Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **15.3.2016**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4+\sin^2 x} dx$ mit der Substitutionsregel.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \frac{x^3 - 4x + 24}{(x-1)^2(x^2+6)}$. Wie lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von R? (3 Pkte)

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von R. (6 Pkte)

d) Berechnen Sie das Integral $I = \int_2^3 \left(\frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+6} \right) dx$.

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Wir substituieren $y := \frac{1}{2}\sin x$. Da $y'(x) = \frac{1}{2}\cos x$, folgt

$$I = 2\int_0^{1/2} \frac{dy}{4+4y^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\text{arctg}\,(\frac{1}{2})$$

b) Der benötigte Ansatz muss lauten:

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+6}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A(x-1)(x^2+6) + B(x^2+6) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+6)} \\ &= \frac{A(x^3 - x^2 + 6x - 6) + B(x^2+6) + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D}{(x-1)^2(x^2+6)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (6A+C-2D)x - 6A + 6B + D}{(x-1)^2(x^2+6)} \end{aligned}$$

Es soll also

$$(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (6A+C-2D)x - 6A + 6B + D = x^3 - 4x + 24$$

werden. Das bedeutet aber

$$A + C = 1, \qquad -A+B-2C+D = 0, \qquad 6A + C - 2D = -4, \qquad -6A + 6B + D = 24$$

Das Gleichungssystem wird durch $A = -1, B = 3, C = 2, D = 0$ gelöst. So finden wir

$$R(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x}{x^2+6}$$

d) Die Funktion $F(x) = -\ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+6)$ ist eine Stammfunktion zu R, also

$$\int_2^3 R(x)dx = -\ln 2 - \frac{3}{2} + 3 + \ln 15 - \ln 10 = \frac{3}{2} + \ln(\frac{3}{4})$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[0,2]$ definierte Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t) = t^2(2-t)$ und $y(t) = (t+2)x(t)$.

a) Berechnen Sie α'. (Zur Orientierung $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 4t - 3t^2 \\ -4t^3 + 8t \end{pmatrix}$) (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale N an α im Punkte $\alpha(1/2)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt A der von α umschlossenen Fläche. (6 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $x'(t) = 4t - 3t^2$ und $y'(t) = x(t) + (t+2)x'(t) = 2t^2 - t^3 + (t+2)(4t - 3t^2) = 2t^2 - t^3 + 4t^2 - 3t^3 + 8t - 6t^2 = -4t^3 + 8t$

b) α ist genau bei $t = 0$ nicht regulär. $\alpha'(0) = \vec{0}$. Die einzige weitere Nullstelle von x' ist $t = 4/3$, wo aber y' keine Nullstelle hat, also ist α bei allen anderen Stellen regulär.

c) Es gilt $\alpha(1/2) = (\frac{3}{8}, \frac{15}{16})$. Ferner ist $\alpha'(1/2) = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 7/2 \end{pmatrix}$. Als Richtungsvektor der Normalen ist also $\begin{pmatrix} -14 \\ 5 \end{pmatrix}$ geeignet. So finden wir

$$N_{\alpha,1/2} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d) Die Sektorformel ergibt

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^2 \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ y(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt \\ &= \int_0^2 \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ (t+2)x(t) & x(t) + (t+2)x'(t) \end{vmatrix} dt \\ &= \int_0^2 x(t)^2 dt = \int_0^2 t^4(t-2)^2 dt = \int_0^2 (t^6 - 4t^5 + 4t^4) dt \\ &= \frac{2^7}{7} - \frac{2^7}{3} + \frac{2^7}{5} = \frac{2^7}{105} \end{aligned}$$

Damit wird $A = \dfrac{64}{105}$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big(e^s(t-1),\, e^t(s^2-t)\Big)$ und $f(x,y) := (x^3 - 3xy)y$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $\nabla h(2,1)$. (10 Punkte)

Lösung. a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2y - 3y^2 \\ x^3 - 6xy \end{pmatrix}$

b) $J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} e^s & e^s(t-1) \\ e^t(s^2-t) - e^t & 2se^t \end{pmatrix}$

c) Es gilt $\vec{g}(2,1) = (e, -e^2)$ und $\nabla f(e,-e^2) = \begin{pmatrix} -6e^4 \\ 7e^3 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned} (\, h_t(2,1),\, h_s(2,1)\,) &= (\, f_x(e,-e^2),\, f_y(e,-e^2)\,) \begin{pmatrix} e & e \\ -2e^2 & 2se^2 \end{pmatrix} \\ &= (\, -6e^4,\, 7e^3\,) \begin{pmatrix} e & e \\ -2e^2 & 2se^2 \end{pmatrix} = (\, -20e^5\,,\ 8e^5\,) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = 0$ und $x = 2$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := x(3-x)$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x$ berandet wird .

