Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **23.2.2015**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1a für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=2}^{n} 2^k \frac{k-1}{k(k+1)} = \frac{2^{n+1}}{n+1} - 2\,.$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|2x+1| < |7x+5|$ erfüllen.

Lösung. a) Induktion nach n. Für $n = 2$ sind beide Seiten gleich $\frac{2}{3}$.

Angenommen, die Formel gelte für n. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} 2^k \frac{k-1}{k(k+1)} &= \sum_{k=2}^{n} 2^k \frac{k-1}{k(k+1)} + \frac{n}{(n+1)(n+2)} 2^{n+1} \\
&= \frac{2^{n+1}}{n+1} - 2 + \frac{n}{(n+1)(n+2)} 2^{n+1} \\
&= \frac{2^{n+1}}{n+1}\left(1 + \frac{n}{n+2}\right) - 2 \\
&= \frac{2^{n+1}(2n+2)}{(n+1)(n+2)} - 2 = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2
\end{aligned}$$

Zu b) Es gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
x \in M \quad &\Leftrightarrow \quad (2x+1)^2 < (7x+5)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 4 < 49x^2 + 70x + 25 \\
&\Leftrightarrow \quad 45x^2 + 66x > -24 \Leftrightarrow x^2 + \frac{22}{15}x > -\frac{8}{15} \\
&\Leftrightarrow \quad (x + \frac{11}{15})^2 > \frac{1}{15^2} \Leftrightarrow |x + \frac{11}{15}| > \frac{1}{15} \\
&\Leftrightarrow \quad x < -\frac{4}{5} \quad \text{oder } x > \frac{-2}{3}
\end{aligned}$$

Somit ist $M := \mathbb{R} \setminus [-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}]$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

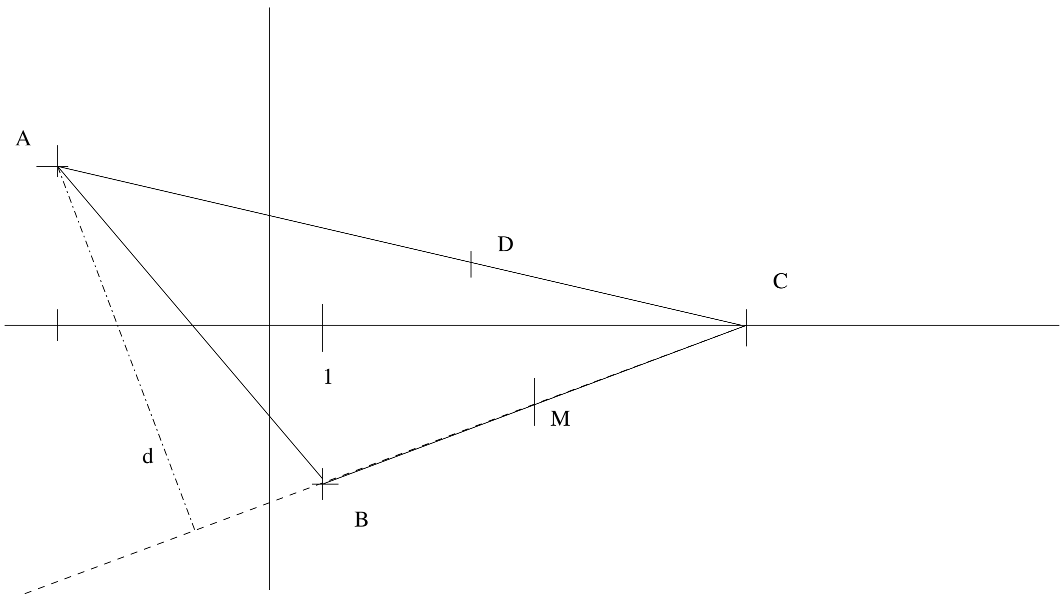
Gegeben sei ein Dreieck $\mathcal{D}$ mit Ecken bei $\vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $\vec{D}$ teile die Seite $\overline{AC}$ von $\vec{A}$ aus im Verhältnis 3 : 2. Weiter sei $\vec{M}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$.

