Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 27.03.2017

Mathematik für Sicherheitsingenieure I A (BScS 2011)

Aufgabe 1. *(7+7+6 Punkte)*

a) Zeigen Sie durch Induktion nach n:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \quad = \quad \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

b) Bestimmen Sie die Menge N aller $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 2$$

c) Zeigen Sie durch Induktion für die k-te Ableitung der Funktion 2^x:

$$\frac{d^k}{dx^k}\, 2^x \quad = \quad (\ln 2)^k \cdot 2^x$$

Lösung:

a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 = 1$ und $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}1^2 2^2 = 1$.
Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Nach Voraussetzung ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3$$

Wir rechnen weiter:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)(n+1)^2 = \frac{1}{4}(n+1)^2\left[n^2 + 4(n+1)\right] \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2\left[n^2 + 4n + 4\right] = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

b) Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x \in N \quad &\Leftrightarrow \quad |x-1| = 2|x+1| \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4(x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 4x^2 + 8x + 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = -\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{5}{3} \pm \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Also ist $N = \{-3, -\frac{1}{3}\}$.

c) Induktionsanfang:

$$\frac{d}{dx}\,2^x \quad = \quad \left(e^{x\ln 2}\right)' = e^{x\ln 2}\cdot\ln 2 = (\ln 2)\cdot 2^x$$

Induktionsschritt $k \mapsto k+1$: Nach Voraussetzung ist

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}2^x \quad = \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}2^x\right) = \left((\ln 2)^k\cdot 2^x\right)'$$

Wir rechen weiter:

$$\begin{aligned} &= \quad (\ln 2)^k\cdot\left(2^x\right)' = (\ln 2)^k\cdot(\ln 2)\cdot 2^x \\ &= \quad (\ln 2)^{k+1}\cdot 2^x, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 2. *(6+6+8 Punkte)*

a) Wir betrachten die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die vier Vektoren linear abhängig sind, die ersten drei Vektoren v_1, v_2, v_3 jedoch linear unabhängig sind.

b) Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}.$$

Zeigen Sie, dass M kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

c) Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, so dass $\vec{x} \times \vec{v} = \vec{w}$ gilt.

Lösung:

a) Aus Dimensionsgründen sind vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig. Die ersten drei Vektoren sind linear unabhängig, da nach der Rechenregel für 3×3-Determinanten:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 \\ &\quad -0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

b) Für einen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^2$ muss gelten: $v \in V \Rightarrow \lambda \cdot v \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, d.h. V muss homogen sein. Betrachten wir also zum Beispiel

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in M \ , \quad \text{so ist } \ 2 \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin M,$$

denn $2^2 \neq 2$. Also ist M nicht homogen, also kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

c) Wir berechnen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 v_3 - x_3 v_2 \\ x_3 v_1 - x_1 v_3 \\ x_1 v_2 - x_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_3 \\ 2x_3 + 2x_1 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist also $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} -2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_3 + 2x_1 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Einsetzen der dritten Gleichung in die zweite liefert das System

$$\begin{array}{rcl} -2x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_3 + 4x_2 & = & -2 \end{array}$$

Da diese beiden Gleichungen äquivalent sind, können wir etwa $x_2 := 0$ wählen. Dann folgt $x_3 = -1 - 2x_2 = -1$ und $x_1 = 2 + 2x_2 = 2$. Eine mögliche Lösung ist also:

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. *(8+3+9 Punkte)*
Wir betrachten die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & t \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Rang von A_t in Abhängigkeit von t.

b) Welches Gleichungssystem wird durch

$$A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

für $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^4$ beschrieben?

c) Bestimmen Sie den Nullraum $\mathcal{N}_{A_t} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 | A_t \cdot \vec{x} = 0\}$ und geben Sie seine Dimension an. Bedenken Sie dabei, welche Informationen Ihnen die Rangformel liefert.

Lösung:

a) Durch elementare Zeilen–Operationen erhalten wir die Zeilenstufenform:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & t+15 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Also hat A_t für $t \neq -15$ den Rang 4 und für $t = -15$ den Rang 3.

b) Die Gleichung $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}$ beschreibt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & = & b_1 \\ & 3x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & b_2 \\ 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & b_3 \\ 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & +t \cdot x_4 & = & b_4 \end{array}$$

c) Nach der Rangformel ist $\dim \mathcal{N}_{A_t} = 0$ für $t \neq -15$ und $\dim \mathcal{N}_{A_t} = 1$ für $t = -15$. Im ersten Fall ist daher

$$\mathcal{N}_{A_t} = \{0\}.$$

Im zweiten Fall entspricht (1) dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & & -5x_3 & -11x_4 & = & 0 \end{array}$$

Setzen wir also $x_4 := \lambda$, so folgt $x_3 = -\frac{11}{5}\lambda$, $x_2 = -\frac{9}{5}\lambda$ und $x_1 = \frac{33}{5}\lambda$. Wir erhalten:

$$\mathcal{N}_{A_t} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ -9 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. *(3+10+7 Punkte)*

a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion an, die nicht stetig ist.

b) Wir betrachten die Folgen:

$$a_n := \frac{3n + (2n^2+3)^3 + 7n^2}{4 + 5n^4 + 2n^6} \quad , \quad b_n := \frac{2 + (-1)^n \cdot n^2}{1 + n^2}$$

