Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Pawlaschyk

Wuppertal, 13.03.2018

Mathematik für Sicherheitsingenieure I B

Aufgabe 1. *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $\int_a^b f(x)dx$.

(2) W ☐ F ☐ Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion zu f.

(3) W ☐ F ☐ Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist x^k eine Stammfunktion zu kx^{k-1}.

(4) W ☐ F ☐ Für alle $k \in \mathbb{Z}$ besitzt x^k die Stammfunktion $\frac{1}{k+1}x^{k+1}$.

(5) W ☐ F ☐ Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ gilt, so existiert das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}dx$.

b) Verwenden Sie partielle Integration, um folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx$$

c) Berechnen Sie das folgende Integral (vereinfachen Sie das Resultat weitest möglich):

$$\int_1^4 \frac{3x+2}{x^2(x+2)}dx$$

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	■	F	☐
(2)	W	■	F	☐
(3)	W	■	F	☐
(4)	W	☐	F	■
(5)	W	■	F	☐

(1) ist WAHR nach einem Satz der Vorlesung.

(2) ist WAHR nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(3) ist WAHR, denn $(x^k)' = kx^{k-1}$.

(4) ist FALSCH wegen das Falles $k = -1$.

(5) ist WAHR, da $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ existiert und $|f(x)| \leq 1$ für große x.

b) Mit partieller Integration und $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-3x} = 0$ ist:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx &= \big[x\frac{e^{-3x}}{-3}\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3x}}{-3}dx = -\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} xe^{-3x} + 0 - \frac{1}{9}\big[e^{-3x}\big]_0^{+\infty} \\
&= 0 - \lim_{x\to+\infty} e^{-3x} + \frac{1}{9} = 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

c) Partialbruchzerlegung liefert:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{3x+2}{x^2(x+2)}dx &= \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \big[\ln(x) - \frac{1}{x} - \ln(x+2)\big]_1^4 \\
&= \ln 4 - \frac{1}{4} - \ln 6 - \ln 1 + 1 + \ln 3 = \frac{3}{4} + \ln\frac{4\cdot 3}{6} = \frac{3}{4} + \ln 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. *(13+7 Punkte)*

a) Gegeben sei die Kurve $\gamma : [-4, \pi] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma(t) \quad := \quad \begin{cases} (t+2, 0) & , \text{ für } -4 \le t \le 0, \\ (2\cos t, 2\sin t) & , \text{ für } 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

i. Stellen Sie den Graphen von γ in $\mathbb{R}^2$ zeichnerisch dar.

ii. Für welche $t \in [-4, \pi]$ ist γ eine reguläre parametrisierte Kurve?

iii. Bestimmen Sie die Tangente an γ im Punkt $\gamma\big(\frac{\pi}{4}\big)$.

iv. Berechnen Sie die Bogenlänge von γ.

b) Berechnen Sie den von der parametrisierten Kurve $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(t) = r(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

mit $r(t) = \sqrt{7\pi^4 - 5t^4}$, umfahrenen Flächeninhalt.

Lösung:

a) Der Graph Γ ist der Rand des oberen Halbkreises mit Radius 2 um den Ursprung:

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2,2],\ y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\ ,\ y \ge 0\}$$

Wegen

$$\gamma'(t) \quad := \quad \begin{cases} (1, 0) & , \text{ für } -4 \le t < 0, \\ (-2\sin t, 2\cos t) & , \text{ für } 0 < t \le \pi, \end{cases}$$

ist γ regulär für $t \ne 0$. Aber γ' besitzt keine stetige Fortsetzung nach $t = 0$, daher ist γ im Punkt $t = 0$ keine reguläre parametrisierte Kurve.

Wegen $\gamma'\big(\frac{\pi}{4}\big) = \big(-2\sin(\pi/4), 2\cos(\pi/4)\big) = \big(-2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}\big) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ist die Tangente:

$$T_{\gamma,\frac{\pi}{4}} \quad = \quad \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathbb{R} \cdot \gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Ableitungsvektor γ' und hat die Länge

$$\|\gamma'(t)\| \quad = \quad \begin{cases} \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 & , \text{ für } -4 \le t < 0, \\ \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2 & , \text{ für } 0 < t \le \pi, \end{cases}$$

Somit berechnen wir für die Bogenlänge:

$$L(\gamma) \quad = \quad \int_{-4}^{\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{-4}^{0} 1 \cdot dt + \int_{0}^{\pi} 2 \cdot dt = 4 + 2\pi$$

b) Der Flächeninhalt ist:

$$\begin{aligned} F_\varphi \quad &= \quad \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (7\pi^4 - 5t^4) dt = \frac{1}{2} \big[7\pi^4 t - t^5\big]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \quad \frac{1}{2} \big(7\pi^5 - \pi^5 + 7\pi^5 - \pi^5\big) = 6\pi^5 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Es gibt partiell differenzierbare Funktionen, die nicht total differenzierbar sind.

