Apl. Prof. Dr. G. Herbort, PD Dr. J. Ruppenthal **21.3.2017**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2+\sqrt{x}} dx$ mit der Substitutionsregel.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + 12x - 16}{x^2(x^2+4)}$. Wie lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von R? (3 Pkte)

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von R. (6 Pkte)

d) Berechnen Sie das Integral $I = \int_1^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+4} \right) dx$.

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Sei $h(x) := \sqrt{x}$. Dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2+\sqrt{x}} = 2h'(x) f(h(x)) ,$$

mit $f(y) := \frac{1}{2+y}$. Die Substitutionsregel gibt uns

$$I = 2 \int_1^2 f(y) dy = 2 \ln (2+y) \Big|_1^2 = 2 \ln (4/3)$$

b) Der Ansatz lautet

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2+4}$$

c) Wir multiplizieren dies aus und finden

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 4Ax + 4B}{x^2(x^2+4)} \end{aligned}$$

Es folgt

$$A + C = 5, \qquad B + D = -3, \qquad 4A = 12, \qquad 4B = -16$$

mit der Lösung

$$A = 3, \qquad B = -4, \qquad C = 2, \qquad D = 1$$

d) Es gilt

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+4}\right) dx \\
&= \left(3\ln x + \frac{4}{x} + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})\right)\Big|_1^4 \\
&= 6\ln(2) - 3 + \ln(20/5) + \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg}(2) - \operatorname{arctg}(\frac{1}{2})\Big) \\
&= 8\ln(2) - 3 + \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg}(2) - \operatorname{arctg}(\frac{1}{2})\Big)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[0, 2\pi]$ definierte Kurve $\alpha(t) = \Big(r(t)\,\cos(t),\, r(t)\,\sin(t)\,\Big)$, wobei $r(t) = 3/2 - \cos(2t)$.

a) Berechnen Sie α'. (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale N an α im Punkte $\alpha(\pi/6)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt A der von α umschlossenen Fläche. (6 Punkte)

Lösung. a) Schreiben wir $e(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $e_\perp(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, so wird

$$\alpha\,'(t) = r'(t)e(t) + r(t)e_\perp(t) = 2\sin(2t)\cdot e(t) + (\frac{3}{2} - \cos(2t))e_\perp(t)$$

b) Da $e(t)$ und $e_\perp(t)$ für jedes t linear unabhängig sind, ist $\alpha'(t) = 0$ genau dann, wenn $2\sin(2t) = 0$ und zugleich $\frac{3}{2} - \cos(2t) = 0$ ist, was für kein t erfüllt wird. Somit ist α überall regulär.

c) Zunächst haben wir

$$\begin{aligned} \alpha'(\pi/6) &= 2\sin(\pi/3)e(\pi/6) + (\frac{3}{2} - \cos(\pi/3)\,)e_\perp(\pi/6) \\ &= \sqrt{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Normale an α in $\alpha(\pi/6) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ist dann

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Die Sektorformel in Polarform ergibt für die gesuchte Fläche A

$$\begin{aligned} 2A &= \int_{-\pi}^{\pi} r(t)^2 dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (3/2 - \cos(2t))^2 dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{9}{4} - 3\cos(2t) + \cos^2(2t))dt \\ &= \frac{9}{2}\pi + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2t))dt \\ &= \frac{11}{2}\pi \end{aligned}$$

Also wird $A = \dfrac{11}{4}\pi$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \left(\frac{t}{1+s^2}, \frac{ts}{1+t^2}\right)$ und $f(x,y) := \frac{x}{1+x^2+y^2+xy}$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $\nabla h(-1,1)$. (10 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{1+x^2+y^2+xy} - \frac{x(2x+y)}{(1+x^2+y^2+xy)^2} \\ &= \frac{1+x^2+y^2+xy-x(2x+y)}{(1+x^2+y^2+xy)^2} = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2+xy)^2} \end{aligned}$$

und

$$f_y = -\frac{x(2y+x)}{(1+x^2+y^2+xy)^2}$$

b) Es gilt

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+s^2} & -\frac{2st}{(1+s^2)^2} \\ s\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $(x^0,y^0) := \vec{g}(-1,1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und damit $\nabla f(x^0,y^0) = (\frac{16}{49}, -\frac{12}{49})$. Da weiter $J_{\vec{g}}(-1,1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \nabla h(-1,1) &= \nabla f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \cdot J_{\vec{g}}(-1,1) \\ &= (\frac{16}{49}, -\frac{12}{49}) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= (\frac{8}{49}, \frac{2}{7}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Es sei G_1 das von der Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 4$ berandete Gebiet und $G := G_1 \cap \{(x,y) \,|\, y \geq 1 - \frac{x}{2}\}$.