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie für $x \in [0, 2]$ das Integral

$$J(x) := \int_x^{x(3-x)} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

(5 Punkte)

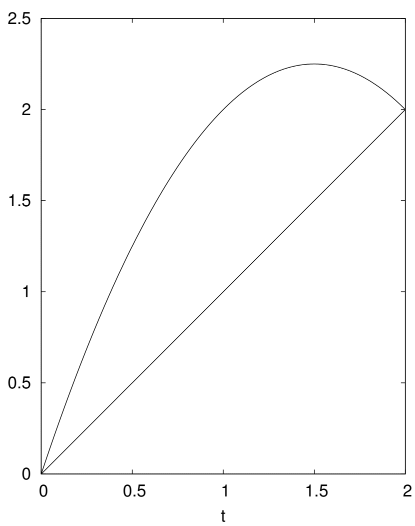
c) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_G \sqrt{\frac{x}{y}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(10 Punkte)

Lösung. a) Hier ist die Skizze:



b) Es gilt

$$J(x) = \int_x^{x(3-x)} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{x(3-x)} - 2\sqrt{x}$$

c)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^2 \sqrt{x}\, J(x) dx \\
&= 2\int_0^2 x\sqrt{3-x} dx - 2\int_0^2 x dx = 2\int_0^2 x\sqrt{3-x} dx - 4 \\
&= 2\int_1^3 (3-u)\sqrt{u} du - 4 = 6\int_1^3 \sqrt{u} du - 2\int_1^3 u^{3/2} du - 4 \quad \text{mit der Substitution } u = 3-x \\
&= \left(4u^{3/2} - \frac{4}{5}u^{5/2}\right)\Big|_1^3 - 4 = 12 \cdot \sqrt{3} - \frac{36}{5}\sqrt{3} - 4 + \frac{4}{5} - 4 = \frac{24\sqrt{3} - 36}{5} = \frac{12}{5}(2\sqrt{3} - 3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' - 12y' + 16y = 25te^t$$

a) Was ist das charakteristische Polynom P dieser DGL? (3 Punkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei 2.) (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Punkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung u_p ? (4 Punkte)

e) Berechnen Sie u_p mit diesem Ansatz. (6 Punkte)

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. a) Es gilt $P(X) = X^3 - 12X + 16 = (X+4)(X-2)^2$

b) Die Nullstellen von P sind -4 und 2 (2-fach)

c) Basislösungen sind nun e^{-4t}, e^{2t}, te^{2t}

d) Der Ansatz $u_p(t) = (at+b)e^t$ ist tauglich.

e) Wir rechnen aus:

$$u_p'(t) = (at+a+b)e^t, \qquad u_p''(t) = (at+2a+b)e^t, \qquad u_p'''(t) = (at+3a+b)e^t$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} u_p''' - 12u_p' + 16u_p &= (at+3a+b-12(at+a+b)+16(at+b)\,)e^t \\ &= (5at-9a+5b)e^t \end{aligned}$$

Wählen wir $a=5, b=9$, also $u_p(t) = (5t+9)e^t$, so wird $u_p''' - 12u_p' + 16u_p = 25te^t$.

Aufgabe 6 (20 Punkte)

In einer Urne liegen 4 Kugeln. Eine ist mit "1", eine mit "2", eine mit "3" und eine mit "4" beschriftet. Es werden (ohne Zurücklegen) 2 Kugeln gezogen. Sei X_1 die Zahl auf der als erste gezogenen Kugel und X_2 die Zahl auf der als zweite gezogenen Kugel. Wir interessieren uns für die Zufallsgröße $X := X_1 + 2X_2$.

a) Was ist der relevante Ergebnisraum Ω?

b) Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X? Berechnen Sie dazu $P(\{X = a\})$ für alle $a \in \Omega$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}(X)$

d) Berechnen Sie die Standardabweichung für X (bis auf eine Nachkommastelle)

(4+6+4+6 Punkte)

