Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **31.3.2014**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|5x+3| < |x-4|$ erfüllen.

(10+10 Punkte)

Lösung. a) Induktionsanfang $n = 1$. Beide Seiten sind gleich $\frac{4}{3}$.

Gilt die Summenformel für n, so auch für $n+1$, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{4k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} + \frac{4n+4}{3^{n+1}} \\
&= 3 - \frac{2n+3}{3^n} + \frac{4n+4}{3^{n+1}} \\
&= 3 - \frac{6n+9-(4n+4)}{3^{n+1}} \\
&= 3 - \frac{2n+5}{3^{n+1}} = 3 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

b) Es gilt $x \in M$ genau dann, wenn $(5x+3)^2 - (x-4)^2$, also $24x^2 + 38x - 7 < 0$. Wir müssen nur die Gleichung $24x^2 + 38x - 7 = 0$ lösen. Sind $x_1 < x_2$ diese Lösungen, so ist $M = (x_1, x_2)$, sobald ein Punkt $x \in (x_1, x_2)$ zu M gehört. Die Lösungen zu obiger quadratischer Gleichung sind nun $x_1 = -\frac{7}{4}$, $x_2 = \frac{1}{6}$. Da $0 \in M$, folgt jetzt $M = (-\frac{7}{4}, \frac{1}{6})$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck mit Ecken bei $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $\vec{D}$ teile die Seite $\overline{AC}$ von $\vec{A}$ aus im Verhältnis $4 : 3$. Weiter sei $\vec{M}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$.

a) Berechnen Sie $\vec{M}$ und $\vec{D}$ (2+3 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $\vec{S}$ der Geraden G_1 durch $\vec{B}$ und $\vec{D}$ und G_2 durch $\vec{A}$ und $\vec{M}$.

(10 Punkte)

c) In welchem Verhaltnis wird die Strecke $\overline{AM}$ durch $\vec{S}$ von $\vec{A}$ aus geteilt?

(5 Punkte)

Lösung. a) $\vec{M} = \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7/2 \end{pmatrix}$, und $\vec{D} = \vec{A} + \frac{4}{7}(\vec{C} - \vec{A}) = \frac{3\vec{A}+4\vec{C}}{7} = \begin{pmatrix} 12/7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Es gilt $G_1 = \vec{B} + \mathbb{R}(\vec{D} - \vec{B}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -23/7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $G_2 = \vec{A} + \mathbb{R}(\vec{M} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.
Gesucht sind $t, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -23/7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Wir bilden das Skalarprodukt mit $\begin{pmatrix} 2 \\ 23/7 \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\frac{93}{7} = -\frac{23}{7} + t\frac{319}{7}$$

Die Lösung ist $t = \frac{4}{11}$, und damit wird $\vec{S} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 32 \\ 25 \end{pmatrix}$ Wir vergleichen $\|\vec{A} - \vec{S}\|$ mit $\|\vec{A} - \vec{M}\|$ und finden $\|\vec{A} - \vec{S}\| = t\| \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} \| = \frac{4}{11}\sqrt{145}$ und $\|\vec{A} - \vec{M}\| = \frac{1}{2}\| \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} \| = \frac{1}{2}\sqrt{145}$, also ist das gesuchte Teilungsverhältnis $8 : 3$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -6 & 12 & 5 & 12 \\ 10 & 60 & 55 & 40 \\ -9 & 30 & 17 & 27 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ -10 \\ -12 \end{pmatrix}$.

a) Für welches t ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ nicht-leer?

b) Berechnen Sie für dieses t Zahlen $u, v \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Berechnen Sie für dieses t den Lösungsraum $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ (10+5+5 Pkte)

Lösung. a) In der erweiterten Matrix $(\mathcal{A} \,|\, \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 12 & 5 & 12 & t \\ 10 & 60 & 55 & 40 & -10 \\ -9 & 30 & 17 & 27 & -12 \end{array}\right)$ addieren wir zur 2. Zeile das $\frac{5}{3}$ - fache der 1. Zeile und subtrahieren das (3/2)-fache der 1. Zeile von der 3. Zeile. So entsteht die Matrix $\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 12 & 5 & 12 & t \\ 0 & 80 & \frac{190}{3} & 60 & -10 + \frac{5}{3}t \\ 0 & 12 & \frac{19}{2} & 9 & -12 - \frac{3}{2}t \end{array}\right)$. Von der 3. Zeile subtrahieren wir 3/20 mal die 2. Zeile und finden die Matrix $\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 12 & 5 & 12 & t \\ 0 & 80 & \frac{190}{3} & 60 & -10 + \frac{5}{3}t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7t+42}{4} \end{array}\right)$. Soll $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) \neq \emptyset$ sein, muss $t = -6$ gewählt werden.

