Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **24.3.2015**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \int_1^2 \frac{1}{e^x + 2e} dx$.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \frac{-\frac{4}{5}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{5}{4}}{x^2(x^2 + x + \frac{5}{4})}$. Wie lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von R? (3 Pkte)

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von R. (6 Pkte)

d) Berechnen Sie das Integral $I = \int_{1/2}^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{5x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + x + \frac{5}{4}} \right) dx$.

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Substituieren wir $x = \ln(t)$, so folgt

$$\begin{aligned} I &= \int_e^{e^2} \frac{1}{t(t+2e)} dt = \frac{1}{2e} \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2e} \right) dt \\ &= \frac{1}{2e} \left(1 - \ln \frac{e^2 + 2e}{3e} \right) = \frac{1}{2e} \left(1 - \ln \frac{e+2}{3} \right) \end{aligned}$$

b) Man muss

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + \frac{5}{4}}$$

probieren.

c) Es ist

$$R(x) = \frac{(A+C)x^3 + (A+B+D)x^2 + (\frac{5}{4}A + B)x + \frac{5}{4}B}{x^2(x^2 + x + \frac{5}{4}}$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich

$$B = 1, \quad A = -\frac{4}{5}B = -\frac{4}{5}, \quad C = -\frac{4}{5} - A = 0, \quad D = -\frac{4}{5} - A - B = -B = -1$$

Also wird

$$R(x) = -\frac{4}{5x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + x + \frac{5}{4}} .$$

d) Die Funktion $F(x) := -\frac{4}{5} \ln x - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg}(x + \frac{1}{2})$ ist Stammfunktion zu R, also

$$I = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = -\frac{4}{5} \ln(3) + \frac{4}{3} - \operatorname{arctg}(2) + \frac{\pi}{4}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[0,1]$ definierte Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t) = t(1-t)$ und $y(t) = (t-2)x(t)$.

a) Berechnen Sie α'. (Zur Orientierung $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ -3t^2+6t-2 \end{pmatrix}$) (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale N an α im Punkte $\alpha(1/4)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt A der von α umschlossenen Fläche. (6 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ (t-2)x'(t)+x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ (t-2)(1-2t)+t(1-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ -3t^2+6t-2 \end{pmatrix}$

b) Ist $t \neq \frac{1}{2}$, so ist $\alpha'(t) \neq \vec{0}$. Weiter ist $\alpha'(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Also ist α in jedem Punkt regulär.

c) Es gilt

$$\alpha(\frac{1}{4}) = \frac{3}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}, \qquad \alpha'(\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{16} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der gewünschten Normalen ist also $\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ und daher

$$N = \frac{3}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

d) Es gilt $2A = \int_0^1 \left| \det(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) \right| dt$. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \det(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) &= \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ (t-2)x(t) & (t-2)x'(t)+x(t) \end{vmatrix} \\ &= (t-2)x(t)x'(t) + x(t)^2 - (t-2)x(t)x'(t) \\ &= x(t)^2 = t^2(1-t)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4 \end{aligned}$$

Somit ist

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t^2 - 2t^3 + t^4\right) dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big((2s-1)\cos(\pi t),\ (t^2+2st)\sin(\pi t/2)\Big)$ und $f(x,y) := y(x^2+2xy)$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $h_s(1,1)$. (10 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $f(x,y) = (x^2y + 2xy^2)$ und damit

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 2y^2 \\ x^2 + 4xy \end{pmatrix}$$

b) Die Jacobimatrix von $\vec{g}$ ist

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} -(2s-1)\pi\sin(\pi t) & 2\cos(\pi t) \\ 2(t+s)\sin(\frac{\pi t}{2}) + \frac{\pi}{2}(t^2+2st)\cos(\pi t/2) & 2t\sin(\pi t/2) \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $\vec{g}(1,1) = (-1,3)$, also $\nabla f(\vec{g}(1,1)) = \begin{pmatrix} 12 \\ -11 \end{pmatrix}$. Weiter haben wir $J_{\vec{g}}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Mit der Kettenregel folgt nun

$$h_s(1,1) = f_x(-1,3)(g_1)_s(1,1) + f_y(-1,3)(g_2)_s(1,1) = 12 \cdot (-2) + (-11) \cdot 2 = -46$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = 0$ und $x = 1$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := x(3 - 2x)$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x$ berandet wird .