(2) W ☐ F ☐ Jede total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(3) W ☐ F ☐ Der Gradient einer total differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liegt tangential an ihren Niveaumengen.

(4) W ☐ F ☐ Verschwindet der Gradient einer differenzierbaren Funktion in einem Punkt, so liegt dort ein lokales Extremum vor.

(5) W ☐ F ☐ Der Gradient differenzierbarer Funktionen verschwindet in lokalen Extrema.

b) Wir betrachten die beiden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$f(x,y) = x^2 e^{\sqrt{3+y^2}-2} \quad , \quad g(t) = \big(\ln(1+t^2)\ ,\ \sin(\pi t)\big)$$

Ermitteln Sie den Gradienten von f und die Jacobi-Matrix von g.

c) Wir betrachten wieder die beiden Abbildungen f und g aus Teil b). Berechen Sie nun den Gradienten von f im Punkt $(x,y) = (1,1) \in \mathbb{R}^2$, die Jacobi-Matrix von g im Punkt $t = 1 \in \mathbb{R}$ und die Jacobi-Matrix der Komposition $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x,y) = (1,1) \in \mathbb{R}^2$.

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	■	F	☐
(2)	W	■	F	☐
(3)	W	☐	F	■
(4)	W	☐	F	■
(5)	W	■	F	☐

(1) ist WAHR nach einem Beispiel aus der Vorlesung.

(2) ist WAHR nach einem Satz aus der Vorlesung.

(3) ist FALSCH, der Gradient steht senkrecht auf den Niveaumengen.

(4) ist FALSCH. Ein Gegenbeispiel ist $x \mapsto x^3$.

(5) ist WAHR. Das ist das notwendige Kriterium.

b) Unter Verwendung der Produkt- und der Kettenregel berechnen wir:

$$\nabla f(x,y) = \left(2xe^{\sqrt{3+y^2}-2}\ ,\ x^2 e^{\sqrt{3+y^2}-2}\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}\right) \quad , \quad \text{Jac } g(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ \pi\cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

c) Wegen $f(1,1) = 1$ ist

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1) &= (2, \frac{1}{2}) \quad , \quad \text{Jac } g(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi \end{pmatrix} \ , \\ \text{Jac } (g\circ f)(1,1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi \end{pmatrix} \cdot (2, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -2\pi & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 4. *(3+7+10 Punkte)*

Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ das Gebiet

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 8 - 2x^2\},$$

das von der x-Achse und der Parabel $y = 8 - 2x^2$ eingeschlossen wird.

a) Stellen Sie das Gebiet G graphisch dar.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von G.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von G.

Lösung:

b) Der Flächeninhalt ist

$$\begin{aligned} A := \int_G dG &= \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{8-2x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^{2} \big[y\big]_0^{8-2x^2} dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2) dx \\ &= \big[8x - \frac{2}{3}x^3\big]_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

c) Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate des Schwerpunktes $x_0 = 0$. Man kann das aber auch nachrechnen:

$$\begin{aligned} A \cdot x_0 = \int_G x\ dG &= \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{8-2x^2} x dy \right) dx = \int_{-2}^{2} \big[xy\big]_{y=0}^{y=8-2x^2} dx \\ &= \int_{-2}^{2} \big(8x - 2x^3\big) dx = \big[4x^2 - \frac{1}{2}x^4\big]_{x=-2}^{x=2} = 0. \end{aligned}$$

Für die y-Koordinate y_0 des Schwerpunktes berechnen wir:

$$\begin{aligned} A \cdot y_0 = \int_G y\ dG &= \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{8-2x^2} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \big[y^2\big]_{y=0}^{y=8-2x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \big(8 - 2x^2\big)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \big(4x^4 - 32x^2 + 64\big) dx \\ &= \int_{-2}^{2} \big(2x^4 - 16x^2 + 32\big) dx = \big[\frac{2}{5}x^5 - \frac{16}{3}x^3 + 32x\big]_{x=-2}^{x=2} \\ &= 2 \left(\frac{64}{5} - \frac{128}{3} + 64 \right) \end{aligned}$$

Wegen $A = \frac{64}{3}$ ist also

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{3}{64} \cdot 2 \left(\frac{64}{5} - \frac{128}{3} + 64 \right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) = 6 \cdot \frac{3 - 10 + 15}{15} \\ &= 6 \cdot \frac{8}{15} = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt ist also $P = (x_0, y_0) = \big(0, \frac{16}{5}\big)$.

