leq 6) \approx \Phi_{0,1}\left(\frac{6-5}{\frac{1}{2}\sqrt{10}}\right) = \Phi_{0,1}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = 0.7365,$$

**bei Näherung mit Stetigkeitskorrektur :**

$$P(X \leq 6) \approx \Phi_{0,1}\left(\frac{6.5-5}{\frac{1}{2}\sqrt{10}}\right) = \Phi_{0,1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 0.828609.$$

Man sieht sehr deutlich, wie viel besser das Resultat mit der Stetigkeitskorrektur wird. Natürlich werden die Unterschiede geringer bei größerem  $n$ , aber das ist kein vernünftiger Grund dafür, die Korrektur fallenzulassen, wenn  $n$  noch so groß ist (solche irrationalen 'Regeln' finden sich bei 'Praktikern', die sich nichts überlegen, sondern lieber irgendwelchen unsinnigen Traditionen folgen). Denn es kostet doch nichts, die Korrektur zu machen!

**Bemerkung:** Das Beispiel zeigt, dass die Näherung sogar noch in einem Bereich gute Resultate liefern kann, auch wenn man die Faustregel  $np(a-p) \geq 5$  verletzt. Aber selbstverständlich würde man in solchen Beispielen exakt rechnen.

**2. Beispiel:**

Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit für mindestens 1700 Sechsen bei 10000 Würfel-Würfen. Nennen wir die Anzahl der Sechsen  $X$ , dann haben wir das exakte Ergebnis

$$P(X \geq 1700) = 0.1890.$$

Näherung durch Normalverteilung ergibt:

$$\text{ohne Stetigkeitskorrektur} : P(X \geq 1700) \approx 1 - \Phi_{0,1} \left( \frac{1699 - 10000/6}{\sqrt{10000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \right) = 0.19281,$$

$$\text{mit Stetigkeitskorrektur:} \quad P(X \geq 1700) \approx 1 - \Phi_{0,1} \left( \frac{1699.5 - 10000/6}{\sqrt{10000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \right) = 0.18916.$$

Man beachte: Mit der Korrektur wird der Näherungsfehler eine ganze Größenordnung kleiner als ohne Korrektur!

**9.2. Anwendung der Normalverteilung auf die Schätzung von Mittelwerten, insbesondere Schätzung von Wahrscheinlichkeiten.** Es geht hier um folgendes Problem: Wenn wir ein Experiment 10 mal durchführen, dabei das Ereignis  $A$   $k$  mal auftritt, dann werden wir  $P(A)$  durch die Zahl  $k/10$  schätzen. Wenn wir das Experiment 100 mal durchführen und dabei  $A$   $l$  mal auftritt, so wird  $l/100$  als Schätzwert genommen. Wir werden erwarten, dass letzterer deutlich besser ist als ersterer. Doch das ist so offenbar falsch, wir könnten bei nur 10 Versuchen 'zufällig' auch ein viel besseres Resultat (also näher an  $P(A)$ ) erzielt haben. Was können wir dazu **Genaueres** sagen, das nicht so falsch ist? Zunächst sollte man klären, wie eine vernünftige Aussage lauten würde. Sie kann nicht besagen, dass ein Schätzwert mit Sicherheit höchstens um  $\varepsilon > 0$  vom tatsächlichen Wert  $P(A)$  abweicht, sondern nur so:

(\*) 'Der Schätzwert  $\frac{k}{n}$  für  $P(A)$  liegt mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  höchstens um  $\varepsilon$  von  $P(A)$  entfernt.'

Dabei kann man nun  $\alpha$  (nahe bei 1 ist erwünscht) vorgeben und  $\varepsilon$  bestimmen. Man kann auch  $\varepsilon$  vorgeben und  $\alpha$  bestimmen, beides bei vorgegebenem  $n$ . Für die Praxis ist es natürlich wichtig,  $\alpha$  und  $\varepsilon$  vorzugeben, so dass die Aussage (\*) inhaltlich befriedigt, und zu fragen, wie groß man  $n$  wählen muss, um diese Sicherheit und Genauigkeit der Schätzung zu erreichen.

**Beispiel:** Wir geben  $n = 100$  vor und fragen, wie groß  $\varepsilon$  wird bei  $\alpha = 0.95$ . Für die Variable  $X =$  absolute Häufigkeit, mit welcher  $A$  bei 100 Versuchen eintritt, haben wir das zweiseitige Vertrauensintervall, bei Näherung durch Normalverteilung:

$$\mu \pm 2.58 \cdot \sqrt{100 \cdot p(1-p)}.$$

Dabei ist  $\mu = 100 \cdot p$  und  $p = P(A)$ . Nun wissen wir nicht, wie groß  $p$  ist, also auch nicht, wie groß die Streuung  $\sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)}$  ist. Aber wir wissen, dass diese Streuung maximal den Wert

$$\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 5$$

annehmen kann. Daher liegt der Schätzwert für die mittlere absolute Häufigkeit  $\mu = 100 \cdot p$  mit 95% Sicherheit im Bereich

$$\mu \pm 1.96 \cdot 5 \text{ oder } \mu \pm 9.8.$$

Wenn wir also  $P(A)$  durch die beobachtete relative Häufigkeit schätzen, so haben wir für den Fehler  $\varepsilon$  der Schätzung, der mit 95% Sicherheit eingehalten wird:

$$\varepsilon \leq \frac{10}{100}.$$

Wenn wir nun bei 100 Versuchen 40 mal das Ereignis  $A$  sehen, so können wir sagen:

Die unbekannte Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  liegt mit mindestens 95% Sicherheit im Bereich  $[0.3; 0.5]$ .

Das ist keine sehr befriedigende Genauigkeit. Wir wollen daher fragen, welchen Stichprobenumfang  $n$  wir brauchen, um mit (wenigstens) 95% Sicherheit eine Genauigkeit von 2 Prozentpunkten (also  $\varepsilon \leq 0.02$ )

zu erreichen. Dazu lösen wir die Gleichung - wir rechnen hier sofort mit der relativen Häufigkeitsgröße, deren Streuung entsprechend nur *höchstens*  $\frac{\sqrt{1/4}}{\sqrt{n}}$  beträgt:

$$1.96 \cdot \frac{\sqrt{1/4}}{\sqrt{n}} = 0.02$$

und finden

$$n \geq 2401.$$

Das ist also der Stichprobenumfang, den wir für die Aussage mit der Genauigkeit 0.02 und der Sicherheit 0.95 benötigen. Steigern wir nun die geforderte Sicherheit auf 0.99 oder 99%, dann ist die Zahl 1.96 zu ersetzen durch 2.58, und es kommt (man rechne das nach):

$$n = 4161.$$

**Ein zweites Beispiel:** Man möchte bei einer Fabrikation von Schrauben der Soll-Länge 10 cm die Qualität so gut haben, dass die tatsächliche mittlere Länge der Schrauben um höchstens 0.1 mm von 10 cm abweicht. Kann man anhand einer Stichprobe diese Aussage mit 99% Sicherheit treffen? Das lässt sich offenbar nur ermitteln, wenn wir wie im vorigen Beispiel eine Obergrenze für die Streuung der Schraubenlänge  $L$  angeben können. Nehmen wir nun an,  $\sigma(L) \leq 0.02$  mm. Dann hat man

$$\sigma(\bar{L}) = \frac{0.02}{\sqrt{n}}.$$

Wir nehmen nun an, dass in einer Stichprobe von 200 Schrauben gefunden wurde:  $\bar{l} = 10.07$ . ( $\bar{l}$  als beobachteter Wert von  $\bar{L}$ ). Dann haben wir  $\mu(L)$  mit Sicherheit 0.99 im Intervall

$$10.05 \pm 2.58 \cdot \frac{0.02}{\sqrt{200}}, \text{ also im Bereich } [10.066; 10.074].$$

Es kann also mit 99% Sicherheit gesagt werden, dass das Soll-Mittel um höchstens 0.074 mm verfehlt wird, somit im erwünschten Bereich. Wir können die Frage auch ein wenig modifizieren und fragen, mit welcher Sicherheit man noch sagen kann, dass der Mittelwertfehler unter 0.1 mm liegt. Dazu lösen wir

$$10.05 + x \cdot \frac{0.02}{\sqrt{200}} = 10.1$$

und finden  $x > 35.35$ . Das ist eine 'astronomisch große' Zahl für die  $(0, 1)$ -Normalverteilung. Wir sind praktisch sicher, dass das Soll-Mittel um höchstens 0.1 mm verfehlt wird. (Im Bereich  $\mu \pm 11\sigma$  hat man mehr als  $1 - 10^{-27}$  Wahrscheinlichkeit!)

**Bemerkung:** In beiden Beispielen benötigten wir eine Streuung, deren Wert unbekannt war, aber nach oben abgeschätzt werden konnte, einmal mit mathematischer Sicherheit, einmal (so angenommen) aus Erfahrung begründet. Es liegt die Frage nahe, ob man die Information über die Streuung, welche aus der Stichprobe selbst zu entnehmen ist, für genauere Resultate benutzt werden könnte. Das ist so, und wir besprechen im nächsten Abschnitt, wie man das technisch durchführt.

## 10. Anwendung der $t$ - Verteilung auf die Mittelwertschätzung

Wir wollen für einen unbekanntem Mittelwert  $\mu(X)$  ein Vertrauensintervall zur Wahrscheinlichkeit  $w$  angeben. Dabei nutzen wir wiederum einen beobachteten Wert von  $\bar{X}$ . Dazu wollen wir bei unbekannter Streuung  $\sigma(X)$  folgenden empirischen Schätzwert für  $\sigma$  verwenden:

$$s(X) := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}.$$

Dabei ist  $n$  der Stichprobenumfang,  $x_k$  der im  $k$ . Versuch beobachtete  $X$ - Wert,  $\bar{x}$  das beobachtete Stichprobenmittel.

**Erläuterung:** Es liegt zunächst nahe,  $\sigma^2$  zu schätzen wie einen Mittelwert, es handelt sich doch um die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert. Aber man stellt fest, dass der Erwartungswert von

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

gerade  $\sigma^2(X)$  ist. Man kann sich auch klarmachen, dass  $n = 1$  keinerlei Information über die Varianz geben kann. Somit würde man bei Nenner  $n$  statt  $n - 1$  die Streuung systematisch unterschätzen. (Die Schätzung hätte einen Bias, wie man sagt.)

Naiv würde man nun weiter so vorgehen, dass man  $s(X)$  für die unbekannte Streuung  $\sigma(X)$  in die Überlegungen des letzten Abschnitts einsetzt. (Übrigens wären die Resultate ab  $n = 100$  etwa ziemlich gut.) Aber dabei ist zu überlegen, dass  $s(X)$  eben nicht dasselbe ist wie  $\sigma(X)$ . Somit liegt es nahe, dass die Vertrauensgrenzen gegenüber der Normalverteilung ein wenig nach außen gerückt werden müssen, um die Möglichkeit zu kompensieren, dass  $s(X)$  eben auch zu klein ausgefallen sein könnte. Die Verteilung, mit der man dabei genau genommen zu arbeiten hat, heißt (Student's)  $t$ -Verteilung - der humorvolle Brite Gosset erfand sie, und er nannte sich selbst 'Student' -, und dazu hat man folgenden

SATZ 40 (Student's  $t$ -Verteilung). Wenn  $n \geq 2$ ,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  und  $S(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2}$ ,

dann ist die Zufallsvariable

$$T = \frac{X - \mu(X)}{S(X)}$$

$t$ -verteilt mit  $n - 1$  Freiheitsgraden. Für die Anwendung interessiert vor allem:

$$U = \frac{\bar{X} - \mu(X)}{S(\bar{X})}, \text{ mit } S(\bar{X}) := \frac{S(X)}{\sqrt{n}},$$

ist  $t$ -verteilt mit  $n - 1$  Freiheitsgraden. Die zugehörige Dichtefunktion lautet

$$f_{t,n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{n\pi}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}.$$

Dabei ist  $\Gamma$  die bekannte Gamma-Funktion, definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \text{ für } x \geq 0.$$

Sie hat die Eigenschaft, dass  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ , wie man über partielle Integration nachrechnet.