Beantworten Sie für beide Folgen die folgenden Fragen: Konvergiert die Folge, wenn ja, gegen welchen Grenzwert? Gibt es Häufungspunkte, wenn ja, welche?

c) Zerlegen Sie das folgende Polynom in Linearfaktoren:

$$f(x) \quad = \quad x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$$

Lösung:

a) Ein klassisches Beispiel wäre etwa:

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0, \\ 1 & , \ x > 0. \end{cases}$$

b) Für die Folge a_n kürzen wir Zähler und Nenner mit n^6:

$$a_n \quad = \quad \frac{3n^{-5} + (n^{-2})^3(2n^2+3)^3 + 7n^{-4}}{4n^{-6} + 5n^{-2} + 2} = \frac{3n^{-5} + (2 + 3n^{-2})^3 + 7n^{-4}}{4n^{-6} + 5n^{-2} + 2}$$

Wegen $n^{-k} \to 0$ für $n \to \infty$ (falls $k \geq 1$), liefern die Rechenregeln für Grenzwerte nun:

$$a_n \quad \to \quad \frac{2^3}{2} = 4 \qquad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d.h. die Folge a_n konvergiert gegen 4.

Für die Folge b_n kürzen wir Zähler und Nenner mit n^2:

$$b_n \quad = \quad \frac{2n^{-2} + (-1)^n}{n^{-2} + 1}$$

Damit verhält sich die Folge wegen $n^{-2} \to 0$ für $n \to \infty$ wie die Folge $(-1)^n$. Sie konvergiert also nicht, sondern hat die beiden Häufungspunkte 1 und -1.

c) Wir erraten die Nullstellen -1 und 1. Unter Beachtung von $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ ergibt Polynomdivision dann:

$$\left(x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15\right) : (x^2 - 1) = x^2 + 2x - 15$$

Wir bestimmen die weiteren Nullstellen also durch

$$x_{3,4} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} + 15} = -1 \pm \sqrt{16} = -1 \pm 4$$

als $x_3 = 3$ und $x_4 = -5$. Die Zerlegung in Linearfaktoren ist also:

$$f(x) \quad = \quad (x-1)(x+1)(x-3)(x+5).$$

Aufgabe 5. *(6+2+2+2+6+2 Punkte)*

a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei 3-mal differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$$\frac{d^3}{dx^3}\big(f(x)g(x)\big) \quad , \quad \frac{d}{dx}\ln\big(\ln\big(2+x^2\big)\big)$$

b) Wir betrachten von nun an die Funktion

$$h(x) \;=\; (x^2-5)e^{x^2-2}$$

Bestimmen Sie die Nullstellen von h.

c) Wie verhält sich $h(x)$ asymptotisch für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$?

d) Untersuchen Sie h auf Symmetrie, d.h. bestimmen Sie, ob h eine gerade oder ungerade Funktion ist.

e) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von h und untersuchen Sie h auf lokale Extremstellen, d.h. bestimmen Sie alle lokalen Extrema und geben Sie an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

f) Wo ist h monoton wachsend und wo monoton fallend?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}\big(f(x)g(x)\big) &= f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x) \\
\frac{d}{dx}\ln\big(\ln\big(2+x^2\big)\big) &= \frac{1}{\ln\big(2+x^2\big)} \cdot \frac{2x}{2+x^2}
\end{aligned}$$

b) Da $e^{x^2-2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, stimmen die Nullstellen von h mit den Nullstellen von x^2-5 überein. Wir erhalten die beiden Nullstellen $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$.

c)

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = +\infty$$

d) Wegen $h(-x) = h(x)$ ist h eine gerade Funktion, also spiegelsymmetrisch zur y-Achse.

e) Wir berechnen mit der Produkt- und der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= e^{x^2-2}\big(2x + (x^2-5)2x\big) = e^{x^2-2}\big(2x(x^2-4)\big) = e^{x^2-2}\big(2x^3-8x\big), \\
h''(x) &= e^{x^2-2}\big(6x^2 - 8 + (2x^3-8x)2x\big) = e^{x^2-2}\big(4x^4 - 10x^2 - 8\big)
\end{aligned}$$

Für die notwendige Bedingung $h'(x) = 0$ suchen wir die Nullstellen von h'. Analog zu Aufgabe b) stimmen diese mit den Nullstellen von $2x^3 - 8x = 2x(x^2-4)$ überein. Wir finden also:

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = -2 \quad , \quad x_2 = 2.$$

Wegen

$$h''(x_0) = -8e^{-2} < 0 \quad , \quad h''(x_1) = h''(x_2) = e^2(64 - 40 - 8) = 16e^2 > 0$$

handelt es sich bei $x_0 = 0$ um ein lokales Maximum und bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ um lokale Minima.

f) Wir untersuchen das Vorzeichen der Ableitung

$$h'(x) = e^{x_2 - 2} 2x(x-2)(x+2)$$

und finden

$$h'(x) \left\{ \begin{array}{c} < 0 \\ > 0 \\ < 0 \\ > 0 \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{c} x < -2 \\ -2 < x < 0 \\ 0 < x < 2 \\ 2 < x \end{array} \right.$$

Daher ist h auf $(-\infty, -2]$ und $[0, 2]$ streng monoton fallend, und auf $[-2, 0]$ und $[2, +\infty)$ streng monoton wachsend.