a) Berechnen Sie $\vec{M}$ und $\vec{D}$ (3+5 Punkte)

b) Welchen Abstand hat $\vec{A}$ von der Geraden durch $\vec{B}$ und $\vec{C}$? (8 Punkte)

c) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck $\mathcal{D}$? (4 Punkte)

Lösung. a) Das Dreieck sieht so aus:



Es gilt $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{C}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \vec{A} + \frac{3}{5}(\vec{C} - \vec{A}) = \frac{2\vec{A} + 3\vec{C}}{5} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) Der gesuchte Abstand ist

$$d = \frac{|\det\left(\vec{A} - \vec{B},\ \vec{C} - \vec{B}\right)|}{\|\vec{C} - \vec{B}\|} = \frac{|\det\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}|}{\|\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\|} = \frac{57}{\sqrt{58}}$$

c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $F = \frac{1}{2}|\det\left(\vec{A} - \vec{B},\ \vec{C} - \vec{B}\right)| = 28,5$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 & -1 \\ 2 & 7 & 0 & t \\ -7 & -11 & 9 & -19 \end{pmatrix}$ mit einer Zahl $t \in \mathbb{R}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Rang von $\mathcal{A}$ und die Dimension des Nullraumes $N_{\mathcal{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von t.

b) Berechnen Sie für $t = 8$ Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Sei $t = 8$. Berechnen Sie dann $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gilt dann für den Nullraum $N_{\mathcal{A}}$ die Gleichheit

$$N_{\mathcal{A}} = V := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \ ?$$

(Antwort begründen!)

(10+4+6 Pkte)

Lösung. a) Mit Blick auf Teil b) formen wir die erweiterte Matrix $(\mathcal{A}, \vec{b})$ um. Subtrahieren wir 2 mal die 1. Zeile von der 2. Zeile und addieren 7 mal die 1. Zeile zur 3. Zeile, so finden wir die neue Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 15 & 10 & t+2 & -5 \\ 0 & -39 & -26 & -26 & 13 \end{array}\right)$$

Dann addieren wir zur 3. Zeile das 13/5-fache der 2. Zeile und finden

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 15 & 10 & t+2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{5}(t-8) & 0 \end{array}\right)$$

Das ergibt

$$\operatorname{Rang}(\mathcal{A}) = \begin{cases} 2 & \text{, wenn} \quad t = 8 \\ 3 & \text{, wenn} \quad t \neq 8 \end{cases}$$

und damit wegen $\dim(N_{\mathcal{A}}) = 4 - \operatorname{Rang}(\mathcal{A})$ weiter

$$\dim(N_{\mathcal{A}}) = \begin{cases} 2 & \text{, wenn} \quad t = 8 \\ 1 & \text{, wenn} \quad t \neq 8 \end{cases}$$

b) Für $t = 8$ genügt es, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a - 4b + 5 + 1 &= 3 \\ 15b - 10 - 10 &= -5 \end{aligned}$$

zu lösen. Das ergibt $b = 1$, und damit auch $a = 1$. Somit $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Es ist $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Da $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, ist V ein 2-dimensionaler Unterraum von $N_{\mathcal{A}}$. Da dieser ebenfalls die Dimension 2 hat, muss $V = N_{\mathcal{A}}$ sein.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die Folge $(x_n)_n$ mit

$$x_n = \frac{3n^4 + 5n + 6}{(n^2+2)(n+1)} - \frac{15n^2 + n + 3}{5n+1}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_n mit Polynomdivision um).

b) Es sei $f(x) := \dfrac{3x+2}{x^2+1}$ für $x \in [1, \infty)$.

(i) Formen Sie den Ausdruck $\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ in $\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} = -\dfrac{3ts - 3 + 2(s+t)}{(t^2+1)(s^2+1)}$ um, wenn $t > s \geq 1$.