**Praktische Bemerkung:** Man wird auch hier erwarten, dass man die Werte der Verteilungsfunktion einer Tabelle oder heute besser einem Computeralgebraprogramm entnimmt, da man das Integral nicht elementar ausrechnen kann. Folgende Tabelle gibt Anhaltspunkte dafür, wie stark die  $t$ -Vertrauensgrenzen gegen die der Standard-Normalverteilung verschoben sind - zum Vergleich sind diese mit hinzugegeben:

Grade ↓	Wahrscheinlichkeit linksseitig von $a$	0.001	0.01	0.025	0.975	0.99	0.999
$\infty$	Grenzzahl $a$ für $\Phi_{0,1}$	-3.1	-2.33	-1.96	1.96	2.33	3.1
200	Grenzzahl für $F_{t,200}$	-3.131	-2.345	-1.972	1.972	2.345	3.131
100	Grenzzahl für $F_{t,100}$	-3.174	-2.364	-1.984	1.984	2.364	3.174
80	Grenzzahl für $F_{t,80}$	-3.195	-2.374	-1.990	1.990	2.374	3.195
60	Grenzzahl für $F_{t,60}$	-3.232	-2.390	-2.000	2.000	2.390	3.232
40	Grenzzahl für $F_{t,40}$	-3.307	-2.423	-2.021	2.021	2.423	3.307
20	Grenzzahl für $F_{t,20}$	-3.552	-2.528	-2.086	2.086	2.528	3.552
15	Grenzzahl für $F_{t,15}$	-3.733	-2.602	-2.131	2.131	2.602	3.733
10	Grenzzahl für $F_{t,10}$	-4.144	-2.764	-2.228	2.228	2.764	4.144
5	Grenzzahl für $F_{t,5}$	-5.893	-3.365	-2.571	2.571	3.365	5.893
2	Grenzzahl für $F_{t,2}$	-22.327	-6.965	-4.303	4.303	6.965	22.327



**Bemerkung:** Es ist zu beachten, dass bei Stichprobenumfang  $n$  die Zahl der Freiheitsgrade  $n - 1$  ist. Die Tabelle zeigt, dass die Unterschiede zur Normalverteilung bei 100 oder mehr Freiheitsgraden noch gering sind, bei 50 Freiheitsgraden schon merklich, unter 10 Freiheitsgraden drastisch. Mit einem Computeralgebraprogramm benötigt man keine Tabellen, sondern kann zu jeder Grenzzahl die Wahrscheinlichkeit (linksseitig) bekommen und umgekehrt zu jeder Wahrscheinlichkeit die zugehörige Grenzzahl, für alle Freiheitsgrade. Das sieht dann mit MAPLE etwa so aus, hier im Beispiel für 8 Freiheitsgrade:

$$\text{TDist}(x, 8) = 0.02$$

ergibt die Lösung:  $x = -2.448984990$ . Also für eine Variable  $X$ , welche  $t$ -verteilt ist mit 8 Freiheitsgraden:  $P(X \leq -2.448984990) = 0.02$ , umgekehrt:

$$\text{TDist}(-3, 8) = 0.008536,$$

also  $P(X \leq 3) = 0.008536$ .

### Anwendungsbeispiele:

**1. Beispiel:** Man hat bei 61 zufällig ausgewählten Werkstücken 6 Stücke mit Fabrikationsfehler entdeckt. Gesucht ist ein 95%-Vertrauensintervall für den Anteil der fehlerhaften Stücke in der Gesamtpopulation. Wir haben beobachtet -  $\bar{X}$  ist die Zufallsvariable: Relative Häufigkeit (oder Anteil) der fehlerhaften Werkstücke unter 61 zufällig ausgewählten:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{6}{61}, \\ s(\bar{X}) &= \sqrt{\frac{\frac{6}{61} \cdot \frac{55}{61}}{60}}.\end{aligned}$$

Wir wollen die zweite Aussage erklären: Man hat mit der Bernoulli-Variablen  $X$ , welche jedem Werkstück den Wert 1 für 'fehlerhaft' zuordnet, sonst den Wert Null,  $x_k$  ist der  $k$ . beobachtete Wert von  $X$ :

$$\begin{aligned}s^2(X) &= \frac{1}{60} \sum_{k=1}^{61} \left(x_k - \frac{6}{61}\right)^2 = \frac{61}{60} \left(\frac{1}{61} \sum_{k=1}^{61} \left(x_k - \frac{6}{61}\right)^2\right) \\ &= \frac{61}{60} \left(\frac{6}{61} \cdot \frac{55}{61}\right),\end{aligned}$$

daher

$$s(\bar{X}) = \frac{s(X)}{\sqrt{61}} = \frac{\sqrt{s^2(X)}}{\sqrt{61}} = \sqrt{\frac{\frac{6}{61} \cdot \frac{55}{61}}{60}}.$$

**Bemerkung:** Hier haben wir den Sonderfall, dass der beobachtete Mittelwert  $\bar{x} = \frac{6}{61}$  unmittelbar erlaubt,  $s(\bar{X})$  zu bestimmen. Normalerweise ist die Streuung völlig unabhängig vom Mittelwert. (Vgl. das zweite Beispiel weiter unten.)

Also ist das gesuchte Vertrauensintervall:

$$\frac{6}{61} \pm \sqrt{\frac{\frac{6}{61} \cdot \frac{55}{61}}{60}} \cdot 2.000,$$

da wir aus der Tabelle oben für 60 Freiheitsgrade die Grenzzahlen  $-2, 2$  für die Wahrscheinlichkeiten  $0.025, 0.975$  ablesen. Das Resultat: Mit 95% Sicherheit liegt der Anteil der fehlerhaften Werkstücke im Bereich

$$[0.02147; 0.1753].$$

**2. Beispiel:** Man hat bei 81 zufällig ausgewählten Schrauben einer Fabrikation die mittlere Länge 10.02 cm gefunden und den Streuungsschätzwert -  $l_k$  ist die Länge der  $k$ . Schraube der Stichprobe:

$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{80} \sum_{k=1}^{81} (l_k - 10.02)^2} = 0.03.$$

Gesucht ist ein 99%– Vertrauensintervall für die mittlere Länge der fabrizierten Schrauben. Das findet man sofort so:

$$10.02 \pm \frac{0.03}{\sqrt{81}} \cdot 3.195,$$

also liegt mit einer Sicherheit von 0.99 die mittlere Länge der fabrizierten Schrauben im Bereich

$$[10.00935; 10.03065].$$

**Bemerkung:** In diesem Beispiel sieht man, dass der empirische Mittelwert nichts über die Streuung aussagt und die Berechnung von  $s(X)$  wie hier noch einmal mit Einsetzen in die Formel wiederholt gesondert auszuführen ist. Das war im ersten Beispiel mit den relativen Häufigkeiten anders.

**10.1. Exponentialverteilungen.** Zur inhaltlichen Deutung: Eine Variable  $T$  ist  $\lambda$ -exponentialverteilt, wenn sie die Wartezeit bis zum ersten  $\lambda$ -Poisson-Treffer ist. Wir zeigen nunmehr, dass gilt:

$$P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Die zugehörige Dichte ist damit:

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}.$$

Man hat weiter:

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \\ \sigma^2(T) &= \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - \mu^2(T) \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2}, \text{ also} \\ \sigma(T) &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Klar bedeutet der Parameter  $\lambda$ , dass der Graph der Grundfunktion  $e^{-x}$  ( $x > 0$ ) mit Faktor  $\lambda$  längs der  $x$ -Achse gestaucht und mit Faktor  $\lambda$  längs der  $y$ -Achse gestreckt ist.

**Bemerkung:** Der Erwartungswert  $1/\lambda$  versteht sich von selbst: Erwartet man  $\lambda$  Poisson-Treffer pro Zeiteinheit, so sollte intuitiv die mittlere Wartezeit bis zum ersten Treffer  $1/\lambda$  (in der entsprechenden Zeiteinheit) sein.

**Begründung der Verteilungsfunktion:** Wir haben für die Verteilungsfunktion  $F(t) := P(T \leq t)$  (wir setzen dabei  $\Delta t > 0$ ):

$$F(t + \Delta t) - F(t) = P(t < T \leq t + \Delta t) = (1 - P(T \leq t)) \cdot (1 - e^{-\lambda \Delta t}).$$

Die erste Gleichung ergibt sich aus der Definition für  $F$ . Die zweite Gleichung kommt so: Das Ereignis  $t < T \leq t + \Delta t$  bedeutet: Im Zeitintervall  $[0, t]$  findet kein 'Treffer' statt, und im Zeitintervall  $(t, t + \Delta t]$  findet mindestens ein Treffer statt (d.h. 'nicht kein Treffer'). Aus der Poissoneigenschaft folgt, dass diese Ereignisse unabhängig sind, für die Wahrscheinlichkeit der Konjunktion also zu multiplizieren ist. Das erste hat die Wahrscheinlichkeit  $1 - P(T \leq t)$  nach Definition, das zweite hat aber die Wahrscheinlichkeit  $1 - e^{-\lambda \Delta t}$ , weil die erwartete Trefferzahl für das Zeitintervall der Länge  $\Delta t$  gerade  $\lambda \Delta t$  ist, somit gemäß Poisson-Wahrscheinlichkeitsformel:

$$P(\text{'kein Treffer im Zeitintervall der Länge } \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda \Delta t}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer ist also  $1 - e^{-\lambda \Delta t}$ . Aus der Gleichung

$$(2) \quad F(t + \Delta t) - F(t) = (1 - P(T \leq t)) \cdot (1 - e^{-\lambda \Delta t}) = (1 - F(t)) \cdot (1 - e^{-\lambda \Delta t}).$$

folgt aber nach Division durch  $\Delta t$  und Grenzwertbildung  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$(2) \quad F'(t) = \lambda(1 - F(t)).$$

Denn

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t} = -f'(0) \text{ mit } f(t) = e^{-\lambda t}, \text{ aber}$$

$$f'(0) = -\lambda.$$

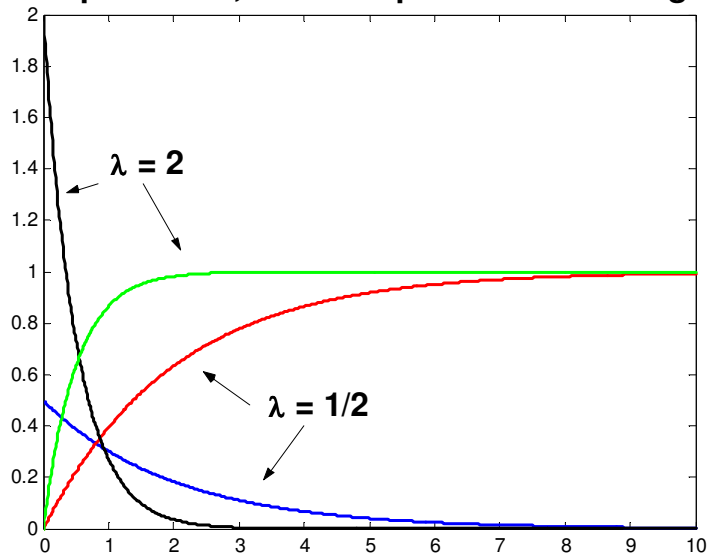
Nun lässt sich die DGL (2) mittels Separation ohne weiteres mit der Anfangsbedingung  $F(0) = 0$  eindeutig lösen zu

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ (für } t \geq 0, \text{ für } t < 0 \text{ ist der Wert Null).}$$

Ableiten ergibt die behauptete Dichtefunktion.

Hier ist ein Bild zu zwei Exponentialverteilungen, sowohl im Dichtebild (fallend) als mit der Verteilungsfunktion jeweils - die Werte sind Null für  $t < 0$  - die Verteilungsfunktionen (ansteigend) nähern sich dem Wert 1 nur asymptotisch für  $t \rightarrow \infty$ .

### Beispiele $\lambda = 2, 1/2$ der Exponentialverteilungen



## 11. Die Weibull-Verteilungen

Weibull war ein schwedischer Ingenieur, der die nach ihm benannten Verteilungen einführt. Die Idee liegt nahe. Wir gehen aus von den Exponentialverteilungen. Deren Charakteristikum ist die Differentialgleichung für ihre Verteilungsfunktion  $F$ :

$$(1) F'(t) = \lambda(1 - F(t)),$$

die oben aus der Gleichung

$$(2) P(t \leq T \leq t + \Delta t) = (1 - P(T \leq t)) \cdot (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

hergeleitet wurde. Nun kommt diese Gleichung gerade von der Unabhängigkeit des Eintretens eines Poisson-Treffers im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  von früheren Treffern, gepaart mit der Konstanz des Erwartungswertes von  $\lambda$  Treffern pro Zeiteinheit, also von  $\lambda \cdot \Delta t$  Treffern in einem Zeitintervall der Länge  $\Delta t$ . Denkt man (so die typische Problemstellung des Ingenieurs) an das Ausfallen einer Maschine (oder einer Komponente davon) als 'Treffer', so liegt auf der Hand, dass man nicht mehr Poisson-Treffer hat: Etwa läuft eine Maschine schon lange, dann wird sich der Erwartungswert der Ausfälle erhöhen. Dies führt zu folgender Überlegung, die übrigens allgemeiner ist als die Weibullsche: Wir setzen den Erwartungswert für die Zahl der Poisson-treffer in einer Zeiteinheit - bedingt durch das Nichteintreten eines Treffers bis zum Zeitpunkt  $t$  - als  $\lambda(t)$ , also zeitabhängig. Dann ergibt sich die Gleichung

$$(2') P(t \leq T \leq t + \Delta t) = (1 - P(T \leq t)) \cdot (1 - e^{-\lambda(t)\Delta t}),$$

und entsprechend die veränderte DGL

$$(1') \quad F'(t) = \lambda(t)(1 - F(t)).$$

Diese DGL lässt sich wiederum ohne weiteres eindeutig lösen (Separationsmethode) mit der Anfangsbedingung  $F(0) = 0$ , die sich ergibt aus  $P(T \leq 0) = 0$  zu:

$$F(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)},$$

wobei  $\Lambda'(t) = \lambda(t)$  und  $\Lambda(0) = 0$ . (Man rechne nach, dass dies die Lösung der DGL ist, welche  $F(0) = 0$  erfüllt.) Wir haben damit die Dichtefunktion

$$F'(t) = \Lambda'(t)e^{-\Lambda(t)} = \lambda(t)e^{-\Lambda(t)}.$$

Die Weibullverteilungen ergeben sich nun aus dem **Spezialfall der Form:**

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \left(\frac{t}{\vartheta}\right)^\beta \quad \text{mit } \vartheta, \beta > 0 \text{ und damit} \\ \lambda(t) &= \frac{\beta}{\vartheta} \left(\frac{t}{\vartheta}\right)^{\beta-1} = \beta \frac{t^{\beta-1}}{\vartheta^\beta}. \end{aligned}$$