Lösung. a) Zunächst schreiben wir die Menge $\widehat{\Omega}$ der möglichen Ziehungsergebnisse an. Das ist folgendes: $\widehat{\Omega} := \widehat{\Omega}_1 \cup \widehat{\Omega}_2 \cup \widehat{\Omega}_3 \cup \widehat{\Omega}_4$, wobei

$$\widehat{\Omega}_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}, \quad \widehat{\Omega}_2 = \{(2,1),(2,3),(2,4)\}$$

$$\widehat{\Omega}_3 = \{(3,1),(3,2),(3,4)\}, \quad \widehat{\Omega}_4 = \{(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

Daraus folgt für die möglichen Werte von X, dass X

auf $\widehat{\Omega}_1$ die Werte 5,7 und 9

auf $\widehat{\Omega}_2$ die Werte 4,8 und 10

auf $\widehat{\Omega}_3$ die Werte 5,7 und 11

und auf $\widehat{\Omega}_4$ die Werte 6,8 und 10

annimmt. So erhalten wir $\Omega = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

b) Es gibt 12 mögliche Ziehungen, da die erstgezogene Kugel nicht zurückgelegt wird. Aus a) finden wir folgende Tabelle für die Wahrscheinlichkeiten $P(\{X = a\})$:

a	4	5	6	7	8	9	10	11
$12P(\{X = a\})$	1	2	1	2	2	1	2	1

c) Es folgt jetzt

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{a=4}^{11} aP(\{X = a\}) = \frac{1}{12}(4 + 10 + 6 + 14 + 16 + 9 + 20 + 11) = \frac{90}{12} = 7,5$$

d)

$$\mathcal{E}(X^2) = \sum_{a=4}^{11} a^2 P(\{X = a\}) = \frac{1}{12}(16 + 50 + 36 + 98 + 128 + 81 + 200 + 121) = \frac{730}{12} = 60,83$$

Die Varianz V hat den Wert $V = \mathcal{E}(X^2) - (\mathcal{E}(X))^2 = 60,83 - 56,25 = 4,58$. Daraus folgt für die Standardabweichung $s = \sqrt{V} = 2,1$ (Genauer 2,14).

Aufgabe 7 (20 Punkte)
a) Eine Firma bestellt bei einer anderen Unterlegscheiben, wobei die Dicke X zwischen 2,8 mm und 3,5 mm liegen soll. Die Dicke der gelieferten Unterlegscheiben sei normalverteilt mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ.

i) Wie hoch wäre der Ausschussanteil für $\mu = 3$ mm und $\sigma = 0{,}2$ mm ?

ii) Wie müsste der kleinste Wert $a > 0$ sein, sollten mindestens 95% der Scheiben eine Dicke zwischen $3 - a$ und $3 + a$ haben?

b) In einer Stadt sei die durchschnittliche jährliche Niederschlagsmenge $24cm/m^2$. Ist sie normalverteilt mit Mittelwert 24 cm und Standardabweichung 2 cm, mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen dann in 3 aufeinander folgenden Jahren höchstens 75 cm je m^2 ?

Lösung. a) (i) Die Größe $Y := \frac{X-3}{0{,}2}$ ist $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Die Quote der brauchbaren Unterlegscheiben ist

$$P(2,8 \le X \le 3,5) = P(-1 \le Y \le 2,5) = \Phi(2,5) - \Phi(-1) = \Phi(2,5) + \Phi(1) - 1 = 0,9953 + 0,8413 - 1 = 0,8366$$

also hat man 16,3 % Ausschuss.

(ii) Es soll $P(3 - a \le X \le 3 + a) = P(-\dfrac{a}{0,2} \le Y \le \dfrac{a}{0,2}) \ge 0,95$, also $2\Phi(\dfrac{a}{0,2}) - 1 \ge 0,95$. Ist z das $0,975$-Fraktil, also $\Phi(z) = 0,975$, so muss $\dfrac{a}{0,2} \ge z$ werden, d.h. aber $a \ge 0,2z = 0.392$. Der Toleranzraum müsste daher mindestens 0,392 mm werden.

Hierbei bedeutet Φ die Fehlerfunktion, also $\Phi(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$

b) Die in 3 Jahren niedergehende Niederschlagshöhe X je m^2 ist normalverteilt mit Mittelwert 72 cm und Standardabweichung $2\sqrt{3}$. Die Zufallsgröße $Z = \frac{X-72}{2\sqrt{3}}$ ist wieder $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann

$$P(X \le 75) = P(Z \le \frac{1}{2}\sqrt{3}) = \Phi(0,86) = 0,805$$