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

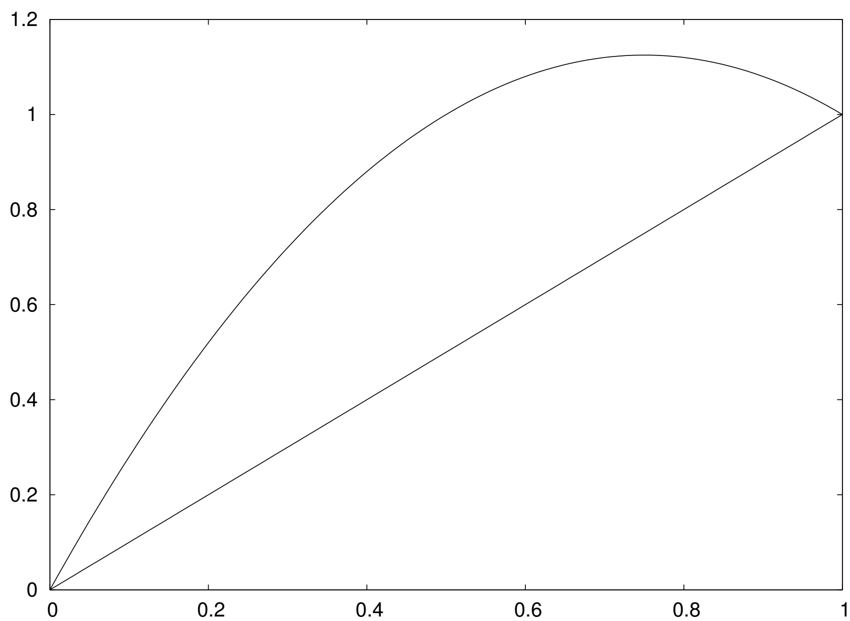
b) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_G \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+y}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(15 Punkte)

Lösung. a) Das Gebiet hat folgendes Aussehen:



b)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 x^{-1/2} \left(\int_x^{3x-2x^2} \frac{dy}{\sqrt{x+y}} \right) dx \\
&= 2 \int_0^1 x^{-1/2} \left(\sqrt{x+y} \Big|_x^{3x-2x^2} \right) dx \\
&= 2 \int_0^1 x^{-1/2} \left(\sqrt{4x - 2x^2} - \sqrt{2x} \right) dx = 2\sqrt{2} \int_0^1 \left(\sqrt{2-x} - 1 \right) dx \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{2-x}\, dx - 2\sqrt{2} \\
&= 2\sqrt{2} \left(-\frac{2}{3}(2-x)^{3/2} \Big|_0^1 - 1 \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{3} \right) \\
&= \frac{16 - 10\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' + 5y'' + 7y' + 3y = -16te^t$$

a) Was ist das charakteristische Polynom P dieser DGL? (3 Punkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei -1.) (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Punkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung u_p ? (4 Punkte)

e) Berechnen Sie u_p mit diesem Ansatz. (6 Punkte)

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. a) Es gilt $P(X) = X^3 + 5X^2 + 7X + 3$

b) Da $P(X) = (X+1)^2(X+3)$ hat P die Nullstellen -1 mit Ordnung 2 und -3 (einfach)

c) Die Basislösungen zur DGL sind $y_1(t) = e^{-t}, y_2(t) = te^{-t}$ und $y_3(t) = e^{-3t}$

d) Da $P(1) \neq 0$, muss der Ansatz lauten $y_p(t) = (at+b)e^t$.

e) Wir berechnen die Ableitungen zu y_p und finden

$$y_p'(t) = (a+b+at)e^t, \quad y_p''(t) = (2a+b+at))e^t, \quad y_p'''(t) = (3a+b+at)e^t.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$3a + b + at + 5(2a+b+at) + 7(a+b+at) + 3(at+b) = -16t$$

also

$$20a + 16b + 16at = -16t$$

Somit ist $a = -1$ und $b = \frac{5}{4}$. So finden wir $y_p(t) = (-t + \frac{5}{4})e^t$.