Wir definieren also:

DEFINITION 43. Die Weibull-Verteilung zum Parameterpaar  $(\beta, \vartheta)$  mit  $\beta, \vartheta > 0$  hat die Dichtefunktion

$$f_{Weibull(\beta, \vartheta)}(t) = \begin{cases} \beta \frac{t^{\beta-1}}{\vartheta^\beta} e^{-\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^\beta} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}.$$

SATZ 41. Für die Weibull-Verteilung zu  $(\beta, \vartheta)$  gilt stets, dass folgende einfache Formel die Verteilungsfunktion darstellt:

$$F_{Weibull(\beta, \vartheta)} = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^\beta} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

Ferner hat man für Erwartungswert und Streuung:

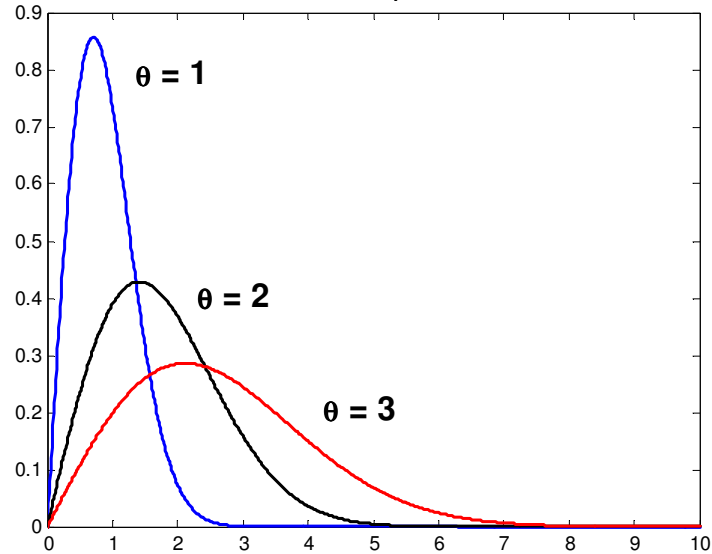
$$\begin{aligned} \mu_{Weibull(\beta, \vartheta)} &= \vartheta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \\ \sigma_{Weibull(\beta, \vartheta)}^2 &= \vartheta^2 \left( \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right). \end{aligned}$$

Dabei ist  $\Gamma$  die bereits oben erwähnte  $\Gamma$ -Funktion (für die Definition vgl. die Definition der  $t$ -Verteilungen von Student).

**Bemerkung:** Diese Formeln rechnet man alle unmittelbar nach.

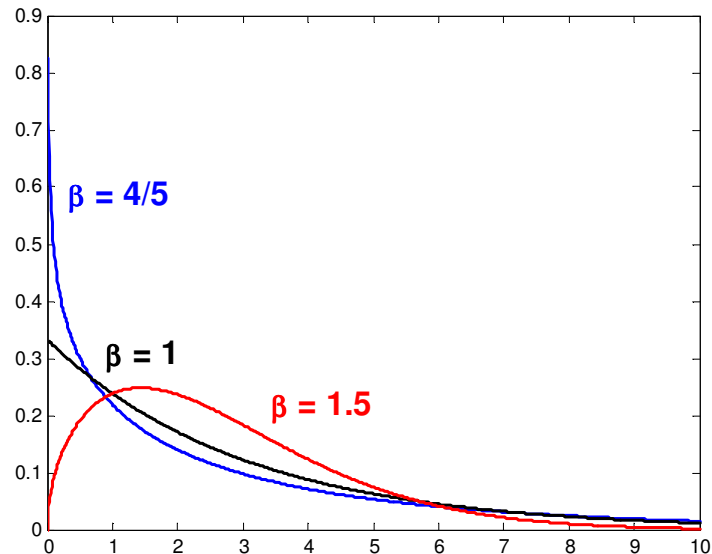
Wir zeigen, wie die Weibull-Dichtefunktionen aussehen, in zwei Bildern:

Weibull-Dichten mit festem  $\beta = 2$  und variierendem  $\vartheta$



Man sieht, dass der Parameter  $\vartheta$  nur eine Streckung längs der  $t$ -Achse und eine Stauchung längs der  $y$ -Achse bewirkt. Das nächste Bild illustriert die Rolle des Parameters  $\beta$ :

Weibull-Dichten mit festem  $\vartheta = 3$  und variierendem  $\beta$



Hier bemerkt man einen qualitativen Unterschied zwischen  $\beta < 1$  und  $\beta > 1$ : Wie man auch am Rechenausdruck direkt sieht, gibt es für  $0 < \beta < 1$  einen Pol bei  $t = 0$ . Die Dichten fallen dann monoton. Dagegen startet die Dichte bei  $\beta > 1$  mit Wert 0 bei  $t = 0$ , steigt bis zu einem Maximum und fällt dann schnell gegen Null. Die Grenze zwischen beiden Typen wird vom Spezialfall  $\beta = 1$  gebildet, und dann handelt es sich einfach um eine Exponentialverteilung: An der Stelle  $t = 0$  hat die Dichte einen endlichen positiven Wert. Übung: skizzieren Sie zu den Weibull-Dichten des letzten Bildes die zugehörigen Verteilungsfunktionen.

**11.1. Anwendungsbeispiele. Beispiel 1:** Die Lebensdauer  $T$  (in Jahren) bei einem Motorentyp sei beschrieben durch eine Weibull-Verteilung mit  $\beta = 2$ ,  $\vartheta = 5$ . Welche mittlere Lebensdauer  $\mu$  und

welche Streuung  $\sigma$  der Lebensdauer bedeutet das? Wo liegt der Median der Verteilung? Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält ein solcher Motor mindestens 10 Jahre? Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält er mindestens 10 Jahre, wenn er schon neun Jahre gehalten hat? Welches 95%– Vertrauensintervall um  $\mu$  kann man angeben (symmetrisch um  $\mu$ )?

Wir haben nach den Formeln (Resultate sind natürlich gerundet):

$$\begin{aligned}\mu &= \vartheta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 5\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 4.43, \\ \sigma &= \vartheta \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \\ &= 5\sqrt{\Gamma(2) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 2.32.\end{aligned}$$

Der Median der Verteilung ist die Zahl  $t_m$ , für die gilt

$$F_{Weibull(2,5)}(t_m) = \frac{1}{2}.$$

Wir lösen also die Gleichung

$$1 - e^{-\left(\frac{t}{5}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Das ergibt

$$t_m = 5\sqrt{\ln(2)} = 4.163.$$

Diese Zahl ist (wie nach der Schiefe der Verteilung zu erwarten!) kleiner als  $\mu$ .

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Motor des Typs mindestens 10 Jahre hält, ist

$$P(T \geq 10) = 1 - P(T \leq 10) = 1 - (1 - e^{-(10/5)^2}) = 0.0183.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Motor des Typs mindestens 10 Jahre hält, wenn er schon neun Jahre gehalten hat, ist

$$P(T \geq 10 | T \geq 9) = \frac{e^{-(10/5)^2}}{e^{-(9/5)^2}} = 0.468.$$

Schließlich geben wir das 95%– Vertrauensintervall symmetrisch um  $\mu = 4.43$ . Bei dieser Gelegenheit prüfen wir auch einmal die allgemein gegebene Faustregel, dass dies Intervall näherungsweise  $\mu \pm 2\sigma$  ist. Wir haben

$$\begin{aligned}\mu - 2\sigma &= -0.201, \\ \mu + 2\sigma &= 9.064.\end{aligned}$$

Da  $T$  nur Werte  $\geq 0$  annimmt, haben wir damit die untere Grenze 0, die obere 9.064. Wir rechnen nach:

$$P(T \leq 9.064) = 1 - e^{-(9.064/5)^2} = 0.962.$$

Also liegt das Intervall  $[0, \mu + 2\sigma]$  sehr nahe beim 95%– Vertrauensintervall, es ist nur wenig größer. Nun lösen wir die Gleichung ( $\mu = 5\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ ):

$$1 - e^{-((\mu+a)/5)^2} - \left(1 - e^{-((\mu-a)/5)^2}\right) = 0.95$$

und finden  $a = 4.26$ . Das 95%– Vertrauensintervall ist also

$$4.43 \pm 4.26.$$

**Beispiel 2:** Wenn wir annehmen, dass die Lebensdauer eines bestimmten Gerätetyps Weibull-verteilt ist, wie kann man dann die Parameter  $\beta, \vartheta$  herausfinden? Wir wissen, dass  $\mu$  und  $\sigma$  gemäß den Formeln eng verbunden sind mit den Parametern  $\beta, \vartheta$ . Wir werden also anhand einer (hinlänglich großen, sagen wir eines Umfangs  $\geq 100$ ) Stichprobe  $\mu$  durch  $\bar{x}$  schätzen und  $\sigma$  durch  $s(X)$ . Nun mögen wir gefunden haben:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 5, \\ s(X) &= 1.\end{aligned}$$

Wir setzen diese Schätzwerte nun für  $\mu$  und  $\sigma$  an, um näherungsweise  $\beta, \vartheta$  zu bestimmen. Wir haben dann die Gleichungen:

$$5 = \vartheta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$1 = \vartheta \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

Mit einem Computeralgebraprogramm lässt sich dies System sofort numerisch lösen, wir finden:

$$\beta = 5.7974,$$

$$\vartheta = 5.4.$$

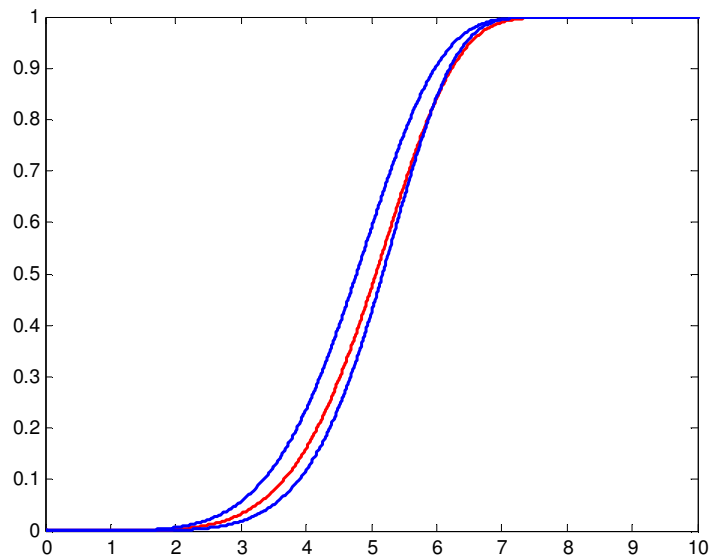
Nun können wir alle im ersten Beispiel gestellten Fragen analog lösen. Wir stellen nunmehr zwei instruktive Fragen:

- 1.) Wie ändern sich die Werte für  $\beta, \vartheta$ , wenn die Schätzwerte für  $\mu$  und  $\sigma$  ihre üblichen Fehler haben?
- 2.) Wie kann man prüfen, ob die Annahme einer Weibull-Verteilung gerechtfertigt ist?

Die zweite Frage verschieben wir auf den nächsten Abschnitt über die  $\chi^2$ -Verteilungen. Zur ersten Frage bemerken wir, dass wir bereits gelernt haben, ein Vertrauensintervall für  $\mu$  anhand von  $\bar{x}$  und  $s(X)$  mittels der  $t$ -Verteilung zu bilden. So etwas können wir auch für die Streuung machen (vgl. auch dazu den nächsten Abschnitt). Nehmen wir nun an, dass mit hoher Sicherheit gilt:  $\mu = 5 \pm 0.1$  und  $\sigma = 1 \pm 0.1$ . Dann können wir einmal nachsehen, wie sich  $\beta, \vartheta$  dann ändern können:

$$\begin{aligned} \text{Für } \mu &= 5.1, \sigma = 0.9 : \beta = 6.64, \vartheta = 5.467, \\ \text{für } \mu &= 5.1, \sigma = 1.1 : \beta = 5.34, \vartheta = 5.534, \\ \text{für } \mu &= 4.9, \sigma = 0.9 : \beta = 6.36, \vartheta = 5.265, \\ \text{für } \mu &= 4.9, \sigma = 1.1 : \beta = 5.33, \vartheta = 5.111. \end{aligned}$$

Wir skizzieren hier einmal, welche Unterschiede bei den Verteilungsfunktionen das macht - die rote Kurve ist die oben errechnete, die andern beiden sind die gefundenen Extreme:



Man sieht, dass es doch merkliche Unterschiede gibt, wenn auch die Kurven nahe beieinander liegen. Man wird also die Schätzwerte für  $\mu$  und  $\sigma$  durch erhöhten Stichprobenumfang genauer machen wollen.

