Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **19.3.2013**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral

$$I := \int_0^2 \frac{e^{-x}dx}{2e^{-x}+1}$$

(6 Pkte)

b) Sei $R(x) = \dfrac{4x^2 - x - 6}{(x-2)(x^2+4)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von R?

(5 Pkte)

c) Berechnen Sie eine Stammfunktion für R auf $(-\infty, 2)$.

(10 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Es ist

$$I = \int_0^2 \frac{e^{-x}dx}{2e^{-x}+1} = \int_{e^{-2}}^1 \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{2}\ln(2t+1)\Big|_{e^{-2}}^1 = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{1+2e^{-2}})$$

b) Wir versuchen

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(x-2)(Bx+D)}{(x-2)(x^2+4)} \\ &= \frac{Ax^2+4A+Bx^2+(D-2B)x-2D}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+(D-2B)x+4A-2D}{(x-2)(x^2+4)} \end{aligned}$$

Somit ist

$$4x^2 - x - 6 = (A+B)x^2 + (D-2B)x + 4A - 2D$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$A + B = 4, \qquad D - 2B = -1, \qquad 4A - 2D = -6$$

Das ergibt $B = 4 - A$ und weiter $-1 = D - 2(4-A) = D + 2A - 8, \quad 2A - D = -3$. Das führt auf

$$\begin{aligned} D + 2A &= 7 \\ 2A - D &= -3 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = 1, D = 5, B = 3$. Also

$$R(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{3x+5}{x^2+4}$$

c) Es folgt

$$\begin{aligned} \int R(x)dx &= \ln(2-x) + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 5\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln(2-x) + \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \frac{5}{2}\mathrm{arctg}(\frac{x}{2}) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei die auf $[0, 2\pi)$ definierte Kurve $\alpha(t) = r(t)\vec{e}(t)$, wobei $\vec{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ in Polarkoordinaten, wobei $r(t) = e^{-\sin^2 t}$.

a) Berechnen Sie α'. (8 Punkte)

b) In welchen Punkten verläuft die Tangente an α senkrecht?

c) Berechnen Sie die Normale an α im Punkte $\alpha(\pi/6)$. (6+6 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$\alpha'(t) = r(t)\vec{e_\perp}(t) + r'(t)\vec{e}(t) = r(t)\Big(\vec{e_\perp}(t) - 2\sin t\,\cos t\,\cdot \vec{e}(t)\Big)$$

b) Es folgt aus a)

$$x'(t) = r(t)\Big(-\sin t - 2\sin t\,\cos t\,\cdot \cos t\Big) = -r(t)\,\sin t\Big(1 + 2\cos^2 t\Big)$$

und damit ist $x'(t) = 0$ genau dann, wenn $\sin t = 0$, also $t \in \{0, \pi\}$.

c) Es gilt $r(\pi/6) = e^{-1/4}$ und $\vec{e}(\pi/6) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Das ergibt $\alpha(\pi/6) = \frac{1}{2}e^{-1/4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

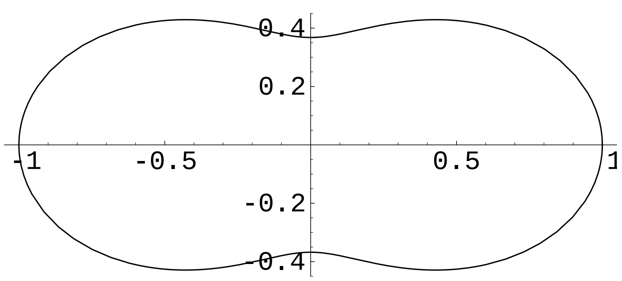
Weiter ist

$$\alpha'(\pi/6) = \frac{1}{2}e^{-1/4}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,e^{-1/4}\begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Normale ist dann

$$N := \frac{1}{2}e^{-1/4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hier ist die Kurve



Aufgabe 3 (20 Punkte)

Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big(3t - 2ts + s^2,\ 5t - 2s^2\Big)$ und $f(x, y) := y\ln(1 + x^2 + xy)$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t, s) = f(\vec{g}(t, s))$, so berechnen Sie $h_s(3, 2)$. (10 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$f_x = \frac{y(2x+y)}{1+x^2+xy}$$
$$f_y = \ln(1+x^2+xy) + \frac{xy}{1+x^2+xy}$$

b)

$$J_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} 3-2s & -2t+2s \\ 5 & -4s \end{pmatrix}$$

c) Es gilt nach der Kettenregel, wenn wir $\vec{x}_0 := \vec{g}(3, 2)$ setzen:

$$h_s(3, 2) = f_x(\vec{x}_0)(g_1)_s(3, 2) + f_y(\vec{x}_0)(g_2)_s(3, 2)$$

Nun ist aber $\vec{x}_0 = (1,\ 7)$ und weiter

$$f_x(1,\ 7) = \frac{63}{9} = 7, \qquad f_y(1,\ 7) = \ln 9 + \frac{7}{9}$$

und

$$(g_1)_s(3, 2) = -2, \qquad (g_2)_s(3, 2) = -8$$

Also erhalten wir

$$h_s(3, 2) = 7 \cdot (-2) + (\ln 9 + \frac{7}{9}) \cdot (-8) = -\frac{126+56}{9} - 8 \cdot \ln 9 = -\frac{182}{9} - 8 \cdot \ln 9$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Es sei

$$f(x) := \begin{cases} x(4-x) & \text{, wenn} \quad 0 \le x \le 2 \\ 6-x & \text{, wenn} \quad 2 \le x \le 6 \end{cases}$$

und G das Gebiet, das zwischen $x = 2$ und $x = 6$ von unten durch die x-Achse und von oben durch den Graphen von f berandet ist.

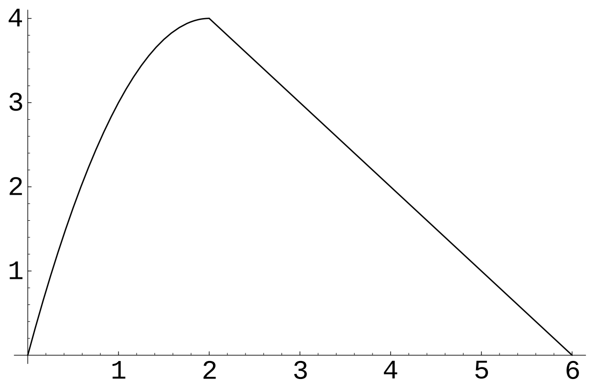
a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Pkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint\limits_G \frac{1}{x+y} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges. (15 Pkte)

Lösung. a) Das Gebiet G hat die folgende Gestalt:



b) Wir schreiben $I = I_1 + I_2$ mit

$$I_1 := \iint_{G_1} \frac{1}{x+y} dG_1, \quad I_2 := \iint_{G_2} \frac{1}{x+y} dG_2 \,,$$

wobei $G_1 := G \cap \{0 \le x \le 2\},\ G_2 = G \cap \{2 \le x \le 6\}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \left(\int_0^{x(4-x)} \frac{dy}{x+y} \right) dx = \int_0^2 \ln\left(\frac{x + x(4-x)}{x} \right) dx = \int_0^2 \ln(5-x) dx \\ &= -\left((5-x)\ln(5-x) - (5-x)\right)\Big|_0^2 \\ &= -\left(3\ln 3 - 3 - (5\ln 5 - 5)\right) = 5\ln 5 - 3\ln 3 - 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_2^6 \left(\int_0^{6-x} \frac{dy}{x+y} \right) dx = \int_2^6 \ln\left(\frac{x+6-x}{x} \right) dx \\ &= \int_2^6 \ln\left(\frac{6}{x} \right) dx = 4\ln 6 - (x\ln x - x)\Big|_2^6 \\ &= 4\ln 6 - (6\ln 6 - 6) + 2\ln 2 - 2 = -2\ln 6 + 4 + 2\ln 2 = 4 - 2\ln 3 \end{aligned}$$

Somit ist

$$I = 5\ln 5 - 3\ln 3 - 2 + 4 - 2\ln 3 = 2 + 5\ln\frac{5}{3}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$3y''' + 10y'' + 4y' - 8y = e^{2t/3}$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei -2.

Lösung. Mit dem Hornerschema erhalten wir wir das charakteristische Polynom P, die Zerlegung

$$P = (3X - 2)(X + 2)^2$$

Somit werden die Lösungen der homogenen DGL durch

$$y_{\text{hom}}(t) = Ae^{2t/3} + (B + Ct)e^{-2t}$$

gegeben, wobei A, B und C beliebige reelle Koeffizienten sind.

