Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Pawlaschyk Wuppertal, 19.02.2018

Mathematik für Sicherheitsingenieure I A

Aufgabe 1. *(5+5+6+4 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 = 9 \;\Rightarrow\; x = 3$.

(2) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 = 9 \;\Leftarrow\; x = 3$.

(3) W ☐ F ☐ $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$.

(4) W ☐ F ☐ Für zwei Mengen A, B gilt: $x \in A^c \cap B^c \;\Leftrightarrow\; x \in (A \cap B)^c$.

(5) W ☐ F ☐ Für Mengen A, B, C gilt: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

b) Zeigen Sie durch Induktion: $n^3 + 2n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

c) Stellen Sie die folgenden Mengen als Teilmenge der reellen Achse graphisch dar:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \leq 0\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 2\}.$$

Schreiben Sie die Mengen A und B als Intervalle. Welches Intervall ist durch die Menge $C = A \cap B$ gegeben?

d) Seien M und N Mengen. Drücken Sie $M \setminus N$ mit Hilfe einer Wahrheitstafel aus.

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	☐	F	■
(2)	W	■	F	☐
(3)	W	☐	F	■
(4)	W	☐	F	■
(5)	W	■	F	☐

(1) ist FALSCH, denn für $x = -3$ ist $x^2 = 9$ aber $x \neq 3$.

(2) ist WAHR, denn $x = 3$ impliziert $x^2 = 9$.

(3) ist FALSCH, denn $-1 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$, aber $-1 \notin \mathbb{N}$.

(4) ist FALSCH. Zum Beipsiel für $A = \{1\}, B = \{2\} \subset \mathbb{R}$ ist $(A \cap B)^c = \emptyset^c = \mathbb{R}$ aber $A^c \cap B^c = (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{2\}) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

(5) ist WAHR, nach den Rechenregeln für Mengen.

b) **Induktionsanfang** $(n = 1)$: $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ ist durch 3 teilbar.
Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$: Nach Voraussetzung ist $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= \big(n^3 + 2n\big) + 3 \cdot (n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

Hier ist der erste Summand n. V. durch 3 teilbar. Der zweite Summand ist offensichtlich auch durch 3 teilbar. Damit ist $(n+1)^3 + 2(n+1)$ durch 3 teilbar.

c) Es ist $A = [-1, 1]$ und $B = (0, 4)$, also $C = A \cap B = (0, 1]$.

d) Wegen $x \in M \setminus N \Leftrightarrow \big(x \in M$ und $x \notin N\big)$ ergibt sich:

$x \in M$	$x \in N$	$x \notin N$	$x \in M \setminus N$
W	W	F	F
W	F	W	W
F	W	F	F
F	F	W	F

Aufgabe 2. *(5+10+5 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0$.

(2) W ☐ F ☐ Zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ sind orthogonal.

(3) W ☐ F ☐ Fünf Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ sind immer linear abhängig.

(4) W ☐ F ☐ Ein affiner Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $0 \in U$ ist.

(5) W ☐ F ☐ Der Durchschnitt einer Ebene mit einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ ist ein Punkt.

b) Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei x eine reelle Zahl sei. Berechnen Sie $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$. Für welche Werte von x sind die beiden Vektoren $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ linear abhängig, für welche Werte linear unabhängig?

c) Eine Ebene E ist in $\mathbb{R}^3$ durch die Gleichung

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2$$

gegeben. Stellen Sie E in der Form

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = c\}$$

dar. Bestimmen Sie einen Vektor der Länge 1, der auf E orthogonal steht.

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	■	F	□
(2)	W	□	F	■
(3)	W	■	F	□
(4)	W	■	F	□
(5)	W	□	F	■

(1) ist WAHR nach den Regeln für das Kreuzprodukt.

(2) ist FALSCH. Etwa $(1, 0), (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ sind l.u. aber nicht orthogonal.

(3) ist WAHR. Mehr als n Vektoren sind in $\mathbb{R}^n$ linear abhängig.

(4) ist WAHR nach den Regeln für (affine) Unterräume.

(5) ist FALSCH. Ist die Gerade parallel zur Ebene, so ist der Durchschnitt leer.

b) Es ist

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x - 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot x \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 - x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen ist. Wegen der ersten und der dritten Komponente ist

$$\vec{v_3} = 2 \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})$$

die einzige Möglichkeit. Es muss also

$$2(6 - x) = 2 \Leftrightarrow 12 - 2x = 2 \Leftrightarrow x = 5$$

gelten. Also sind $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ für $x = 5$ linear abhängig und ansonsten linear unabhängig.

c) Es ist

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle = 2\}.$$

Dabei steht der Normalenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ senkrecht auf der Ebene. Ein Einheitsnormalenvektor ist dann:

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. *(7+1+7+5 Punkte)*

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A, indem Sie A auf Zeilenstufenform bringen.

b) Wie ist der Zeilenrang von A? Wie ist der Spaltenrang von A?

c) Bestimmen Sie den Nullraum $\mathcal{N}_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | A \cdot \vec{x} = 0\}$ und geben Sie seine Dimension an. Was ist die geometrische Bedeutung des Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = 0$?

d) Bestimmen Sie den Lösungsraum der Gleichung

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Naheliegende Schritte liefern die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang von A ist also gleich 3.

b) Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich dem Spaltenrang und dies ist einfach der Rang, also hier gleich 3.