## 12. Die $\chi^2$ -Verteilungen

Die technische Grundlage ist folgende

DEFINITION 44. Eine Variable  $X$  ist genau dann  $\chi^2$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden, wenn  $X = \sum_{k=1}^n Y_k^2$  mit unabhängigen Variablen  $Y_k$ , die alle  $(0, 1)$ -normalverteilt sind.

**Bemerkung:** Die zugehörigen Dichtefunktionen lassen sich aus der Standard-Normalverteilungsdichte entwickeln über Faltung und dann numerisch integrieren. Wiederum hat jedes nennenswerte Computeralgebra-Programm alle zugehörigen Verteilungsfunktionen eingebaut.

**Zum praktischen Auftreten dieser Variablen:** Sehr oft läuft ein statistisches Problem darauf hinaus, zu prüfen, ob beobachtete Häufigkeiten mit einer theoretischen Annahme verträglich sind. Von dieser Art ist insbesondere das wichtige Problem: Hat eine Zufallsvariable  $X$  eine bestimmte Verteilung bzw. eine Verteilung bestimmten Typs? So war unsere zweite Frage im vorigen Abschnitt, speziell für die Weibull-Verteilung. Analog kann man für jeden Typ von Verteilung fragen. Nun liegt es nahe, die tatsächlich zu beobachtenden Häufigkeiten von Werten in den Intervallen  $I_1, \dots, I_s$  mit den laut theoretischer Verteilung zu erwartenden Häufigkeiten zu vergleichen. Man bildet dann einen empirischen Wert der Variablen

$$U = \sum_{k=1}^s \frac{(B_k - E_k)^2}{E_k}.$$

Dabei ist

$$E_k := nP_t(X \in I_k)$$

die laut theoretischer Verteilung zu erwartende absolute (!) Häufigkeit für das Intervall  $I_k$ , mit dem Stichprobenumfang  $n$ .  $P_t(X \in I_k)$  ist die auf  $I_k$  entfallende Wahrscheinlichkeit laut theoretischer Verteilung. Ferner ist

$$B_k := \text{Anzahl der Stichprobenwerte von } X \text{ in } I_k.$$

Man bildet die quadrierten Differenzen dieser absoluten Häufigkeiten und teilt durch die erwartete absolute Häufigkeit. Letzteres geschieht, um die Streuungen der Summanden auf 1 zu normieren. Damit ist die Variable  $U$  näherungsweise  $\chi^2$ -verteilt. Was sind die Freiheitsgrade? Deren Zahl ist allenfalls  $s - 1$ , weil die Häufigkeiten  $B_k$  und damit die  $(B_k - E_k)^2$  nicht unabhängig sind, sondern nur  $s - 1$  sind unabhängig, der Wert des letzten Summanden steht dann fest, weil

$$B_s = n - \sum_{k=1}^{s-1} B_k,$$

$$E_s = n - \sum_{k=1}^{s-1} E_k.$$

Wenn man einen Würfel auf Symmetrie testet, so ist  $s = 6$  und  $E_k = \frac{1}{6}n$  für alle  $k = 1, \dots, 6$ . Dann hat man 5 Freiheitsgrade. Wenn man aber empirische Daten daraufhin testet, ob eine Weibull-Verteilung vorliegt, so nutzt man die Stichprobe auch, um  $\mu$  und  $\sigma$  (und damit  $\beta, \vartheta$ ) zu bestimmen. Analog braucht man zwei Parameter, um das Vorliegen einer Normalverteilung zu testen. (Für eine Binomialverteilung hätte man wiederum nur  $p$  zu bestimmen, einen Parameter, weil  $n$  bereits festliegt.) Nun hat man für jeden geschätzten Parameter jeweils einen Freiheitsgrad abzuziehen. In unserer Beispielfrage für eine Weibull-Verteilung ergibt das also  $s - 3$  Freiheitsgrade.

In der folgenden Tabelle geben wir die Vertrauensgrenzen zu den Wahrscheinlichkeiten 0.95, 0.99, 0.999 für verschiedene Freiheitsgrade:

$F_{\chi^2, n}(a)$	0.95	0.99	0.999	
$a$	3.8415	6.6349	10.8276	für $n = 1$
$a$	5.9915	9.2103	13.8155	$n = 2$
$a$	11.0705	15.0863	20.5150	$n = 5$
$a$	18.3070	23.2093	29.5883	$n = 10$
$a$	24.9958	30.5779	37.6973	$n = 15$
$a$	31.4104	37.5662	45.3147	$n = 20$
$a$	67.5048	76.1539	86.6608	$n = 50$
$a$	124.3421	135.8067	149.4493	$n = 100$
$a$	233.9943	249.4451	267.5405	$n = 200$



**Beispiel:** Findet man den Wert der  $\chi^2$ -verteilten Variablen  $U$  mit 15 Freiheitsgraden zu  $u = 32$ , dann besteht bereits gewisser Zweifel daran, dass die theoretische Verteilung auf die Daten passt. Denn in weniger als 1/100 der Fälle würde man (bei Zutreffen der theoretischen Verteilung) einen so hohen oder höheren Wert einer  $\chi^2$ -verteilten Variablen mit 15 Freiheitsgraden beobachten.

**Bemerkungen:** Bei  $n = 1$  erkennt man genau die Quadrate der (zweiseitigen) Vertrauensgrenzen zu den Wahrscheinlichkeiten der  $(0, 1)$ -Normalverteilung, was klar sein sollte. Mit wachsender Zahl der Freiheitsgrade steigen die 'zulässigen'  $\chi^2$ -Werte stark an. Noch eine praktisch nicht unwichtige Bemerkung: Man sollte auch zu niedrigen  $\chi^2$ -Werten misstrauen, dann kann man daran zweifeln, dass 'ehrliche Daten' vorliegen. (Man wird jemandem nicht glauben, der behauptet, er habe mit einem Würfel bei 120 Würfeln genau je 20 Einsen, Zweien, ..., Sechsen gehabt, und damit den Würfel als symmetrisch erweisen will.)

### 13. Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe und Formeln

#### Grundbegriffe und Formeln der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung

$P$  ist eine Funktion, welche jedem Ereignis  $A$  seine Wahrscheinlichkeit zuordnet, also  $P(A)$  = Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $A$  eintritt.

Axiomatisch wird gefordert, dass

$$(i) 0 \leq P(A) \leq 1,$$

$$(ii) P(\Omega) = 1,$$

$$(iii) P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k), \text{ falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, i, j \in \mathbb{N}.$$

(Es folgt  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .)

Die Ereignisse  $A, B$  heißen **unabhängig** :  $\Leftrightarrow P(A)P(B) = P(A \cap B)$

**Bedingte Wahrscheinlichkeit:**  $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , für  $P(B) \neq 0$ .

**Anschauliches Verständnis:**  $P(A|B)$  = Wahrscheinlichkeit für  $A$  im 'Topf'  $B$  (als neuem  $\Omega$ ).

**Es folgt:** Wenn  $P(B) \neq 0$ , dann:  $(A, B \text{ unabhängig}) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$ .

**Weiter folgen:**

(i) **Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:** Wenn  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$  und  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ,

$$\text{dann } P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

$$(ii) \text{ Bayessche Formel: } P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

#### Zufallsvariablen und ihre Verteilungen, allgemein

**Definition: Eine Zufallsvariable**  $X$  ist eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass von allen Ereignissen der Form  $X \leq a$  usw. die Wahrscheinlichkeiten bildbar sind.

**Definition: Die Verteilungsfunktion von**  $X$  ist die Funktion

$$F_X(a) = P(X \leq a) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}.$$

**Definition:**  $X$  ist mit Dichte  $f$  verteilt :  $\Leftrightarrow$  für alle  $a \in \mathbb{R}$  :  $\left(P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx\right)$ .

(Dann ist nach dem Hauptsatz  $F'_X = f$ .)

**Für diskrete Verteilungen hat man einfach**  $F_X(a) = \sum_{b \leq a} P(X = b)$ .

#### Die Verteilungsparameter Erwartungswert und Varianz bzw. Streuung

$\mu(X) := \sum_{a \text{ Wert von } X} a \cdot P(X = a)$  im diskreten Fall, also höchstens abzählbar unendlich

viele Werte von  $a$  (im unendlichen Fall muss die Reihe konvergieren, was sie in den praktisch relevanten Fällen tut).

$\mu(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$  für  $X$  mit Dichte  $f$  verteilt, vorauszusetzen ist die Existenz des Integrals.

$\sigma^2(X) := \mu\left((X - \mu(X))^2\right) (= \mu(X^2) - \mu^2(X))$ , (wenn Summe bzw. Integral existieren).

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

**Es gelten die wichtigen Formeln:**

$$\mu(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mu(X) + \beta \mu(Y),$$

$\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$ , **wenn**  $X, Y$  unabhängig sind, d.h. alle Ereignispaare

$(X \leq a, Y \leq b)$  unabhängig. (Es genügt aber schon  $Cov(X, Y) = \mu((X - \mu(X))(Y - \mu(Y))) = 0$ .)

$$\sigma(\alpha X + \beta) = \sigma(\alpha X) = |\alpha| \sigma(X).$$

**Die wichtigsten diskreten Verteilungen:****1. Binomialverteilungen:**

$X$  ist genau dann  $(n, p)$ -binomialverteilt, wenn

$X =$  Trefferzahl bei  $n$  unabhängigen Versuchen mit Wahrscheinlichkeit  $p$  für einen Treffer im einzelnen Versuch.

**Es gilt dann:**  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  für  $k = 0, \dots, n$

(Also  $F_X(a) = \sum_{k \leq a} P(X = k)$ .)

$$\mu(X) = np, \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

**2. Hypergeometrische Verteilungen:**

$X$  ist genau dann  $(N, K, n)$ -hypergeometrisch verteilt, wenn

$X =$  Zahl der gezogenen 'Trefferkugeln', wenn aus einer Urne mit  $N$  Kugeln, darunter  $K$  'Trefferkugeln', auf einmal  $n$  Kugeln herausgezogen werden.

**Es gilt dann:**  $P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$  für  $k = 0, \dots, n$ .

Ferner  $\mu(X) = \frac{nK}{N}$ ,  $\sigma^2(X) = n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$  (man beachte: ' $\sigma^2$ ' ist das).

**3. Poisson-Verteilungen:**

$X$  ist  $\lambda$ -Poisson-verteilt:  $\iff$  pro raumzeitlicher Einheit werden

$\lambda$  Treffer erwartet ( $\lambda > 0$ ), unabhängig von dem, was in anderen raumzeitlichen Einheiten passiert oder passiert ist.

(Statt 'raumzeitlich' hat man oft nur 'zeitlich'.)

**Es gilt dann:**  $\mu(X) = \lambda$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$ .

**4. Folgende Verteilung mit Dichte ist eng mit der  $\lambda$ -Poisson-Verteilung verknüpft:** Sei  $T =$  Wartezeit bis zum ersten  $\lambda$ -Poisson-Treffer.

**Dann gilt:**  $T$  ist  $\lambda$ -exponentialverteilt, d.h.  $T$  hat die Dichte

$$f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ für } t \geq 0, f_\lambda(t) = 0 \text{ für } t < 0.$$

**Es folgen:**  $F_T(a) = P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda a}$ , für  $a \geq 0$ ,

$$\mu(T) = \frac{1}{\lambda}, \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$$

**Bedingte Verteilungen und entsprechend****bedingte Erwartungswerte sowie Streuungen:**

Sei  $X$  eine mit Dichte  $f$  verteilte Zufallsvariable. Sei  $A$  ein Ereignis (typisch  $X \leq a_0$  oder  $X \geq a_0$ ),

dann ist  $f_{X|A}(x) := \frac{1}{P(A)} f(x)$ .

**Es folgt:**  $\mu(X|A) = \int_A x \cdot \frac{1}{P(A)} f(x) dx = \frac{1}{P(A)} \int_A x \cdot f(x) dx$ ,

d.h. für  $A = (X \leq a_0)$  z.B.

$$\mu(X|X \leq a_0) = \frac{1}{P(X \leq a_0)} \int_{-\infty}^{a_0} x \cdot f(x) dx.$$

(Usw., entsprechend abzuwandeln für  $A = X \geq a_0$  etc.)

**Analog:**  $\sigma^2(X|X \leq a_0) = \frac{1}{P(X \leq a_0)} \int_{-\infty}^{a_0} (x - \mu(X|A))^2 \cdot f(x) dx$

$$= \frac{1}{P(X \leq a_0)} \left( \int_{-\infty}^{a_0} x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2(X|A) \right).$$

**Analog zur Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit hat man für Erwartungswerte:**

Sei  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  und  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ , seien die **bedingten Erwartungswerte**

$\mu(X|A_i)$  bekannt,  $P(A_i)$  bekannt, dann  $\mu(X) = \sum_{i=1}^n \mu(X|A_i) P(A_i)$ .

