Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **25.3.2014**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \displaystyle\int_1^2 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5e^2}dx$.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \dfrac{4x^2+17x+5}{x^2(2x+5)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von R?

(9 Pkte)

c) Berechnen Sie das Integral $I = \int_2^8 R(x)dx$.

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Mit der Substitutionsregel finden wir

$$I = \int_1^2 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5e^2}dx = \int_e^{e^2} \frac{2tdt}{t^2+5e^2} = \ln\left(t^2+5e^2\right)\Big|_e^{e^2} = \ln\frac{e^2+5}{6}$$

b) Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung für R lautet

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{2x+5} \\ &= \frac{Ax(2x+5)+B(2x+5)+Cx^2}{x^2(2x+5)} = \frac{(2A+C)x^2+(2B+5A)x+5B}{x^2(2x+5)} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $B = 1, A = 3, C = -2$, also

$$R(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{2x+5}$$

c) Es folgt aus b)

$$I = 3\ln x - \frac{1}{x} - \ln(2x+5)\Big|_2^8 = 3\ln 4 + \frac{3}{8} - \ln(7/3)$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[-1,1]$ definierte Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t) = t^2 - 1$ und $y(t) = (t-1)^2(t+1)$.

a) Berechnen Sie α'. (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale an α im Punkte $\alpha(3/4)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt der von α umschlossenen Fläche.

Lösung. a) Wir haben $x'(t) = 2t$ und $y(t) = (t-1)x(t)$, also $y'(t) = x(t) + (t-1)x'(t) = t^2 - 1 + 2t(t-1) = 3t^2 - 2t - 1$, also

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 2t - 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wo α nicht regulär wäre, müsste $t = 0$ und gleichzeitig $3t^2 - 2t - 1 = 0$ sein, was unmöglich ist.

c) Es gilt $\alpha(3/4) = (-7/16,\, 7/64)$ und $\alpha'(3/4) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -13/16 \end{pmatrix}$, also weist die Normale an α bei $\alpha(3/4)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 13/16 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 13 \\ 24 \end{pmatrix}$. Die gesuchte Normale ist nun

$$N = \begin{pmatrix} -7/16 \\ 7/64 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 13 \\ 24 \end{pmatrix}$$

d) Mit der Sektorformel finden wir

$$\begin{aligned}
2A &= \int_{-1}^{1} \begin{vmatrix} t^2 - 1 & 2t \\ ((t^2-1)(t-1) & (3t+1)(t-1) \end{vmatrix} dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1-t^2)(1-t) \begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 1 & 3t+1 \end{vmatrix} dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1-t^2)(1-t)(1+t)dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^2 dt = \int_{-1}^{1} (1 - 2t^2 + t^4)dt
\end{aligned}$$

Also ist $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - 2t^2 + t^4)dt = \dfrac{8}{15}$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big(e^{2t}(s-1),\ e^{3s}(t^2-st)\Big)$ und $f(x,y) := y(x^2-xy+y)$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $h_s(-1,1)$. (10 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $\nabla f = \begin{pmatrix} y(2x-y) \\ x^2-2xy+2y \end{pmatrix}$

b) $J_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} 2e^{2t}(s-1) & e^{2t} \\ (2t-s)e^{3s} & e^{3s}(3t^2-3st-t) \end{pmatrix}$

c) Es gilt mit der Kettenregel

$$h_s(-1,1) = f_x(\vec{g}(-1,1))(g_1)_s(-1,1) + f_y(\vec{g}(-1,1))(g_2)_s(-1,1)$$

und weiter $\vec{g}(-1,1) = (0, 2e^3)$. Weiter ist $f_x(0,2e^3) = -4e^6$ und $f_y(0,2e^3) = 4e^3$ und weiter $(g_1)_s(-1,1) = e^{-2}$, $(g_2)_s(-1,1) = 7e^3$ somit

$$h_s(-1,1) = -4e^4 + 28e^6$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = 0$ und $x = 3$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := x(4-x)$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x$ berandet wird.

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

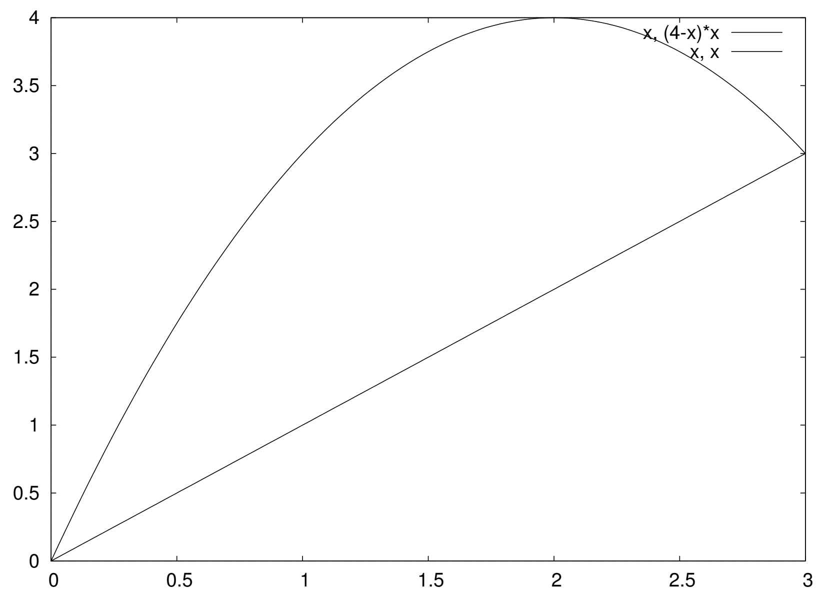
b) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_G \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}^{\,3}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(15 Punkte)

Lösung. a) Das Gebiet G sieht so aus:



b)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_G \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}^{\,3}} dG \\
&= \int_0^3 \sqrt{x} \left(\int_x^{x(4-x)} \frac{1}{\sqrt{x+y}^{\,3}} dy \right) dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{x}(-2) \frac{1}{\sqrt{x+y}} \Big|_x^{x(4-x)} dx \\
&= (-2) \int_0^3 \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{5x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) dx \\
&= (-2) \int_0^3 \left(\frac{1}{\sqrt{5-x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dx \\
&= 4\sqrt{5-x}\Big|_0^3 + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \\
&= 7\sqrt{2} - 4\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = te^t$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei -1.