Für die partikuläre Lösung versuchen wir

$$u_{\text{part}}(t) = ate^{2t/3}$$

Da $2/3$ eine einfache Nullstelle für P ist, können wir $a = \frac{1}{P'(2/3)} = \frac{3}{64}$ nehmen. Also ist die allgemeineLösung der Differenzialgleichung

$$y(t) = \frac{3}{64}te^{2t/3} + Ae^{2t/3} + (B + Ct)e^{-2t}$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)
Von einem Prüfverfahren zur Fehlerdiagnose von Waschmaschinen weiß man, dass dieses Verfahren mit Wahrscheinlichkeit 0,9 einen Fehler anzeigt, wenn eine Waschmaschine einen Fehler hat und mit Wahrscheinlichkeit 0,8 keinen Fehler anzeigt, wenn sie fehlerfrei ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Waschmaschine fehlerfrei ist, sei 0,95 .

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Waschmaschine tatsächlich einen Fehler hat, wenn das Prüfverfahren einen solchen behauptet?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Waschmaschine fehlerfrei ist, wenn das Prüfverfahren die Fehlerfreiheit ergibt?

Lösung. Es sei A das Ereignis: "Die Waschmaschine hat einen Fehler" und B das Ereignis "Das Prüfverfahren meldet, dass die Waschmaschine hat einen Fehler habe".

Zu a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$.

Gegeben ist: $P(A) = 0.05$, sowie $P(B|A) = 0.9$ und $P(B^c|A^c) = 0.8$.

Nun ist aber

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.9 \cdot 0.05}{P(B)}$$

Wir benötigen also $P(B)$. Es gilt mit der Bayes-Formel Mit der Bayes-Formel finden wir

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)\,P(B|A) + P(A^c)\,P(B|A^c) \\ &= P(A)\,P(B|A) + P(A^c)\,(1 - P(B^c|A^c)\,) \\ &= 0.05 \cdot 0.9 + 0.95 \cdot 0.2 = 0.235 \end{aligned}$$

So finden wir

$$P(A|B) = \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.235} = 0.191$$

Zu b) Gesucht ist $P(A^c|B^c)$.

Es ist

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(B^c|A^c)P(A^c)}{P(B^c)} = \frac{0.8 \cdot 0.95}{1 - 0.235} = \frac{0.76}{0.765} = 0.993$$

Die gewünschte Wahrscheinlichkeit ist also 99.3%

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Eine Firma benötigt Stahlstifte mit einem Durchmesser von 2 mm. Sie akzeptiert Abweichungen von maximal ± 0.5 mm. Ein Hersteller produziert solche Stahlstifte mit einem zufälligen Durchmesser X, der $N(2, \sigma)$-verteilt ist.

a) Wieviel Prozent der Stahlstifte akzeptiert die Firma, wenn $\sigma = 0.52$ mm beträgt?

b) Wie groß ist σ, wenn die Firma durchschnittlich 24% der Stahlstifte ablehnt?

Lösung. a) Der Radius X der Stahlstifte ist $N(2, 0.52)$-verteilt. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit $P(|X - 2| \leq 0.5) = P(1.5 \leq X \leq 2.5)$. Die Zufallsgröße $Y = \frac{X-2}{0.52}$ ist aber $N(0, 1)$-verteilt. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} P(1.5 \leq X \leq 2.5) &= P(-\frac{0.5}{0.52} \leq Y \leq \frac{0.5}{0.52}) \\ &= \Phi(50/52) - \Phi(-50/52) \\ &= 2\Phi(50/52) - 1 = 0.663 \end{aligned}$$

Zu b) Nun muss $Y = \frac{X-2}{\sigma}$ gewählt werden. Es folgt

$$\begin{aligned} P(1.5 \leq X \leq 2.5) &= P(-\frac{0.5}{\sigma} \leq Y \leq \frac{0.5}{\sigma}) \\ &= 2\Phi(\frac{0.5}{\sigma}) - 1 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$2\Phi(\frac{0.5}{\sigma}) - 1 = 0.76 \ ,$$

also

$$\Phi(\frac{0.5}{\sigma}) = 0.88$$

Da $\Phi(1.178) = 0.8806$, folgt $\frac{0.5}{\sigma} = 1.178$ und damit

$$\sigma = \frac{0.5}{1.178} = 0.42$$