**Die Normalverteilungen:**

**Definition:** Sei  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ , dann ist die  $(\mu, \sigma)$  – Normalverteilung

die Verteilung mit der Dichte  $\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$ ,

die  $(0, 1)$  – Normalverteilung nennt man auch **Standard-Normalverteilung**.

**Die Verteilungsfunktion der  $(\mu, \sigma)$  – Normalverteilung** ist dann also

$\Phi_{\mu, \sigma}(a) = \int_{-\infty}^a \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx = \Phi_{0,1}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$  (letzterer Wert aus Tabelle abzulesen!)

Ist also  $X$  normalverteilt mit  $\mu, \sigma$ , dann hat man:

$\mu(X) = \mu, \sigma(X) = \sigma$ , und  $F_X(a) = P(X \leq a) = \Phi_{0,1}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ .

**Bildung eines zweiseitigen Vertrauensintervalls symmetrisch um  $\mu$  zur Wahrscheinlichkeit  $\alpha$**  (gewöhnlich nahe bei 1) **für eine Variable  $X$** , die  $(\mu, \sigma)$  – normalverteilt ist:

$$\mu \pm \Phi_{0,1}^{-1}\left(\alpha + \frac{1-\alpha}{2}\right) \cdot \sigma$$

**Was für Variablen sind normalverteilt oder näherungsweise normalverteilt?**

**1. Summen unabhängiger normalverteilter Variablen sind (exakt) normalverteilt.**

**2. Variablen der Form  $\sum_{i=1}^n X_i$  mit  $X_i$  unabhängige Wiederholung einer festen Variablen  $X$  sind (schon bei mäßigem  $n$ ) näherungsweise normalverteilt.**

Anwendung von **2.** auf die Binomialverteilungen: Sei  $np(1-p) \geq 5$ , dann hat man

$$P(X \leq a) \approx \Phi_{0,1}\left(\frac{a+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \text{ (Stetigkeitskorrektur ist angebracht!)}$$

**3. Variablen der Form  $\bar{X}^{(n)} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  mit  $X_i$  unabhängige Wiederholung**

einer festen Variablen  $X$  sind näherungsweise normalverteilt, man rechnet entsprechend

$$\text{mit } \mu\left(\bar{X}^{(n)}\right) = \mu(X) \text{ und } \sigma\left(\bar{X}^{(n)}\right) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}.$$

**Achtung:**  $X$  ist dabei in typischen Anwendungen keineswegs binomialverteilt, sondern hat recht dicht liegende Werte, dann also keine sinnlose 'Stetigkeitskorrektur'! (Selbst im Falle einer Binomialverteilung bei  $X$  wäre entsprechend anzupassen!)

**a) Zweiseitiges Vertrauensintervall zur Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  für  $\mu(X)$  anhand einer beobachteten Stichprobe von unabhängig genommenen  $X$ -Werten  $x_i$  mit empirischem Mittel**

$\bar{x}^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  (beobachteter Wert von  $\bar{X}^{(n)}$ ):

$\bar{x}^n \pm \Phi_{0,1}^{-1} \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{2} \right) \cdot \sigma \left( \bar{X}^{(n)} \right)$ , dabei  $\sigma \left( \bar{X}^{(n)} \right) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ .

bei unbekanntem  $\sigma(X)$  kann man für große  $n \geq 100$  einfach

$s_n(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^n)^2}$  für  $\sigma(X)$  einsetzen (mit geringer Ungenauigkeit),

genauer wird das mit  $t$ -Verteilung so (notwendig bei recht kleinen  $n$ ):

$\bar{x}^n \pm TV_{df=n-1}^{-1} \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{2} \right) \cdot \frac{s_n(X)}{\sqrt{n}}$ ,

dabei ist  $TV_{df=n-1}^{-1}$  die Umkehrfunktion zur  $t$ -Verteilungsfunktion mit  $n-1$  Freiheitsgraden.

**b) Zweiseitiges Vertrauensintervall zu  $\alpha$  für eine Mittelwertsdifferenz  $\mu(Y) - \mu(X)$  bei unabhängigen Variablen  $X$  und  $Y$ :**

In einer Stichprobe für  $X$  hat man beobachtet:  $\bar{x}^{n_1}$ ,  $s_{n_1}(X)$ , in einer Stichprobe für  $Y$  hat man beobachtet:  $\bar{y}^{(n_2)}$ ,  $s_{n_2}(Y)$ . Dann lautet das gesuchte Intervall:

$\bar{y}^{(n_2)} - \bar{x}^{(n_1)} \pm \Phi_{0,1}^{-1} \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{2} \right) \cdot \sqrt{\frac{s_{n_1}^2(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^2(Y)}{n_2}}$ , mit großer Genauigkeit auch bei mäßigen  $n_1, n_2$ , sagen wir beide  $\geq 30$ .

Typische Anwendung: Man hat zwei getrennte Teilpopulationen  $A, B$ , eine Variable  $U$  auf  $A \cup B$ , und  $Y = U|_B$ ,  $X = U|_A$ .

**c) Man unterscheide davon die Situation, dass man ein Vertrauensintervall für eine erzielte Verbesserung (ausgedrückt in einer Mittelwertsdifferenz  $\mu_{nachher} - \mu_{vorher}$ ) angeben will:**

Dann sind  $Y = U_{nachher}$  und  $X = U_{vorher}$  im Allgemeinen nicht unabhängig, man nimmt eine Stichprobe  $n$  von Paaren  $(u_{vorher,i}, u_{nachher,i})$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

und beobachtet  $\bar{d}^{(n)}$  als Wert von  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_{nachher,i} - u_{vorher,i})$ , bildet

dann das Vertrauensintervall  $\bar{d}^{(n)} \pm \Phi_{0,1}^{-1} \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{2} \right) \cdot \sigma \left( \bar{D}^{(n)} \right)$

(bzw. genauer mit  $t$ -Verteilung) völlig analog zu a).

## 14. Lineare Regression und Korrelation

Wenn man eine Zufallsvariable  $Y$  hat, so kann sie mit einer Zufallsvariablen  $X$  in einem strikten Funktionszusammenhang stehen, d.h.  $Y = f(X)$ . Häufig passiert es jedoch, dass ein solcher Funktionszusammenhang nur mit leichter Ungenauigkeit, leichtem Rauschen besteht. Das ist schon dann der Fall, wenn es sich um lediglich mit (kleinem) Fehler gemessene Größen handelt und etwa  $f$  den exakten physikalischen Zusammenhang beschreibt. Wir stellen uns also die Frage, ob man einen solchen veräuschten Funktionszusammenhang auch mittels einer Stichprobe von beobachteten Wertepaaren  $(x_i, y_i)$  der Variablen  $X, Y$  eventuell wiederherstellen könnte, selbst wenn man  $f$  nicht einmal vorher kannte. Für physikalisch-technische Zusammenhänge wird man relativ genaue Messungen haben und daher geringes 'Rauschen', für andersartige Zusammenhänge wie Einkommen und Gesundheit oder dergleichen ist die Sache aber auch interessant, man kann dann zumindest wichtige Einflussgrößen von unwichtigen unterscheiden und 'Wichtigkeit' auch vernünftig messen.

Unsere Antwort auf die Frage wird in differenzierter Weise positiv sein. Denn in gewissen Intervallen können strukturell sehr verschiedene Funktionen kaum voneinander zu unterscheiden sein. Nur mit Herleitungen aus mathematisch-physikalischen Modellen kann man 'die korrekte Funktion  $f$ ' mit logischer Sicherheit herleiten. Aber das ändert nichts an der Bedeutung des anvisierten statistischen Weges, weil

man selbst in Ermangelung einer hergeleiteten 'korrekten Funktion' wenigstens numerisch gute Vorhersagen treffen kann. Außerdem - und wichtiger noch - bleibt die Statistik von überragender Bedeutung bei der empirischen Bestätigung mathematisch-physikalischer Modelle - die moderne Physik ist voll davon.

Vorab sei erklärt, dass wir hier technisch nur **lineare Zusammenhänge** betrachten, und zunächst nur die lineare Abhängigkeit einer Zielvariablen  $Y$  von einer einzigen Eingabevariablen  $X$ . Im zweiten Unterabschnitt werden wir dann zeigen, wie man sich von **beiden** Einschränkungen befreien kann.

#### 14.1. Lineare Regression von $X$ nach $Y$ und Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$ .

SATZ 3. Unser statistisches Modell sieht so aus:

$$(1) \quad Y = \alpha X + \beta + E,$$

dabei fordern wir  $\mu(E) = 0$  und  $\alpha, \beta$  so, dass  $\sigma(E)$  minimal wird.  $E$  ist dabei die Fehlervariable, und  $\alpha X + \beta$  ist der Anteil von  $Y$ , welcher durch lineare Regression von  $X$  nach  $Y$  'erklärt' wird. Wir werden aus diesen Forderungen  $\alpha, \beta$  (die sogenannten Regressionskoeffizienten) eindeutig berechnen können, und zwar folgt:

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)}, \\ \beta(X, Y) &= \mu(Y) - \alpha\mu(X). \end{aligned}$$

und wir werden sehen, dass folgende Zerlegung der Varianz von  $Y$  gilt:

$$\sigma^2(Y) = \alpha^2\sigma^2(X) + \sigma^2(E),$$

weil  $\alpha X + \beta$  und  $E$  linear unabhängig sind. Man beachte:  $\alpha^2\sigma^2(X)$  ist dasselbe wie  $\sigma^2(\alpha X + \beta)$ . Wenn man dann noch die Varianzanteile von  $Y$  betrachtet, welche auf beide Summanden entfallen -  $\alpha X + \beta$  und  $E$ , so erhält man durch Einsetzen von (2)

$$(3) \quad \begin{aligned} 1 &= \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\sigma^4(X)} \sigma^2(X) \cdot \frac{1}{\sigma^2(Y)} + \frac{\sigma^2(E)}{\sigma^2(Y)} \\ &= \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)} + \frac{\sigma^2(E)}{\sigma^2(Y)}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\sigma(Y - \alpha X - \beta) = \sigma(E) = \sigma(Y) \sqrt{1 - \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}}$$

Diese wichtige auftretende Größe  $\frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}$  heißt **Korrelationskoeffizient zwischen  $X$  und  $Y$** , kurz mit  $\rho(X, Y)$  bezeichnet. Die Gerade  $Y = \alpha X + \beta$  heißt **Regressionsgerade**, die so berechneten Parameter  $\alpha(X, Y)$  und  $\beta(X, Y)$  heißen **Regressionsparameter**. Aus (3) liest man noch ab, dass  $\rho^2(X, Y)$  der durch linearen Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  erklärte Anteil der Varianz von  $Y$  ist.

(Weiter unten finden sich Beispielbilder zu empirischen Punkteschwärmen und Regressionsgeraden.)  
Erinnerung:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mu((X - \mu(X))(Y - \mu(Y))).$$

**Beweis für die oben noch nicht gezeigten Teile:** Wir leiten die Regressionskoeffizienten her und setzen dazu praktisch  $\mu(X) = \mu(Y) = 0$  voraus, dann ist zu minimalisieren - beachte, dass nunmehr  $\mu(Y - \alpha X) = 0$ :

$$\sigma^2(E(\alpha)) = \sigma^2(Y - \alpha X) = \mu((Y - \alpha X)^2) = \mu(Y^2) - 2\alpha\mu(XY) + \alpha^2\mu(X^2),$$

die Ableitung ist

$$-2\mu(XY) + 2\alpha\mu(X^2),$$

und das wird Null genau für

$$\alpha(X, Y) = \frac{\mu(XY)}{\mu(X^2)},$$

und das ergibt auch klar ein Minimum, das absolute (quadratische Funktion mit positivem leitenden Koeffizienten). Mit  $\mu(X) = \mu(Y) = 0$  ist das

$$\alpha(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)}.$$

Natürlich ist bei  $\mu(X) = \mu(Y) = 0$  auch  $\beta = 0$ . Nun setzen wir beliebige Werte von  $\mu(X)$  und  $\mu(Y)$  voraus, dann ist  $\mu(X - \mu(X)) = 0$  und  $\mu(Y - \mu(Y)) = 0$ , also nach dem Vorigen

$$\alpha(X - \mu(X), Y - \mu(Y)) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)}.$$

Denn durch Addieren einer Konstanten zu den Zufallsvariablen ändert sich weder Kovarianz noch Varianz. Und klar ist diese sogenannte Regressionssteigung auch die passende für  $X, Y$ . Daher allgemein

$$\alpha(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)},$$

und mit der Forderung  $\mu(E) = \mu(Y) - \alpha\mu(X) - \beta = 0$  ergibt sich sofort

$$\beta(X, Y) = \mu(Y) - \alpha\mu(X).$$

Es fehlt noch die lineare Unabhängigkeit zwischen  $E$  und  $\alpha X + \beta$ . Dafür benötigen wir nur einfacher die lineare Unabhängigkeit zwischen  $E$  und  $\alpha X$ , also ist zu zeigen, dass

$$\text{Cov}(Y - \alpha X, \alpha X) = 0.$$

Nun hat man mit der Bilinearität und Symmetrie der Kovarianz und  $\text{Cov}(X, X) = \sigma^2(X)$ :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y - \alpha X, \alpha X) &= \alpha \text{Cov}(Y, X) - \alpha^2 \text{Cov}(X, X) \\ &= \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\sigma^2(X)} - \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\sigma^4(X)} \sigma^2(X) = 0. \end{aligned}$$