c) Nach der Rangformel ist

$$\dim \mathcal{N}_A = 3 - \operatorname{rang}(A) = 0.$$

Damit ist

$$\mathcal{N}_A = \{0\}.$$

Das System $A \cdot \vec{x} = 0$ besteht aus 4 Gleichungen. Jede dieser Gleichungen stellt geometrisch eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ dar. Die Lösungen der Gleichung $A \cdot \vec{x} = 0$ sind diejenigen Vektoren, die im Durchschnitt der vier Ebenen liegen. Hier ist das nur der Nullvektor.

d) Nach der Lösungstheorie für lineare Gleichungssysteme besteht auch hier der Lösungsraum aus nur einem Vektor. Dies ist hier offensichtlich der Vektor

$$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist also $\mathcal{L}_A = \{\vec{e_2}\}$.

Aufgabe 4. *(5+3+4+3+5 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.

(2) W ☐ F ☐ Jede stetige Funktion ist auch differenzierbar.

(3) W ☐ F ☐ Jede gerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine Nullstelle.

(4) W ☐ F ☐ Jede ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine Nullstelle.

(5) W ☐ F ☐ Die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ist stetig.

b) Geben Sie eine Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ an, die nicht stetig ist.

c) Wir betrachten die Folgen:

$$a_n := \frac{4(n^2)^3 + 1}{4n^5 + 1} \quad , \quad b_n := \frac{4^n + 6^n}{10^n}$$

Konvergieren die Folgen? Warum bzw. warum nicht? Gegen Sie im Falle der Konvergenz auch den Grenzwert an.

d) Zeigen Sie, dass

$$h(x) \quad = \quad \frac{1}{1 + x^2}$$

eine gerade Funktion ist.

e) Zerlegen Sie das folgende Polynom in Linearfaktoren:

$$P(x) \quad = \quad x^3 - 6x^2 + 3x + 10$$

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	■	F	☐
(2)	W	☐	F	■
(3)	W	☐	F	■
(4)	W	■	F	☐
(5)	W	■	F	☐

(1) ist WAHR nach einem Satz aus der Vorlesung.

(2) ist FALSCH. Etwa $|x|$ ist im Punkt $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.

(3) ist FALSCH. Zum Beispiel $f(x) = 1 + x^2$ hat keine Nullstelle.

(4) ist WAHR. Für eine ungerade Funktion f gilt wegen $f(0) = -f(-0)$ nämlich $f(0) = 0$.

(5) ist WAHR nach einem Satz aus der Vorlesung.

b) Ein Beispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \geq 0, \\ 1 & \ x < 0. \end{cases}$$

c) Die Folge

$$a_n = \frac{4(n^2)^3 + 1}{4n^5 + 1} = \frac{4n + n^{-5}}{4 + n^{-5}}$$

verhält sich für große n wie $4n/4 = n$, ist also nicht konvergent.
Die Folge

$$b_n = \frac{4^n + 6^n}{10^n} = \left(\frac{4}{10}\right)^n + \left(\frac{6}{10}\right)^n$$

konvergiert wegen $4/10 < 1$ und $6/10 < 1$ und den Rechenregeln gegen 0.

d) h ist gerade, da

$$h(-x) = \frac{1}{1 + (-x)^2} = \frac{1}{1 + x^2} = h(x).$$

e) Wir erraten die Nullstelle $x_1 = -1$. Polynomdivision liefert nun

$$P(x) : (x + 1) = x^2 - 7x + 10$$

und die pq-Formel ergibt die zwei weiteren Nullstellen

$$x_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2},$$

also $x_2 = 2$ und $x_3 = 5$. Die Zerlegung in Linearfaktoren ist also:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x + 1)(x - 2)(x - 5).$$

Aufgabe 5. *(6+5+5+4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \quad , \quad h(x) = \ln\big(\cos(x)\big)$$

b) Verwenden Sie den Satz von l'Hospital, um zu bestimmen, wie sich die Funktion

$$R(x) \;=\; \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$$

asymptotisch für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ verhält.

c) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion

$$f(x) \;=\; \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

und untersuchen Sie f auf lokale Extremstellen, d.h. bestimmen Sie alle lokalen Extrema und geben Sie an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

d) Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $F(x) = e^{x^2}$ im Punkt $P = (0, 1)$ und stellen Sie diese graphisch dar.

Lösung:

a) Nach der Quotientenregel und der Kettenregel sind:

$$g'(x) = \frac{(1+x^2)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}2x}{(1+x^2)^2} \qquad , \qquad h'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

b) Nach dem Satz von l'Hospital ist

$$\lim_{x\to\pm\infty} R(x) \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2xe^{x^2}}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{x^2} = +\infty.$$

c) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \\ f''(x) &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Extrema können also bei $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ liegen. Wegen $f''(x_1) = 3 > 0$ und $f''(-2) = -3 < 0$ besitzt f im Punkt $(1, f(1)) = (1, -\frac{7}{6})$ ein Minimum und im Punkt $(-2, f(-2)) = (-2, \frac{10}{3})$ ein Maximum.

d) Wegen $F(0) = 1$ und $F'(x) = 2xe^{x^2}$, also $F'(0) = 0$ ist die Tangente:

$$y \;=\; 1 + 0 \cdot x = 1,$$

also die Gerade $y = 1$.