Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **22.2.2016**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1a für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

b) Berechnen Sie die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für welche $|4x+1| > |6x-5|$ gilt.

Lösung. a) Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich 6.

Angenommen, die Summenformel gelte für n. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) \\
&= (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n}{4}+1\right) = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)
\end{aligned}$$

b) Die folgenden Zeilen sind äquivalent:

$x \in M$

$(4x+1)^2 > (6x-5)^2$

$16x^2 + 8x + 1 > 36x^2 - 60x + 25$

$20x^2 - 68x < -24$

$x^2 - \frac{17}{5}x < -\frac{6}{5}$

$(x - \frac{17}{10})^2 < \frac{169}{100} = (\frac{13}{10})^2$

$|x - \frac{17}{10}| < \frac{13}{10}$

$\frac{2}{5} < x < 3.$

Also ist $M = \left(\frac{2}{5}, 3\right)$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

a) Welchen Abstand hat der Punkt $\vec{P} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ von der Ebene E, die durch die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft? (10 Punkte)

b) Ist E wie in Teil a), was ist dann die Schnittmenge zwischen E und der Geraden G durch $\vec{P}$ und den Ursprung?

Lösung. a) Zunächst ist

$$E = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor auf E ist dann durch $\vec{n} := \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -28 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Der gesuchte Abstand ist dann

$$d = \frac{|\langle \vec{P} - \vec{A}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left| \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{209}}$$

b) Jeder Punkt aus $\vec{x} \in G \cap E$ hat die Form $\vec{x} = t\vec{P} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ -2t \end{pmatrix}$. Soll nun $\vec{x} \in E$ sein, muss gleichzeitig $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit geeigneten $r, s \in \mathbb{R}$ gelten. Bilden wir das Skalarprodukt mit $\vec{n}$, folgt

$$t\langle \vec{P}, \vec{n} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle = -24$$

Da $\langle \vec{P}, \vec{n} \rangle = -18$, folgt $t = \frac{4}{3}$, also

$$G \cap E = \{\frac{4}{3}\vec{P}\}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 8 & 4 & 15 & 4 \\ 2 & -2 & t & 0 \\ 10 & 14 & 27 & 8 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Rang von $\mathcal{A}$ und die Dimension des Nullraumes $N_{\mathcal{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von t.

b) Berechnen Sie für $t = 1$ den Nullraum von $\mathcal{A}$

(10+10 Pkte)

Lösung. a) Vertauschen wir die Zeilen 1 und 2 in $\mathcal{A}$, so entsteht

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & t & 0 \\ 8 & 4 & 15 & 4 \\ 10 & 14 & 27 & 8 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren hierin von Zeile 2 das 4-fache von Zeile 1 und von Zeile 3 das 5-fache von Zeile 1. So entsteht

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & t & 0 \\ 0 & 12 & 15-4t & 4 \\ 0 & 24 & 27-5t & 8 \end{pmatrix}$$

Von der 3. Zeile ziehen wir das 2-fache der Zeile 2 ab und erhalten

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & t & 0 \\ 0 & 12 & 15-4t & 4 \\ 0 & 0 & 27-5t-30+8t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & t & 0 \\ 0 & 12 & 15-4t & 4 \\ 0 & 0 & 3t-3 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit haben wir $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = 2$, wenn $t = 1$ und $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = 3$, wenn $t \neq 1$. Entsprechend ist $\dim N_{\mathcal{A}} = 2$, wenn $t = 1$ und $\dim N_{\mathcal{A}} = 1$, wenn $t \neq 1$.

b) Für $t = 1$ ist $N_{\mathcal{A}} = N_{\mathcal{A}_2} = N_{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 11 & 4 \end{pmatrix}} =: V$. Nun ist aber weiter $\vec{x} \in V$ genau dann, wenn

$$2x_1 - 2x_2 = -x_3, \qquad 12x_2 = -11x_3 - 4x_4$$

somit wird

$$x_1 = -\frac{17}{12}x_3 - \frac{1}{3}x_4, \qquad x_2 = -\frac{11}{12}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

Es folgt

$$\vec{x} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -17 \\ -11 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} x_4$$

also

$$V = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -17 \\ -11 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Hat die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n := \dfrac{2n^3+7n-1}{n^2+2} - \dfrac{4n^3+6n^2-18n-1}{2n(n+5)}$ einen Grenzwert? Wenn ja, was ist der Grenzwert?

b) Bestimmen Sie die Wertemenge W der Funktion $f(x) = x^2 - x$, für $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

c) Was ist die Umkehrfunktion zu dieser Funktion f? (10+5+5 Pkte)

Lösung. a) Es gilt $\dfrac{2n^3+7n-1}{n^2+2} = 2n + \dfrac{3n-1}{n^2+2}$ und $\dfrac{4n^3+6n^2-18n-1}{2n(n+5)} = 2n - \dfrac{14n^2+18n+1}{2n(n+5)}$, so dass

$$x_n = \frac{3n-1}{n^2+2} + \frac{14n^2+18n+1}{2n(n+5)} \longrightarrow 7, \qquad n \to \infty$$

b) Aus $f(x) = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ und $f(x) = -x(1-x)$ folgt $-\frac{1}{4} \leq f \leq 0$, also auch $W \subset [-\frac{1}{4}, 0]$. Nach dem Zwischenwertsatz ist W ein Intervall. Da $f(0) = 0, f(1/2) = -1/4$, ist dann sogar $W = [-\frac{1}{4}, 0]$.

c) Wir lösen für $y \in W$ die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf und erhalten $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$. Soll $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ liegen, müssen wir das Pluszeichen wählen. So folgt

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{-x^2}(2x^2 + 3x + 1).$$

a) Berechnen Sie die 1. Ableitung zu f.

b) Wo ist f monoton wachsend, wo monoton fallend ?

c) Was sind die lokalen Extrema von f

d) Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen von f bei $(2\,,\,f(2)\,)$.

(6+5+5+4 Pkte)

Lösung. a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x(2x^2+3x+1)+4x+3)e^{-x^2} = (-4x^3-6x^2+2x+3)e^{-x^2} \\ &= (2(-2x-3)x^2+2x+3)e^{-x^2} = (2x+3)(-2x^2+1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

b) Die Nullstellen von f' sind also $x_1 = -\dfrac{3}{2}, x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = -x_2$, und $f'(x) = -e^{-x^2}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Es ist $x_1 < x_2 < x_3$, also $f' > 0$ auf $(-\infty, x_1)$ und $f' < 0$ auf (x_1, x_2). Auf (x_2, x_3) ist dann $f' > 0$ und $f' < 0$ auf (x_3, ∞).

Damit wächst f auf $(-\infty, x_1)$ und auf (x_2, x_3) monoton und fällt monoton auf (x_1, x_2) und auf (x_3, ∞).

c) Aus Teil b) erhalten wir sofort, dass für f bei x_1 und bei x_3 lokale Maxima vorliegen und bei x_2 ein lokales Minimum.

d) Die definierende Gleichung für die gewünschte Tangente ist

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = 15e^{-4} - 49e^{-4}(x-2) = -49e^{-4}x + 113e^{-4}$$