Aufgabe 5. *(4+8+8 Punkte)*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{11i-3}{3-i} \quad , \quad e^{-i\pi/2}$$

b) Bestimmen Sie den Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung:

$$u''' - u'' + 4u' - 4u \;=\; 0$$

c) Bestimmen Sie durch einen geeigneten Ansatz mit Koeffizientenvergleich eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$u'''(t) - u''(t) + 4u'(t) - 4u(t) \;=\; -4t^2 + 8t + 2$$

Geben Sie nun noch den gesamten Lösungsraum dieser Gleichung an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{11i-3}{3-i} &= (11i-3)\cdot\frac{\overline{3-i}}{|3-i|^2} = (11i-3)\cdot\frac{3+i}{3^2+(-1)^2} \\
&= \frac{1}{10}(33i-11-9-3i) = \frac{1}{10}(-20+30i) = -2+3i \\
e^{-i\pi/2} &= \big(\cos(-\pi/2) + i\cdot\sin(-\pi/2)\big) = \big(\cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2)\big) = -i
\end{aligned}$$

b) Das charakteristische Polynom der DGL ist $P(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$. Wir erraten die Nullstelle $z_0 = 1$. Polynomdivision liefert nun:

$$(z^3 - z^2 + 4z - 4) : (z-1) \;=\; z^2 + 4$$

Mit der dritten binomischen Formel oder der pq-Formel ergeben sich die weiteren Nullstellen $z_1 = 2i$ und $z_2 = -2i$. Der Lösungsraum ist

$$L \;=\; \{ae^t + be^{2it} + ce^{-2it} \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

c) Der geeignete Ansatz ist

$$v(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0.$$

$v'(t) = 2a_2t + a_1$, $v''(t) = 2a_2$ und $v'''(t) = 0$ in die DGL einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
v'''(t) - v''(t) + 4v'(t) - 4v(t) &= -4t^2 + 8t + 2 \\
\Leftrightarrow \quad -2a_2 + 8a_2t + 4a_1 - 4a_2t^2 - 4a_1t - 4a_0 &= -4t^2 + 8t + 2 \\
\Leftrightarrow \quad -4a_2t^2 + (8a_2 - 4a_1)t + (-2a_2 + 4a_1 - 4a_0) &= -4t^2 + 8t + 2
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ und $a_0 = -1$. Eine partikuläre Lösung ist also:

$$v(t) = t^2 - 1.$$

Der Lösungsraum der inhomogenen Gleichung ist mit Teil (b) also:

$$v(t) + L = \{t^2 - 1 + ae^t + be^{2it} + ce^{-2it} \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

Aufgabe 6. *(4+8+3+2+3 Punkte)*

Wir betrachten ein Spiel, in dem ein Mal mit zwei sechsseitigen Würfeln gleichzeitig gewürfelt wird. Die Würfel tragen wie üblich die Augenzahlen 1 bis 6.

a) Was ist der Ergebnisraum Ω für dieses Spiel?

b) Wir gehen davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für die Elementarereignisse Laplace-verteilt ist (also gleichverteilt). Es sei A das Ereignis "*Augensumme der beiden Würfel* ≥ 9" und B das Ereignis "*mindestens eine* 5 *gefallen*". Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) \quad , \quad P(B) \quad , \quad P(A \cap B) \quad , \quad P(A^c \cup B^c)$$

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme der beiden Würfel ≥ 9 ist unter der Voraussetzung, dass mindestens eine 5 gefallen ist?

d) Sind die beiden Ereignisse A und B stochastisch abhängig oder unabhängig? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

e) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Augensumme der beiden Würfel.