■

BEMERKUNG 2. *Man hat stets*

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1,$$

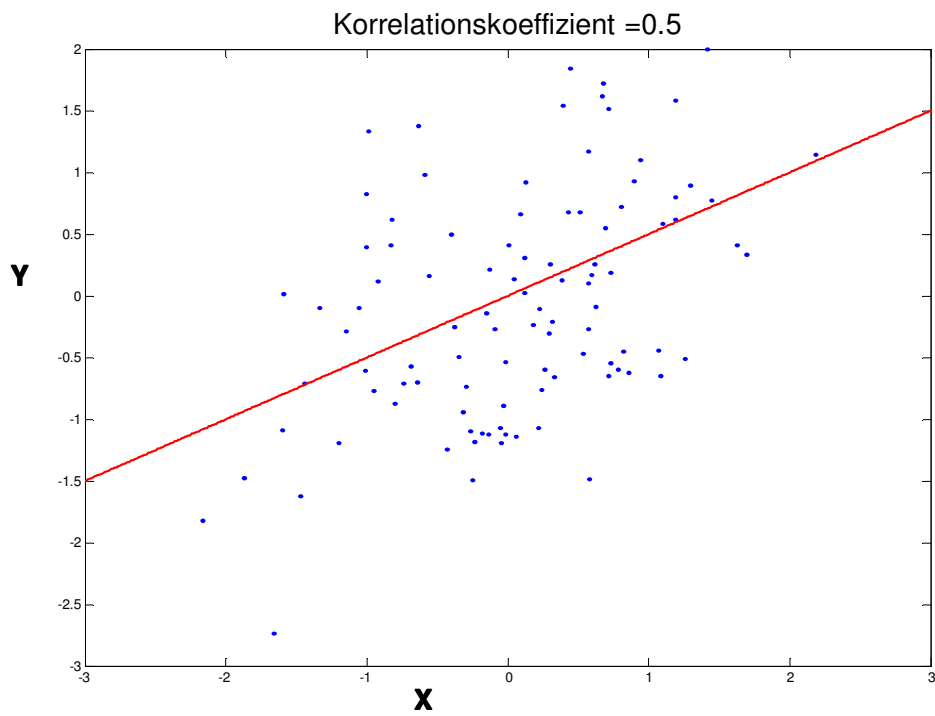
und das Vorzeichen von  $\rho(X, Y)$  ist dasselbe wie das von  $\alpha(X, Y)$ , also positiv oder negativ je nach Steigen oder Fallen der sogenannten Regressionsgeraden  $\hat{Y} = \alpha X + \beta$ .  $|\rho(X, Y)|$  misst die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen  $X$  und  $Y$  und ist offenbar unabhängig von linearen Transformationen der Variablen.

Eine praktische Anwendung: Wenn man etwa bei einem Zusammenhang zwischen zwei Variablen  $X, Y$ , dabei  $Y$  normalverteilt, den Korrelationskoeffizienten 0.95 hat und die Regressionskoeffizienten  $\alpha, \beta$ , kennt ferner den  $X$ -Wert  $x_0$  von einem Individuum, so kann man folgendes zweiseitige 99%-Vertrauensintervall für den zugehörigen  $Y$ -Wert geben:

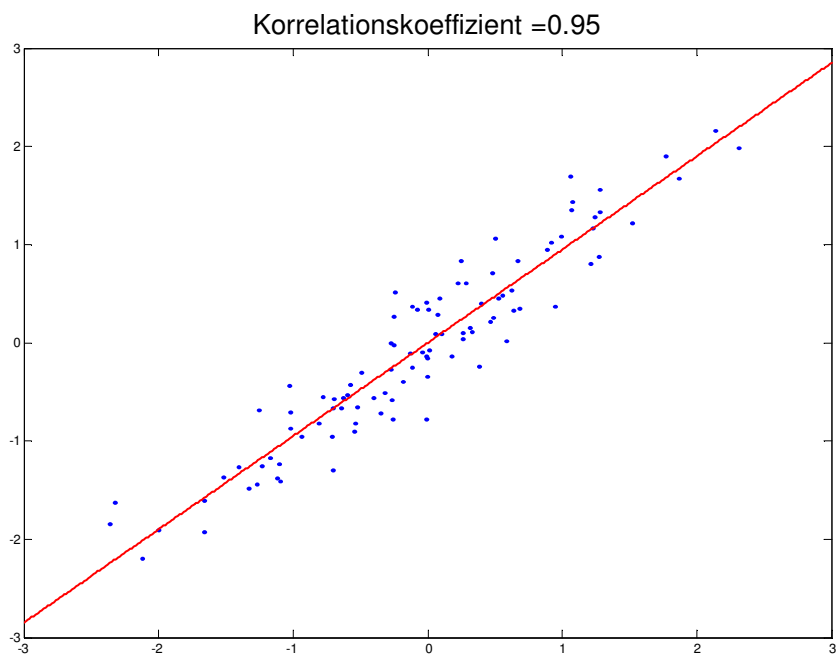
$$\alpha x_0 + \beta \pm 2.58 \cdot \sigma(Y) \sqrt{1 - 0.95^2}.$$

Da  $\sqrt{1 - 0.95^2} \approx 0.3$ , hat man nur mehr mit einem Drittel der Varianz von  $Y$  zu tun. Für  $\rho = 0.995$  (oder ebenso  $-0.995$ ) bekäme man  $\sqrt{1 - 0.995^2} \approx 0.1$ . Für physikalische Messungen sind noch bessere Werte ohne weiteres erreichbar.

Wie so etwas empirisch aussieht, dazu betrachtet man am besten solche Bilder:



Eingezeichnet ist ein Zufalls-Punkteschwarm von  $(X, Y)$  – Wertepaaren und die zugehörige Regressionsgerade (vgl. weiter unten); man sieht sofort, dass ein Korrelationskoeffizient von 0.5 einen nur sehr schwachen Zusammenhang beschreibt. Völlig anders in diesem Bild - hier erkennt man im Punkteschwarm die lineare Tendenz sehr deutlich:



Bemerkungen:



1) In den Beispielen war das Modell mathematisch exakt konstruiert, d.h. die Regressionsgerade ist die 'wahre'. Wenn man die Regressionsparameter nur empirisch schätzt, dann gibt es bei zu kleinen Stichprobenumfängen erhebliche Ungenauigkeiten, dazu unten mehr.

2) Beispiele: Wenn man Klausurergebnisse von Studenten zu zwei Klausuren verwandter Fächer betrachtet, kann man durchaus Korrelationskoeffizienten über 0.9 beobachten. Für physikalische Messungen verlangt man eher noch mehr. Ererblichkeit von Merkmalen liegt typisch bei  $\rho \approx 0.69$ , aber das bedeutet, dass die Hälfte der Varianz ( $0.69^2 \approx 0.48$ ) dann nur durch lineare Regression erklärt ist - für 'Umweltfaktoren' und mehr bleibt also noch genug übrig, man muss sich also nicht darum streiten!

3) Solche Bilder können auch dann sehr nützlich werden, wenn man klar einen nichtlinearen Zusammenhang erkennt - dazu mehr im nächsten Abschnitt 14.

**14.2. Empirische Schätzwerte für  $\alpha, \beta, \rho$ .** Wir haben die Rechnungen sehr einfach gestalten können mit den 'wahren' Varianzen und Kovarianzen. Nun wird man in der Praxis erwarten, dass man diese nicht zur Verfügung hat, sondern schätzen muss. Von unserer Varianzschätzung wissen wir jedoch bereits, was zu tun ist: Wir mögen nichts als eine Stichprobe von  $n$  Wertepaaren besitzen:  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Dann können wir folgende Schätzwerte bilden für alles Benötigte:

Ein vernünftiger Schätzwert für  $Cov(X, Y)$  ist

$$s(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

also ergeben sich für  $\alpha(X, Y)$  und  $\rho(X, Y)$  folgende Schätzwerte:

$$\hat{\alpha}(X, Y) = \frac{s(X, Y)}{s^2(X)} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\hat{\rho}(X, Y)^* = \frac{s(X, Y)}{s(X)s(Y)} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Zu \*) : Sehr gebräuchlich ist auch die Bezeichnung  $r(X, Y)$  für  $\hat{\rho}(X, Y)$ , analog zu  $s(X)$  für einen empirischen Schätzwert für  $\sigma(X)$ . Wenn viele Schätzer benutzt werden, so ist die Bezeichnung mit 'Hut' zweckmäßiger. Aber man hüte sich vor einer furchtbaren Unsitte - sie besteht darin, dass man zwischen wahren Wert wie  $\rho$  und empirischem Schätzwert  $\hat{\rho}$  (und ebenso  $\alpha$  und  $\hat{\alpha}$ ) nicht unterscheidet, sondern die Größe  $\frac{s(X, Y)}{s(X)s(Y)}$  etwa mit 'Korrelationskoeffizient' bezeichnet. Wenn zwei Leute mit je

eigenen Stichproben den Wert  $\frac{s(X, Y)}{s(X)s(Y)}$  berechnen, so kommen garantiert verschiedene Zahlen heraus!

Dieses Durcheinanderwerfen gehört zu den größten Sünden von 'Praktikern', dabei sind namentlich auch die Schulpraktiker zu nennen, die Abituraufgaben entwerfen und das nicht können. Verbal sollte man wenigstens von einem 'empirischen Korrelationskoeffizienten' sprechen, wenn man eben davon redet. 'Empirischer Schätzwert für den Korrelationskoeffizienten' ist aber noch deutlicher und daher vorzuziehen.

Diese Bemerkung verdient eine gewisse Verschärfung im Sinne einer quantitativen Präzisierung: Wie groß muss denn eine Stichprobe sein, damit man einen Korrelationskoeffizienten mit rechter Genauigkeit schätzen kann? Dazu folgender Hinweis: Man braucht recht große Stichproben für eine halbwegs ordentliche Schätzung von  $\rho$ . Genauer haben wir die Faustregel: Unter  $n = 500$  fange man nicht an, so etwas

zu schätzen. Man kann die Sache präzisieren: Für ein Vertrauensintervall arbeitet man gewöhnlich mit Fisher's sog. 'z-Transformation' (dämlicher Name!), man bildet zu  $r = \hat{\rho}$  zunächst  $z = \operatorname{arctanh}(r)$ , nun ist die Zufallsvariable  $Z = \operatorname{arctanh}(R)$  (wobei  $r$  ein beobachteter Wert von  $R$  ist!) ungefähr normalverteilt mit  $\sigma(Z) \approx 1/\sqrt{n-3}$  ( $n$  = Stichprobenumfang bei der Berechnung von  $r$ ), dazu bildet man ein zweiseitiges Vertrauensintervall zu einer hohen Wahrscheinlichkeit, wie wir das gelernt haben, anschließend wendet man auf die Grenzen die Funktion  $\tanh$  an und erhält das gewünschte Vertrauensintervall für den unbekanntem Wert  $\rho$ . Im Bereich kleiner  $|\rho|$  wird bei  $n < 500$  das Vertrauensintervall unsinnig groß, so dass man nur sehr Ungenaueres für  $\rho$  sagen kann - noch bei  $\rho = 0.5$  hat man  $\pm 0.1$ . Außerdem wird die verlangte Sicherheit nicht gut eingehalten, weil die Näherung durch Normalverteilung von  $Z$  noch nicht gut ist. Etwas günstiger stellt sich die Sache für  $|\rho|$  nahe bei 1 dar. Dann werden die Vertrauensintervalle auch bei mäßigeren  $n$  bereits angenehm klein, und dazu werden sie noch besser eingehalten. Aber auch hier ist  $n \geq 500$  zu raten. Bei  $n = 1000$  hat man für  $\rho = \pm 0.99$  typisch nur noch ein Vertrauensintervall der Gesamtlänge  $\approx 3 \cdot 10^{-3}$ .

**14.3. Eine Warnung vor typisch auftretenden Dämlichkeiten.** Der angesprochene Unsinn besteht in folgendem sturem 'Praktiker'-Verfahren: Man berechnet  $r(X, Y)$ , bildet das Vertrauensintervall etwa zu  $\alpha = 0.95$  oder  $0.99$ , und sagt dann, wenn der Wert Null nicht hineinfällt: 'Es besteht eine Korrelation zwischen  $X$  und  $Y$ .' Dann hat man etwa so viel gesagt wie 'Peter kann mehr als 0.001 cm weit springen'. Man beachte: Nur eine (statistisch gesicherte) Aussage wie  $\rho > 0.5$  oder  $\rho < 0.5$  hat überhaupt einen Wert, und auch dann ist der lineare Zusammenhang noch schwachbrüstig. Wenn eine (schwerer zugängliche) Variable  $Y$  einigermaßen genau gemessen werden soll mit einem linearen Zusammenhang mit einer (einfacher zugänglichen) Variablen  $X$ , dann braucht man viel mehr, dass  $|\rho|$  nahe bei 1 liegt, also unter  $|\rho| \geq 0.95$  braucht man dann gar nicht anzufangen. Nun hat ein Artikel aus einer der beiden weltweit anerkanntesten Zeitschriften für Medizin ('Lancet') aus dem Jahr 1986 (das war damals offenbar noch neu in diesen Kreisen!) diesen Zustand mit Recht beklagt, aber dann (wieder nichts verstanden!) den Korrelationskoeffizienten verteufelt - dabei handelt es sich doch nur um den typischen Irrtum von Menschen, die nicht quantitativ zu denken gelernt haben: Zusammenhang ist Zusammenhang, ob stark oder lächerlich schwach, spielt keine Rolle.