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie für $x \in [0,2]$ das Integral

$$J(x) := \int_{G_x} \frac{dy}{y^{3/2}}$$

wobei $G_x = \{(t,s) \in G \,|\, t = x\}$ für $0 \leq x \leq 2$.

(7 Punkte)

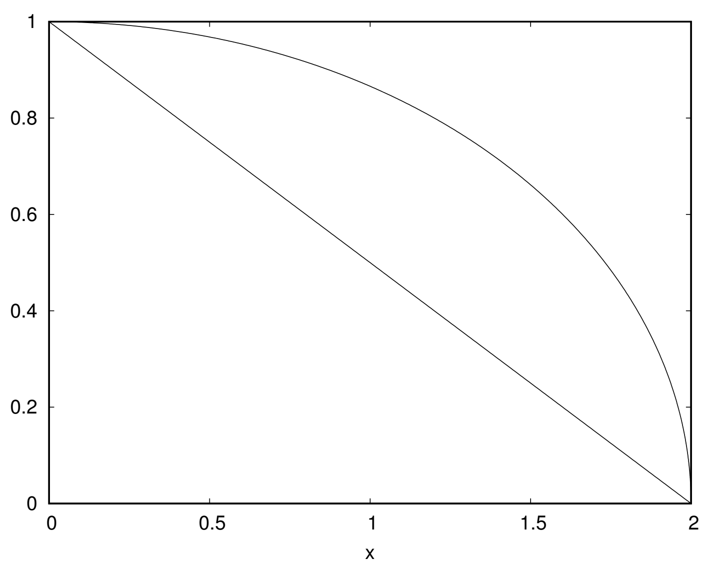
c) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \iint\limits_G \frac{x}{y^{3/2}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(8 Punkte)

Lösung. a) Das Gebiet hat die folgende Gestalt:



b) Es gilt

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_{1-\frac{x}{2}}^{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \frac{dy}{y^{3/2}} \\ &= (-2)y^{-1/2}\Big|_{1-\frac{x}{2}}^{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} - \frac{2}{\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{1/4}} \end{aligned}$$

c) Mit Teil b) folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 xJ(x)dx \\ &= 2\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} - 2\int_0^2 \frac{xdx}{\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{1/4}} \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} &= 2\int \frac{\frac{x}{2}-1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}dx \\ &= -2\int \sqrt{1-\frac{x}{2}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}dx \\ &= \frac{8}{3}(1-\frac{x}{2})^{3/2} - 8\sqrt{1-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Also

$$2\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \frac{32}{3}$$

Ferner haben wir

$$\int \frac{xdx}{\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{1/4}} = -\frac{8}{3}\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{3/4}$$

und damit

$$\int_0^2 \frac{xdx}{\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{1/4}} = \frac{8}{3}$$

Insgesamt wird dann

$$I_1 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' - 6y'' + 9y' - 4y = (20t - 4)e^{-t}$$

a) Was ist das charakteristische Polynom P dieser DGL? (3 Punkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei 1.) (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Punkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung u_p ? (4 Punkte)

e) Berechnen Sie u_p mit diesem Ansatz. (6 Punkte)

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. a) Das charakteristische Polynom P ist hier $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 4$.

Eine Nullstelle von P liegt bei 1. Da $P' = 3X^2 - 12X + 9$, also $P'(1) = 0$, ist $P(X) = (X - 1)^2(X - 4)$, da -4 das negative Produkt der Nullstellen ist.

c) Die resultierenden Basislösungen sind dann e^t, te^t und e^{4t}.

d) Der geeignete Ansatz ist hier $u_p(t) := (at + b)e^{-t}$

e) Wir berechnen die Ableitungen zu u_p, nämlich

$$u_p'(t) = (a - at - b)e^{-t}, \qquad u_p''(t) = (-a - (a - at - b))e^{-t} = (-2a + b + at)e^{-t}$$

und

$$u_p'''(t) = (a - (-2a + b + at))e^{-t} = (3a - b - at)e^{-t}$$

Das setzen wir in die DGL ein und finden

$$\begin{aligned} u_p'''(t) - 6u_p''(t) + 9u_p'(t) - 4u_p(t) &= e^{-t}\Big((3a - b - at - 6(-2a + b + at) + 9(a - at - b) - 4(at + b)\Big) \\ &= e^{-t}\,(24a - 20b - 20at) \end{aligned}$$