Lösung:

a) Der Ergebnisraum enthält 36 Elementarereignisse, nämlich die geordneten Augenzahlen der beiden Würfel:

$$\begin{aligned}\Omega &= \big\{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ ...(1,6); \\ &\quad (2,1);\ (2,2);\ ...(2,6); \\ &\quad ... \\ &\quad (6,1);\ (6,2);\ ...(6,6)\big\} = \{(x,y) \mid 1 \leq x, y \leq 6\}\end{aligned}$$

b) Wegen $\#\Omega = 36$ gilt $P(e) = 1/36$ für jedes Elementarereignis $e \in \Omega$. Wegen

$$\begin{aligned}A &= \{(3,6);(4,6);(4,5);(5,6);(5,5);(5,4);(6,6);(6,5);(6,4);(6,3)\}, \\ B &= \{(5,y) \mid 1 \leq y \leq 6\} \cup \{(x,5) \mid 1 \leq x \leq 6\}\end{aligned}$$

ist $\#A = 10$, $\#B = 11$ und $\#A \cap B = 5$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}P(A) &= \#A/\#\Omega = 10/36 = 5/18 \\ P(B) &= \#B/\#\Omega = 11/36 \\ P(A \cap B) &= \#A \cap B/\#\Omega = 5/36 \\ P(A^c \cup B^c) &= P\big((A \cap B)^c\big) = 1 - P(A \cap B) = 31/36\end{aligned}$$

c) Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11} = 5/11$.

d) Wegen $P(A) \neq P(A|_B)$ sind die beiden Ereignisse A und B stochastisch abhängig.

e) Für einen einzelnen Würfel ist der Erwartungswert $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 7/2$. Da die beiden Augensummen (als Zufallsvariablen) unabhängig sind, ist der Erwartungswert der Augensumme $E = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$.

Aufgabe 7. *(6+8+6 Punkte)*

a) Der jährliche Gewinn eines Gastwirtes sei normalverteilt mit Erwartungswert 100.000 EUR und Streuung 15.000 EUR. Wir hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn in einem Jahr unter 80.000 EUR liegt?

b) Da der Gastwirt aus Teil (a) einen Kredit abbezahlen muss, ist er darauf angewiesen, dass er in den nächsten 9 Jahren mindestens 800.000 EUR Gewinn erzielt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dieses Ziel verfehlt?

c) Die auftretenden Lebensmittelvergiftungen pro Jahr in einer bestimmten Gaststätte seien Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = \ln 10$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr gar keine Lebensmittelvergiftung auftritt? Wie ist der Erwartungswert für die Anzahl der Vergiftungen in einem Jahr?

Lösung:

a) Wir bezeichnen mit X den Gewinn eines Jahres. Dann ist die Zufallsvariable

$$Z := \frac{X - 100.000}{15.000}$$

normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Streuung 1 (also standardnormalverteilt). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(X < 80.000) &= P(X - 100.000 < -20.000) = P\left(\frac{X - 100.000}{15.000} < -4/3\right) \\ &= P(Z < -4/3) = \Phi(-4/3) = 1 - \Phi(4/3) \approx 1 - 0,908 = 0,092 \end{aligned}$$

Sie liegt also etwa bei $9,2\%$. Dabei haben wir den Wert für $\Phi(4/3)$ in einer Tabelle für die Standardnormalverteilung abgelesen.

b) Wir bezeichnen mit Y den Gewinn in 9 Jahren, also $Y = 9X$. Wir können davon ausgehen, dass die Gewinne der einzelnen Jahre stochastisch unabhängig sind. Nach den Rechenregeln ist der Erwartungswert von Y:

$$E(Y) = 9 \cdot E(X) = 9 \cdot 100.000 = 900.000$$

und die Streuung

$$\sigma(Y) = \sqrt{9 \cdot \sigma(X)^2} = \sqrt{9 \cdot 15.000^2} = 45.000$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(Y < 800.000) &= P(Y - 900.000 < -100.000) = P\left(\frac{Y - 900.000}{45.000} < -100/45\right) \\ &= \Phi(-20/9) = 1 - \Phi(20/9) \approx 1 - \Phi(2,22) \approx 1 - 0,987 = 0,013 \end{aligned}$$

Sie liegt also etwa bei $1,3\%$.

c) Gesucht ist hier $P(\{0\})$ für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable, also $P(\{0\}) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\ln 10} = 1/10$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 10%. Für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable V mit Parameter λ ist der Erwartungswert $P(V) = \lambda$, hier also $\ln 10$.