Lösung. Das charakteristische Polynom P der DGL ist $P = X^3 - X^2 - 5X - 3 = (X-3)(X+1)^2$.

Für die homogene DGL ergeben sich die Fundamentallösungen e^{-t}, te^{-t}, e^{3t}, und die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet $y_h(t) = (a+bt)e^{-t} + ce^{3t}$.

Zur partikulären Lösung probieren wir $y_p(t) = (At+B)e^t$ und finden

$$y_p' = (At + A + B)e^t$$

$$y_p'' = (At + 2A + B)e^t$$

$$y_p''' = (At + 3A + B)e^t$$

Einsetzen ergibt

$$y_p''' - y_p'' - 5y_p{}' - 3y_p = (-8At - 4A - 8B)e^t$$

Soll das te^t werden, muss $A = -\frac{1}{8}$ und $B = \frac{1}{16}$ gewählt werden.

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y = (a+bt)e^{-t} + ce^{3t} + \frac{-2t+1}{16}e^t\,.$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Ein Fußball habe eine Oberfläche, für die der Erwartungswert 916π cm^2 betrage. Die Varianz für den Radius habe den Zahlenwert 4 cm^2. Wie groß ist der Erwartungswert des Radius ?

b) Angenommen, der Radius eines Balles sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mathscr{E}(R) = 16$ cm und Varianz $\sigma^2 = 9\text{cm}^2$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist seine Oberfläche dann größer als 1156π?

Lösung. Die Oberfläche des Fußballs ist $A = A(R) = 4\pi R^2$. Wir wissen, dass $\mathscr{E}(A) = 916\pi\text{cm}^2$, also $\mathscr{E}(R^2) = \frac{916\pi}{4\pi}\text{cm}^2 = 229\text{cm}^2$. Aus $\text{Var}(R) = 4\text{cm}^2$ erhalten wir dann

$$4\text{cm}^2 = \mathscr{E}(R^2) - (\,\mathscr{E}(R)\,)^2 = 229\text{cm}^2 - (\,\mathscr{E}(R)\,)^2$$

und damit $(\,\mathscr{E}(R)\,)^2 = 225\text{cm}^2$, also $\mathscr{E}(R) = 15$ cm.

b) Ist $\mathscr{E}(R) = 16\text{cm}$ und $\text{Var}(R) = 9\text{cm}^2$, so folgt

$$\begin{aligned} P(A(R) \geq 1156\pi\text{cm}^2) &= P(R^2 \geq \frac{1156\pi}{4\pi}\text{cm}^2 = 289\text{cm}^2) \\ &= P(R \geq 17\text{cm}) = P(\frac{R-16}{3} > \frac{1}{3}) \\ &= 1 - \text{Erf}(\frac{1}{3}) = 0,37 \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Eine Firma benötigt Kolbenringe mit einem Durchmesser von 24 mm. Sie akzeptiert Abweichungen von maximal ± 1.25 mm. Ein Hersteller produziert solche Kolbenringe mit einem Durchmesser X, der $N(23, \sigma)$-verteilt ist.

a) Wieviel Prozent der Kolbenringe würde die Firma akzeptieren, wenn $\sigma = 0.72$ mm wäre?

b) Wie groß darf σ sein, wenn die Firma nur 20% der Kolbenringe ablehnen soll? Benutzen Sie: Ist $\sigma \leq 0,45$ mm, so kann also so getan werden, als sei $\mathrm{Erf}\,(2,25/\sigma) = 1$.

Lösung. a) Zu berechnen ist $P(|X - 24| \leq 1.25)$. Das ist aber

$$\begin{aligned} P(|X-24| \leq 1.25) &= P(-1,25 \leq X - 24 \leq 1,25) = P(-0,25 \leq X - 23 \leq 2,25) \\ &= P(-\frac{0,25}{0,72} \leq \frac{X-23}{0,72} \leq \frac{2,25}{0,72}) \\ &= \mathrm{Erf}(3,125) + \mathrm{Erf}(0,34) - 1 = 0,9991 + 0,6331 - 1 = 0,63 \end{aligned}$$

Die Firma würde also 63% der Kolbenringe akzeptieren.

b) Es muss gelten

$$0,8 \leq P(|X-24| \leq 1,25) = P(-\frac{0,25}{\sigma} \leq \frac{X-23}{\sigma} \leq \frac{2,25}{\sigma}) = \mathrm{Erf}(\frac{0,25}{\sigma}) + \mathrm{Erf}(\frac{2,25}{\sigma}) - 1$$

Wenn $\sigma \geq 0,45)$, so hätte man $P(|X-24| \leq 1,25) \leq \mathrm{Erf}(\frac{0,25}{\sigma}) \leq \mathrm{Erf}(5/9) \leq 0,71 < 0,8$. Also ist $\sigma \leq 0,45$ und damit muss $\mathrm{Erf}(\frac{0,25}{\sigma}) \geq 0,8$ werden. Das erfordert $\frac{0,25}{\sigma} \geq 0,84$, also $\sigma \leq \frac{0,25}{0,84} = 0,29$.