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Es werden 2 nicht präparierte Würfel geworfen. Angenommen, man interessiere sich für die Verteilung des Produktes Y aus der Augenzahl X_1 des 1. Würfels und der Augenzahl X_2 des 2. Würfels.

a) Was ist der Ergebnisraum Ω? (5 Punkte)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse, also alle $P(\{y\})$, wenn $y \in \Omega$,

(8 Punkte)

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathscr{E}(Y)$ von Q. (7 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{x_1 \cdot x_2 \mid x_1, x_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\ \} \\
&= \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6 \\
&= \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,36\},
\end{aligned}$$

wobei

$$\Omega_1 := \{1,2,3,4,5,6,\},\ \Omega_2 := \{2,4,6,8,10,12\},\ \Omega_3 := \{3,6,9,12,15,18\},$$
$$\Omega_4 := \{4,8,12,16,20,24\},\ \Omega_5 := \{5,10,15,20,15,30\},\ \Omega_6 := \{6,12,18,24,30,36\}$$

b) Für $k \in \Omega$ sei $p_k := P(\{Y = k\})$. Wir zählen ab, in wievielen der $\Omega_1, ..., \Omega_6$ jedes $k \in \Omega$ vorkommt und finden folgende Tabelle:

k	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

c) 1. Weg: Wir errechnen

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(Y) &= \sum_{y \in \Omega} x \cdot P(\{y\}) \\
&= \frac{1}{36} \cdot \Big(1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 12 \cdot 4 \\
&\quad +15 \cdot 2 + 16 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 24 \cdot 2 + 25 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 36 \cdot 1\Big) \\
&= \frac{441}{36} = 12,25
\end{aligned}$$

2. Weg: Da X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind, ist $P(\{X_1 = k, X_2 = \ell\}) = P((\{X_1 = k\}) \cdot P(\{X_2 = \ell\})$, also

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(Y) &= \sum_{k,\ell=1}^{6} k\ell P(\{X_1 = k, X_2 = \ell\}) = \sum_{k=1}^{6} k\ell P(\{X_1 = k\}) P(\{X_2 = \ell\}) \\
&= \mathscr{E}(X_1)^2 = \left(\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)\right)^2 = (\frac{7}{2})^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Eine Maschine produziert Unterlegscheiben, deren Durchmesser X den Wert $X_0 = 23$ mm haben soll. Man hat festgestellt, dass X normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 23,5$mm und Streuung $\sigma = 1,5$ ist.

a) Wie hoch ist der Ausschuss, wenn man nur Unterlegscheiben gebrauchen kann, deren Durchmesser um höchstens 2mm vom gewünschten Wert X_0 abweicht?

b) Angenommen, der Sollwert für den Durchmesser sei $23,5$ mm. Was ist der kleinste Wert a, den man für die Abweichung $|X - 23,5|$ zulassen müsste, sollte der von der Maschine produzierte Ausschuss nicht mehr als 10 % betragen?

Lösung. a) Sei X der Durchmesser (in mm gemessen) und $Y = \frac{X-23,5}{1,5}$. Dann ist Y nach $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt und wir haben

$$\begin{aligned} P(|X - X_0| \leq 2) &= P(21 \leq X \leq 25) = P(-2,5 \leq X - X_0 \leq 1,5) \\ &= P(-1,6 \leq Y \leq 1) = \text{Erf}\,(1) - \text{Erf}\,(-1,667) \\ &= \text{Erf}\,(1) + \text{Erf}\,(1,6) - 1 = 0,84 + 0,95 - 1 = 0,79 \end{aligned}$$

und der Ausschussanteil ist $1 - P(|X - X_0| \leq 2) = 0,21$.

b) Die gesuchte Abweichung a erfüllt die Beziehung $P(|X - \mu| \leq a) = 0,9$, also $2\text{Erf}\,(\frac{a}{1,5}) - 1 = P(|Y| \leq \frac{a}{1,5}) = 0,9$. Das führt auf die Gleichung $\text{Erf}\,(\frac{a}{1,5}) = 0,95$ mit der Lösung $\frac{a}{1,5} = 1,646$. Dann muss $a = 1,5 \cdot 1,646 = 2,47$ erlaubt werden.