Wir schreiten fort zu Dämlichkeit Nr. 2: Wenn man mit lachhaft kleiner Stichprobe nicht  $|\rho| > 0$  etablieren kann (was höchst wahrscheinlich ist!), dann fühlt man sich sicher, es bestehe kein linearer Zusammenhang - dabei könnte er sogar nennenswert sein.

Nun der dritte Unfug: Er besteht darin, dass man nicht genau genug versteht, dass  $\rho(X, Y)$  **nur den linearen Zusammenhang** zwischen  $X$  und  $Y$  misst und nicht etwa nichtlineare Zusammenhänge. Ein Beispiel: Wenn  $X$  Werte in einem symmetrischen Intervall um Null hat und  $Y = X^2$ , dann hätte man sogar (eben mit der Quadratfunktion) einen exakten Zusammenhang, aber  $\rho(X, Y) = 0$ . (Auch daran dachte der medizinische Kritiker nicht und vor allem nicht daran, dass man hier eben  $\rho(Y, X^2) = 1$  hätte, im Falle  $Y = X^2 +$  kleiner linear unabhängige Fehlervariable  $\rho(X^2, Y)$  nahe bei 1.) Daher wollen wir etwas Positives zur Berücksichtigung mehrerer Inputvariablen und zugleich nichtlinearen Zusammenhängen sagen, was wiederum mit linearer Regression gelingt!

## 15. Nichtlineare Zusammenhänge, bei mehr als einer Eingabevariablen

Hier liefert die Mathematik eine Fülle von Anregungen, wie man bei  $Y = f(X_1, \dots, X_n) + E$ ,  $f$  nichtlinear, vorgehen kann. Allerdings seien zwei Vorsichtsmaßnahmen genannt: 1.) Die geschickte Wahl der Modellfunktion ist und bleibt immer ein wenig offen, verschiedene Wege sind u.U. zu probieren, dafür kann es kein Schema geben. 2.) Wenn man sehr viele Modellparameter einführt, so wird man die gegebenen statistischen Daten sehr genau reproduzieren, aber sein blaues Wunder bei der Anwendung auf neue Daten erleben. Man überlege allein, wie groß der Stichprobenumfang sein müsste, um alle Parameterwerte **zugleich** sehr genau zu schätzen. Daraus folgt sofort, dass man die Modelle stets so einfach wie möglich wählen sollte und sich zufriedengeben, wenn das Resultat gut für neue Daten funktioniert.

Wir kommen zu den beiden Kunstgriffen, die man macht, um Nichtlinearität und mehrere Eingabevariablen einzufangen - und dann wieder den simplen linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho$  anwenden zu können (!): Das Modell lautet (recht allgemein formuliert):

$$(1) Y = \alpha_1 f_1(X_1, \dots, X_n) + \dots + \alpha_k f_k(X_1, \dots, X_n) + E,$$

dann bildet man wieder  $\rho(\alpha_1 f_1(X_1, \dots, X_n) + \dots + \alpha_k f_k(X_1, \dots, X_n), Y)$ . Dieser Zusammenhang ist wieder linear! Es mag ein wenig unmotiviert erscheinen, warum  $f_1, \dots, f_k$  da standen, aber tatsächlich werden die  $f_i$  jeweils nur von einem Teil der Eingabevariablen  $X_1, \dots, X_n$  abhängen.

Hier ein konkretes Beispiel: Wenn  $f$  ein Polynom von  $X_1, X_2$  vom Grad höchstens 2 ist, dann hat man

$$(1a) \quad Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_1 X_2 + \alpha_4 X_1^2 + \alpha_5 X_2^2,$$

aber das sind schon 5 Parameter, und vielleicht versucht man nur  $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_1 X_2$ . Natürlich könnte man auch stets  $\ln(X_i)$  nehmen, wenn alle Werte der Natur nach positiv sind, usw., usw. Man beachte: Der Trick besteht gerade darin, dass  $Y$  eine **lineare Funktion** von  $f_1(X_{i_1}, \dots), \dots, f_k(X_{j_1}, \dots)$  ist, allerdings eine lineare Funktion von mehreren Variablen. Zu bestimmen sind die Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , und das sind dann wieder lineare Regressionskoeffizienten. Der einzige Unterschied zum vorigen Abschnitt liegt darin, dass man eine Minimalisierungsaufgabe (für  $\sigma^2(E(\alpha_1, \dots, \alpha_k))$ ) für eine Funktion mit mehreren Variablen zu rechnen hat, was wir aber auch gelernt haben. Man erhält dann die Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  als eindeutige Lösung eines linearen Gleichungssystems. Anschließend setzt man dann wie zuvor wieder empirische Schätzwerte ein. Es gibt auch Verfahren, simultane Vertrauensintervalle zu produzieren. Es sei bemerkt, dass der Korrelationskoeffizient zwischen  $Y$  und  $f_1(X_{\dots}), \dots, f_k(X_{\dots})$  traditionell 'multipler Korrelationskoeffizient' genannt wird. Es ist aber ein einfacher, eben zwischen der Variablen  $X$  und der Variablen  $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(\dots)$ , mit den ausgerechneten 'optimalen'  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Es sei noch bemerkt, dass man

für  $\mu(E) = 0$  noch einen konstanten Summanden  $\beta$  anzufügen und dann  $\beta = \mu(Y) - \mu\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(\dots)\right)$  auszurechnen hätte.

Hier nun die (exakte) Lösung für die Regressionsparameter  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ : Wir bezeichnen die Variablen  $f_i(X_{i_1}, \dots)$  kurz mit  $U_i$ , dann sind die Regressionsparameter  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  die (bei vorausgesetzter linearer Unabhängigkeit der  $U_i$  eindeutige) Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\sum \alpha_i \text{Cov}(U_i, U_j) = \text{Cov}(U_j, Y), \quad j = 1, \dots, k.$$

Für das Praktische beachte man, dass man aus Wertetupeln  $(x_1, \dots, x_n, y)$  stets ein Wertetupel  $(u_1, \dots, u_k, y)$  berechnen kann und dann bei Vorliegen einer Stichprobe mit Schätzwerten für die Kovarianzen hinauskommt, um die Parameter  $\alpha_i$  und dann auch den multiplen Korrelationskoeffizienten schätzen zu können.

**Bemerkung:** Es gibt eine Unsitte, bei jeglicher wahrscheinlichkeitstheoretischen Abhängigkeit zwischen zwei Variablen von 'Korrelation' zu sprechen. ('Korrelation' zwischen Studienfach und Geschlecht - welch ein Unsinn!) Dem sollte man sich nicht anschließen, Abhängigkeit im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne, auch quantitativ nennenswerte, ist viel allgemeiner als das Bestehen eines auch nur schwachen Korrelationskoeffizienten  $\neq 0$ . Aus ersterer folgt nicht Letzteres. Insbesondere ist von Korrelation nur bei numerischen Variablen zu reden, welche in einem Intervall größerer Länge als Null recht dicht liegende Werte haben. Feinheiten des Korrelationsmodells hängen dann sogar noch an der Voraussetzung der Normalverteiltheit der beteiligten Variablen, das ist aber ziemlich erfüllt bei physikalischen Messfehlern.

## 16. Fouriertransformation in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ein paar besonders wichtige Sätze erwähnten wir, vor allem: 1) Unabhängige Summen normalverteilter Variablen sind wieder normalverteilt. 2) Variablen der Form  $\bar{X}^{(n)}$  mit hinreichend großem Wert von  $n$  ungefähr normalverteilt sind, gleichgültig, wie  $X$  verteilt ist, sofern nur  $\sigma(X) > 0$  (wenn  $\sigma(X) = 0$ , dann ist natürlich auch  $\bar{X}^{(n)}$  eine Zufallsvariable mit konstantem Wert, der mit Wahrscheinlichkeit 1 herauskommt). Beweise für solche Aussagen lagen bei weitem außerhalb unseres mathematischen Rahmens. Dieser mathematische Rahmen ist die Fouriertransformation. Da Fouriertransformation noch völlig andersartige wichtige Anwendungen hat (für lineare gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, für Analyse der Stabilität numerischer Verfahren für die numerische Lösung solcher Gleichungen), soll sie hier eingeführt und auf die erwähnten Sätze angewandt werden.

DEFINITION 45. Zu einer Funktion  $f$  ist die Fouriertransformierte  $\widehat{f}$  (auch mit  $\mathcal{F}[f]$  oder nur  $F$  bezeichnet) definiert durch

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} f(x) dx.$$

**Bemerkung:** Das klappt jedenfalls für Funktionen  $f$  mit endlichem  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ . Man kann es aber wesentlich verallgemeinern.

**Bemerkung:** Für die Mathematik sind die Buchstaben im Prinzip gleichgültig, aber man benutzt hier gern ' $\omega$ ', weil das im physikalisch-elektrotechnischen Bereich an 'Kreisfrequenz' erinnert. Für den hier anvisierten Anwendungsbereich werden wir umschwenken zur dabei üblichen Notation.

Nun hat die Fouriertransformation zwei sehr leicht herleitbare Eigenschaften, welche für die Anwendbarkeit eine zentrale Rolle spielen: Zunächst brauchen wir für die Formulierung die Faltung:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u) du$$

$$(1) \widehat{f'}(\omega) = j\omega \widehat{f}(\omega),$$

$$(2) \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Es folgt:  $f_1 * \widehat{f_2 * \dots * f_n} = \widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2} \cdot \dots \cdot \widehat{f_n}$ . Diese Faltung ist offenbar sehr wichtig, um von den Verteilungen der unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , gegeben durch Dichtefunktionen  $f_1, \dots, f_n$ , auf die Dichtefunktion von

$$Y = X_1 + \dots + X_n$$

zu schließen, man bekommt dann nämlich

$$g_Y(y) = (f_1 * f_2 * \dots * f_n)(y),$$

und nun ist es viel bequemer, mit

$$\widehat{g_Y}(\omega) = \widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2} \cdot \dots \cdot \widehat{f_n}(\omega)$$

zu arbeiten.

Bem.: Offenbar eliminiert Formel (1) das Ableitungszeichen, und daraus erklärt sich die starke Anwendbarkeit auf (lineare) partielle wie gewöhnliche Differentialgleichungen.

Man benötigt typisch noch ein paar (wiederum sehr einfache) technische Eigenschaften der Fouriertransformation:

$$(3) \text{ Die Fouriertransformation ist linear, d.h. } \widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$$

$$(4) \text{ Man hat } \widehat{f(\alpha x)}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$(5) \text{ Man hat } \widehat{f(x-\alpha)}(\omega) = e^{-j\omega\alpha} \widehat{f}(\omega)$$

Schließlich ist die (einfach definierte, aber mit ihrer Eigenschaft knifflige!) Fourier-Inversenbildung wichtig (mit analogen Eigenschaften) damit man von einer Fourier-Transformierten wieder zurückkommt auf die Originalfunktion, wir bezeichnen sie mit  $\check{f}$ :

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f(\omega) d\omega.$$

**Bemerkung:** Man beachte den Faktor  $1/(2\pi)$ , der manchmal auch gleich auf 'Fourier hin - Fourier zurück' verteilt wird, dann jeweils mit  $1/\sqrt{2\pi}$ . Für unsere Anwendungen auf die Normalverteilung benötigen wir noch (Genau lässt sich das mittels der Theorie der komplexen Kurvenintegrale ausführen, dann aber auch sehr leicht):

$$(6) \widehat{e^{-x^2}}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}.$$

Daraus schließen wir mit (3) und (4):

$$\begin{aligned} (7) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{e^{-\frac{1}{2}x^2}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{e^{-(x/\sqrt{2})^2}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \widehat{e^{-x^2}}(\sqrt{2}\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \sqrt{\pi} e^{-(\sqrt{2}\omega)^2/4} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\omega^2}. \end{aligned}$$

also: Die Fourier-Transformierte der  $(0, 1)$ -Normalverteilungsdichte ist sie selbst, nur mit Faktor  $\sqrt{2\pi}$  gestreckt (entlang der Ordinate)! Ebenso können wir weiter schließen (benutzen zusätzlich (5)) - wir schreiben nun jetzt lieber  $e^x$  als  $\exp(x)$ :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)(\omega) = \exp\left(-j\omega\mu - \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2\right).$$