Wählen wir $a = b = -1$, wird u_p eine spezielle Lösung zur DGL. Die allgemeine Lösung lautet damit

$$u(t) = u_p(t) + (At + B)e^t + Ce^{4t}$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)
Das Gewicht der Bewohner eines Mietshauses sei normalverteilt mit Erwartungswert 70 kg und Streuung 20 kg.

a) Es steigen 12 Bewohner in einen Aufzug in diesem Hause ein, dessen Belastbarkeit bei 880 kg liegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einer Überbelastung?

b) Wieviele Bewohner dürften nur einsteigen, soll die Wahrscheinlichkeit einer Überlast nicht größer als 2% werden?

Lösung. a) Das Gesamtgewicht X ist normalverteilt mit Erwartungswert 840 kg und Streuung $40\sqrt{3}$ kg. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(X \geq 880) = P(\frac{X - 840}{40\sqrt{3}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}) = 1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 28,1\%$$

b) Ist n die gesuchte Anzahl, so ist ihr Gesamtgewicht X_n normalverteilt mit Erwartungswert $70n$ und Streuung $20\sqrt{n}$. Es soll also $P(X_n \geq 880) \leq 0.02$ bleiben. Das heißt aber

$$0.02 \geq P(\frac{X_n - 70n}{20\sqrt{n}} > \frac{880 - 70n}{20\sqrt{n}}) = 1 - \Phi(\frac{880 - 70n}{20\sqrt{n}})$$

Wir müssen nur noch die Ungleichung $\Phi(\frac{880-70n}{20\sqrt{n}}) \geq 0.98$ lösen. Wegen $\Phi(2.05) = 0.98$ suchen wir die größte Lösung n der Ungleichung $\frac{88-7n}{2\sqrt{n}} \geq 2.05$, also für

$$7n + 4.1\sqrt{n} \leq 88$$

Es muss also $n \leq 10$ bleiben.

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Es werden aus einem Stapel mit 5 Karten, nämlich Karo 2, Karo 3, Karo 4, Karo 5 und Karo 6, zwei Karten ohne Zurücklegen gezogen. Wir interessieren uns für die Gesamtzahl X der Kartenwerte der gezogenen Karten, also z.B. $X = 8$, wenn eine 2 und eine 6 gezogen wurde.

a) Was ist der relevante Ergebnisraum Ω ?

b) Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X ?

c) Was ist der Erwartungswert von X, was die Streuung ?

Lösung. a) Sei $\Omega'_k := \{(a, b) \,|\, a = k, b \neq k\}$ und $\Omega_k = \{a + b \mid (a, b) \in \Omega'_k\}$. Dann wird

$$\Omega = \bigcup_{k=2}^{6} \Omega_k = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Es gilt

$\Omega'_2 = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}, \quad \Omega_2 = \{5, 6, 7, 8\}$

$\Omega'_3 = \{(3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}, \quad \Omega_3 = \{5, 7, 8, 9\}$

$\Omega'_4 = \{(4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6)\}, \quad \Omega_3 = \{6, 7, 9, 10\}$

$\Omega'_5 = \{(5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}, \quad \Omega_5 = \{7, 8, 9, 11\}$

$\Omega'_6 = \{(6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}, \quad \Omega_6 = \{8, 9, 10, 11\}$

b) Durch Abzählen der Ziehungen aus a) finden wir

k	5	6	7	8	9	10	11
$P(\{X = k\})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

c) Es gilt

$$\mathcal{E}(X) = \frac{5 + 6 + 10 + 11}{10} + \frac{7 + 8 + 9}{5} = 8$$

Weiter ist

$$\mathcal{E}(X^2) = \frac{5^2 + 6^2 + 10^2 + 11^2}{10} + \frac{7^2 + 8^2 + 9^2}{5} = \frac{141}{5} + \frac{194}{5} = 67$$

also $\mathcal{V}(X) = \mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}(X)^2 = 3$ und $\sigma = \sqrt{3} \approx 1,732$.