b) Wir lösen das Gleichungssystem $-6u + 12v = -18, \qquad 80v + 60 = -20$ Das führt auf $u = 1, v = -1$, also $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Es gilt $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) = \vec{x}_0 + \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$, so dass wir nur noch $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ berechnen müssen. Dazu lösen wir das Gleichungssystem $-6x_1 + 12x_2 = -5x_3 - 12x_4, \qquad 80x_2 = -\frac{190}{3}x_3 - 60x_4$ und finden $x_2 = -\frac{19}{24}x_3 - \frac{3}{4}x_4, \qquad x_1 = -\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4$ Daraus folgt $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{19}{24} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = \dfrac{(8n^2+3)(n-1)}{(2n-1)(2n+3)} - \dfrac{2n^2+7}{n+11}$. Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_n mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6})$. Klären Sie folgende Fragen:

(i) Welche Periode hat f? (ii) Welche Nullstellen hat f innerhalb einer Periode?

(iii) Wo hat f innerhalb einer Periode seinen größten, wo seinen kleinsten Wert?

(iv) Skizzieren Sie den Graphen von f über einer Periode. (10+1+2+3+4 Pkte)

Lösung. a) Mit Polynomdivision finden wir

$$\frac{(8n^2+3)(n-1)}{(2n-1)(2n+3)} = 2n - 4 + \frac{25n-15}{(2n-1)(2n+3)}, \qquad \frac{2n^2+7}{n+11} = 2n - 22 + \frac{249}{n+11}$$

Das führt auf

$$x_n = 18 + \frac{25n-15}{(2n-1)(2n+3)} - \frac{249}{n+11} \longrightarrow 18$$

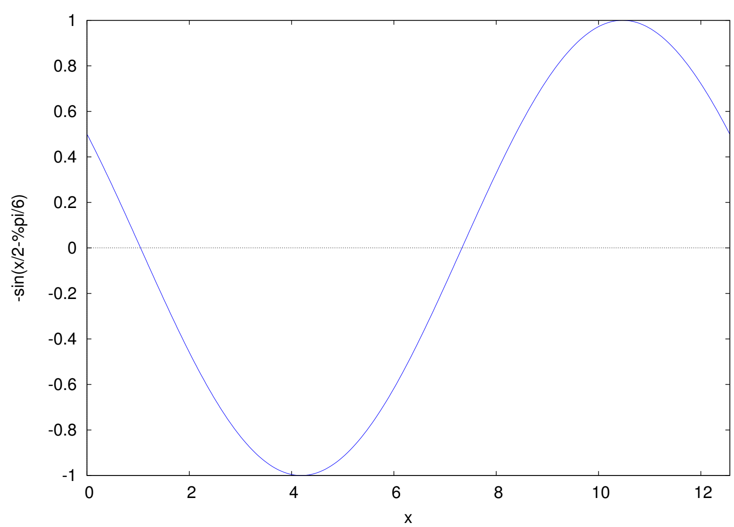
mit $n \to \infty$.

b) (i) Die Funktion f hat die Periode 4π.

(ii) Genau dann ist $f(x) = 0$, wenn $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} \in \{0, \pi\}$, also $x \in \{\frac{\pi}{3}$.

(iii) Es gilt $f(x) = -1$ genau dann, wenn $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, also $x = \frac{4\pi}{3}$. Weiter ist $f(x) = 1$ genau dann, wenn $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$, also $x = \frac{10\pi}{3}$.

(iv) Der Graph von f ist:



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{xe^{-4x}}{2x+1}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? (8 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (5 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 2$. (4 Pkte)

Lösung. a) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

b) Die 1. Ableitung von f wird mit der Quotientenregel berechnet

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+1)(e^{-4x} - 4xe^{-4x}) - 2xe^{-4x}}{(2x+1)^2} \\
&= -e^{-4x}\,\frac{(2x+1)(4x-1)+2x}{(2x+1)^2} \\
&= -e^{-4x}\,\frac{8x^2+4x-1}{(2x+1)^2} \\
&= -8e^{-4x}\,\frac{x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}}{(2x+1)^2} \\
&= -16e^{-4x}\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(2x+1)^2}
\end{aligned}$$

mit $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{4}$, $x_2 := \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$.

c) Da $f'(x) < 0$ auf $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ und $f'(x) > 0$ auf (x_1, x_2), liegt bei x_1 ein lokales Minimum und bei x_2 ein lokales Maximum für f.

d) Die gesuchte Tangente ist $T_{f,2}(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = \frac{2}{5}e^{-8} - \frac{39}{25}e^{-8}(x-2)$.