Nun könnte man für die Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitstheorie die oben eingeführte Fouriertransformation wörtlich benutzen. Aber für diese Anwendungen ist es üblich und praktisch, die inverse Fourier-Transformation zu nehmen, dazu noch ohne den Faktor  $1/(2\pi)$ , und für die Bildfunktion (also die Transformierte) den Buchstaben  $t$  für die unabhängige Variable zu verwenden. Man sollte sich grundsätzlich klar machen, dass die Struktur der Transformationen in beiden Richtungen dieselbe ist - man kann es also stets machen, wie man will. Insbesondere wird in beiden Richtungen aus der Faltung ein gewöhnliches Produkt. Wir wollen die Grundidee der Anwendung ein wenig beschreiben. Sie ist auch in der Struktur die Grundidee für andersartige oben erwähnte Anwendungen:

**16.1. Die Idee der Anwendung von Fouriertransformation auf die Wahrscheinlichkeitstheorie.** Gewisse einfache Probleme der folgenden Art haben wir schon gelöst:  $X$  sei eine Zufallsvariable mit bekannter Verteilung, z.B. durch Verteilungsfunktion oder Dichte gegeben;  $Y$  sei eine mit  $X$  algebraisch verknüpfte Variable, z.B.  $Y = 2X - 3$  oder  $Y = X^2$ . Problem: Konstruiere Verteilungsfunktion bzw. Dichte von  $Y$ . Dazu gingen wir so vor, dass wir die Ungleichung in der Definition der Verteilungsfunktion einfach umformten, dann über die neue Verteilungsfunktion auf die neue Dichte schlossen. Dies Verfahren funktioniert auch noch gut, wenn z.B.  $Y = \ln(X)$  ( $X$  habe nur positive Werte). Es ist schon ein wenig schwieriger, von den Verteilungen von  $X$  und  $Y$  auf die Verteilung von  $X + Y$  zu schließen. Dies ist zwar noch elementar möglich, aber man benötigt schon die Faltung. Wenn man es zu tun hat mit beliebig langen Faltungen und deren Grenzfunktionen, dann wird es recht kompliziert, und man bekommt gerade mit der Fouriertransformation eine wesentliche Vereinfachung. Das Vorgehen ist so (und stets so bei Anwendungen von Transformationen, es gibt noch mehr davon): Die gegebene Dichte (von  $X$ ) bzw. die Dichten der beteiligten Variablen werden transformiert, und von den Transformaten kommt man wesentlich einfacher zur *Transformierten* der gesuchten Dichte (für  $Y$  sagen wir) als man auf dem direkten Wege käme. Anschließend braucht man nur zurückzutransformieren und hat die Lösung des Problems. Grundlage der Vereinfachung des Problems im Bildbereich ist hier, dass aus der komplizierten Faltung einfach ein Produkt geworden ist.

Wir wollen noch erwähnen, dass bei Anwendung auf eine lineare gewöhnliche DGL (mit konstanten Koeffizienten) eine algebraische Gleichung resultiert, die eben viel einfacher zu lösen ist als eine DGL. Ebenso macht man aus partiellen DGLn gewöhnliche DGLn, die wiederum einfacher sind. Diese Anwendungen basieren auf dem Verhalten der Transformation von Ableitungsfunktionen, aus Ableitung wird bloßes Anbringen eines Faktors.

**16.2. Zwei Anwendungen.** Für die erste Anwendung nutzen wir einfach wörtlich die Fourier-Transformation:

**SATZ 4.** *Wenn die unabhängigen Variablen  $X$  und  $Y$  normalverteilt sind, dann ist es auch  $X + Y$ . Bem.: Das kann man dann induktiv sofort auf endliche Summen beliebiger Länge ausdehnen, außerdem liefert der Beweis sofort auch noch einmal die uns bekannten Rechnungen für  $\mu(X + Y)$  und  $\sigma(X + Y)$*

**Beweis:** Sei  $X$  normalverteilt mit  $\mu_1$  und  $\sigma_1$ ,  $Y$  normalverteilt mit  $\mu_2$  und  $\sigma_2$ . Dann ist die Dichte für  $X$

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right),$$

analog die Dichte für  $Y$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right).$$

Daher ist mit der Unabhängigkeit der Variablen die Dichte von  $X + Y$  gegeben mit

$$f_1 * f_2,$$

also hat die Dichte von  $X + Y$  die Fouriertransformierte

$$\widehat{f_1 * f_2}(\omega) = (\widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2})(\omega),$$

und das ist nach dem Vorangehenden:

$$\exp\left(-j\omega\mu_1 - \frac{1}{2}\omega^2\sigma_1^2\right) \cdot \exp\left(-j\omega\mu_2 - \frac{1}{2}\omega^2\sigma_2^2\right) = \exp\left(-j\omega\left(\mu_1 + \mu_2 - \frac{1}{2}\omega^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\right)\right).$$

Nun wissen wir aber nach dem Vorigen, dass dies die Fourier-Transformierte ist von

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - (\mu_1 + \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)^2\right).$$

Also haben wir: Die Dichte von  $X + Y$  ist wieder eine Normalverteilungsdichte. Außerdem lesen wir noch ab, dass  $\mu(X + Y) = \mu(X) + \mu(Y)$  und  $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$ . ■

Für die folgende gewichtigere Anwendung wollen wir die Sache ein wenig modifizieren, dann ist die Anwendung in der Wahrscheinlichkeitstheorie direkter. Man sollte sich aber vor Augen halten, dass die ganze Idee ohne die Idee der Fourier-Transformation nicht gekommen wäre. Nur wird die Sache dann technisch effizienter.

Wir definieren zunächst einen Begriff, wobei sich auch zeigt, wie man sich gern die Fouriertransformation zurechtlegt für Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie:

**DEFINITION 46** (charakteristische Funktion). *Es sei  $X$  eine Zufallsvariable. Dann ist die charakteristische Funktion von  $X$  die folgende Funktion:*

$$g(t) = \mu(e^{jtX}).$$

*Man beachte: Wenn  $X$  mit der Dichte  $f$  verteilt ist, so hat man*

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f(x) dx.$$

*Also entsteht  $g$  aus  $f$ , indem man die inverse Fouriertransformation anwendet, nur den Faktor  $1/(2\pi)$  fortlässt.*

**Bemerkung:** Die charakteristische Funktion von  $X$  beschreibt eindeutig die Verteilung von  $X$ , weil die Fouriertransformation (zusammen mit Faktor  $1/(2\pi)$ ) zur Dichte zurückführt. Die Fouriertransformation ist so zu verallgemeinern, dass man auch die 'verallgemeinerten Dichten' für beliebige Verteilungen wieder erhält.

Wir wollen uns die ersten Terme einer Taylor-Entwicklung (um  $t_0 = 0$ ) einer charakteristischen Funktion ansehen, das wird später benötigt.

Es sei also  $g(t)$  eine charakteristische Funktion,

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + R(t).$$

Dabei ist  $R(t)$  ein Term, der schneller als  $t^2$  nach Null geht für  $t \rightarrow 0$ , also  $R(t)/t^2 \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ . Dafür schreibt man auch gern  $o(t^2)$  für  $R(t)$ .

Wir rechnen leicht aus:

$$\begin{aligned} g(0) &= \mu(e^{j \cdot 0 \cdot X}) = 1, \\ g'(t) &= \frac{d}{dt} \mu(e^{jtX}) = \mu(jXe^{jtX}), \text{ also } g'(0) = \mu(jX) = j\mu(X), \\ g''(t) &= \mu(-X^2 e^{jtX}), \text{ also } g''(0) = -\mu(X^2). \end{aligned}$$

Damit haben wir:

$$(8) \quad g(t) = 1 + j\mu(X)t - \frac{1}{2}\mu(X^2)t^2 + o(t^2).$$

Bevor wir zu unserem Satz kommen, wollen wir noch die charakteristische Funktion der Standard-Normalverteilung ausrechnen - das erlaubt dann den Schluss: Wenn eine Verteilung (insbesondere ein Limes von Verteilungen!) diese charakteristische Funktion hat, dann handelt es sich um die Standard-Normalverteilung.

**LEMMA 8.** *Die charakteristische Funktion der Standard-Normalverteilung ist  $h(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$ .*

**Beweis:**  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$  ist mit (7) die Fourier-Inverse von  $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ , also ist  $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}t^2}$  die Fourier-Inverse von  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ , also der Dichte der Standard-Normalverteilung. Wie schon beobachtet ist die charakteristische Funktion aber die Fourierinverse (bei gegebener Dichte) ohne den Faktor  $\frac{1}{2\pi}$ .

Den zweiten angesprochenen Satz formulieren zunächst einmal präziser als Grenzwertsatz. Allgemeiner heißen solche Sätze 'zentrale Grenzwertsätze':

**SATZ 5.** *Es sei  $X$  eine beliebige Zufallsvariable mit  $\sigma(X) = \sigma > 0$  und beliebigem  $\mu(X) \in \mathbb{R}$ . Ferner seien  $X_i, i \in \mathbb{N}$ , unabhängige Kopien von  $X$ . Dann konvergiert mit  $n \rightarrow \infty$  die Verteilung der Variablen  $Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right)$  gegen die Standard-Normalverteilung.*

**FOLGERUNG 11.** *Es folgt sofort, dass die Verteilungen der Variablen  $\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left( \overline{X}^{(n)} - \mu \right) (= Y_n (!))$  gegen die Standard-Normalverteilung konvergieren.*

**Bemerkung zu den Voraussetzungen:** Man sollte wahrnehmen, dass die Existenz von  $\mu$  und  $\sigma$  nicht selbstverständlich ist. Man kann Beispiele für Verteilungen konstruieren, bei denen diese unendlich werden. Man muss nicht auf eine Dichte oder verallgemeinerte Dichte zurückgreifen.

**Bemerkung zur Folgerung:** Man beachte: Die Variable  $U_n$  ist dieselbe wie  $Y_n$  (!). Die Form  $Y_n$  ist nur für den Beweis etwas bequemer. Aber die Folgerung haben wir früher oft benutzt. Natürlich folgt dann auch, dass beliebige Vielfache davon ebenfalls näherungsweise normalverteilt sind, wir haben dann also auch z.B. das Resultat der guten Näherung von Binomialverteilungen bei hinreichend großen  $n$ .

**Beweis:** Ohne weiteres genügt es, die Sache für  $\mu = 0$  zu zeigen, da in der Aussage  $n\mu(X) = \mu \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)$  abgezogen wird. Es sei nun  $g(t)$  die charakteristische Funktion von  $X$ . Dann gilt

$$g^n(t) \text{ ist die charakteristische Funktion von } \sum_{i=1}^n X_i,$$

daher wiederum ist

$$g^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \text{ die charakteristische Funktion von } Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Wir rechnen Beides nach, ohne auf die Eigenschaft der (inversen) Fouriertransformation zurückzugreifen, allein mit der Definition der charakteristischen Funktion:

$$\mu \left( \exp \left( jt \sum_{i=1}^n X_i \right) \right) = \mu (e^{jtX_1} \cdot \dots \cdot e^{jtX_n}) =^* \prod_{i=1}^n \mu (e^{jtX_i}) =^{**} (\mu (e^{jtX}))^n = (g(t))^n = g^n(t).$$

\*) : Dies gilt mit der Unabhängigkeit der Variablen  $X_i$ , womit auch die Variablen  $\exp(jtX_i)$  unabhängig sind.

\*\*\*) : Die  $X_i$  sind unabhängige Kopien von  $X$ , also haben sie alle die charakteristische Funktion  $g(t)$ .

$$g^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \mu \left( \exp \left( j \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \right) \right) = \mu \left( \exp \left( jt \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \right) \right),$$

und letzterer Ausdruck ist der für die charakteristische Funktion von  $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Nun setzen wir die oben bestimmte Taylorentwicklung (8) für charakteristische Funktionen bis zur zweiten Ordnung ein und erhalten ( $\mu = 0$ , und für  $t$  ist (in den Ausdruck für  $g(t)$ )  $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$  einzusetzen - man beachte,

dass mit  $\mu = 0$  gilt:  $\mu(X^2) = \sigma^2$ :

$$\begin{aligned} g^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= \left(1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{t^2}{(\sigma\sqrt{n})^2} + o(t^2)\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{-\frac{1}{2}t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Denn wir wissen bereits, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Aber es gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-\frac{1}{2}t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

weil

$$\begin{aligned} &\ln\left(\left(1 + \frac{-\frac{1}{2}t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n\right) \\ &= n \ln\left(1 + \frac{-\frac{1}{2}t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) \\ &= n\left(\ln(1) + \ln'(0)\left(\frac{-\frac{1}{2}t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) + R_n\right), \end{aligned}$$

mit einem Restglied  $R_n$  (wir betrachten  $t$  als Konstante hier!), das mit  $n \rightarrow \infty$  schneller gegen Null geht als  $\frac{1}{n}$ . Daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{-\frac{1}{2}t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n\right) = -\frac{1}{2}t^2,$$

weil

$$\begin{aligned} n \cdot o\left(\frac{t^2}{n}\right) &\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ und} \\ nR_n &\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nun haben wir oben aber gesehen, dass  $h(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$  die charakteristische Funktion der Standard-Normalverteilung ist. ■