(ii) Ist f monoton?

(iii) Bestimmen Sie die Wertemenge $W := \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \geq 1\}$.

(10+5+2+3 Pkte)

Lösung. a) Wir schreiben $x_n = y_n - z_n$, wobei $x_n = \dfrac{3n^4+5n+6}{(n^2+2)(n+1)}$ und $y_n = \dfrac{15n^2+n+3}{5n+1}$. Mit Polynomdivision folgt nun

$$y_n = 3n - 3 + \frac{-3n^2+5n+12}{(n^2+2)(n+1)}, \qquad z_n = 3n - \frac{2}{5} + \frac{17}{5}\,\frac{1}{5n+1}$$

also $x_n = -\dfrac{13}{5} + \dfrac{-3n^2+5n+12}{(n^2+2)(n+1)} - \dfrac{17}{5}\,\dfrac{1}{5n+1} \longrightarrow -\dfrac{13}{5}$, wenn $n \to \infty$.

Alternativ dazu:

$$x_n = \frac{-13n^4 - 19n^3 + 6n^2 + 31n + 3}{5n^4 + 6n^3 + 6n^2 + 6n + 1} = \frac{-13 - 19/n + 6/n^2 + 31/n^3 + 1/n^4}{5 + 6/n + 6/n^2 + 6/n^3 + 1/n^4} \longrightarrow -\frac{13}{5},$$

mit $n \to \infty$.

b) (i) Es gilt

$$f(t) - f(s) = \frac{3t+2}{t^2+1} - \frac{3s+2}{s^2+1} = \frac{(3t+2)(s^2+1) - (3s+2)(t^2+1)}{(t^2+1)(s^2+1)} = \frac{3ts^2 + 3t + 2s^2 - 3st^2 - 3s - 2t^2}{(t^2+1)(s^2+1)}$$

$$= \frac{3ts(s-t) + 3(t-s) + 2s^2 - 2t^2}{(t^2+1)(s^2+1)} = \frac{3ts - 3 + 2(s+t)}{(t^2+1)(s^2+1)}(s-t)$$

Somit ist $\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} = -\dfrac{3ts - 3 + 2(s+t)}{(t^2+1)(s^2+1)}$.

(ii) Es gilt $3ts - 3 + 2(s+t) \geq 4$, also $f(t) - f(s) < 0$, wenn $t > s \geq 1$. Damit ist f streng monoton fallend.

(iii) Da $0 < f(x) \longrightarrow 0$, wenn $x \to \infty$, haben wir $W = (0, f(1)]$. Mit $f(1) = \dfrac{5}{2}$, folgt also $W = (0, \dfrac{5}{2}]$.

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{2x+7}{x^2+4x+8}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? $\left(\text{Zur Orientierung: } f'(x) = -2\frac{(x+1)(x+6)}{(x^2+4x+8)^2} \right)$ (8 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (5 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f bei $x_0 = 1$.

(4 Pkte)

Lösung. a) Da $x^2 + 4x + 8 = (x+2)^2 + 4 > 0$, ist $D_f = \mathbb{R}$

b) Mit der Quotientenregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2+4x+8) - (2x+7)(2x+4)}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{2x^2+8x+16-4x^2-22x-28}{(x^2+4x+8)^2} \\ &= \frac{-2x^2-14x-12}{(x^2+x+2)^2} = -2\frac{x^2+7x+6}{(x^2+x+2)^2} = -2\frac{(x+1)(x+6)}{(x^2+4x+8)^2} \end{aligned}$$

c) Auf $(-\infty, -6)$ gilt $f'(x) < 0$, und für $-6 < x < -1$ ist $f'(x) > 0$, also liegt bei -6 ein lokales Minimum für f.

Weiter ist $f'(x) < 0$ auf $(-1, \infty)$. Also hat f bei -1 ein lokales Maximum.

d) Die Tangente ist durch $T(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{9}{13} - \frac{28}{169}(x-1)$ gegeben.