Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **25.2.2013**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{n}{5(2n+5)}$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|2x+3| < |x-1|$ erfüllen.

Lösung. a) Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich $\frac{1}{35}$. Angenommen, die Formel gelte für n.

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} + \frac{1}{(2n+5)(2n+7)} \\
&= \frac{n}{5(2n+5)} + \frac{1}{(2n+5)(2n+7)} \\
&= \frac{1}{2n+5}\left(\frac{n}{5} + \frac{1}{2n+7}\right) \\
&= \frac{1}{5(2n+5)} \frac{2n^2+7n+5}{(2n+7)}
\end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass dies $= \frac{n+1}{5(2n+7)}$ ist. Dazu beachten wir, dass $2n^2 + 7n + 5 = (n+1)(2n+5)$ und kürzen in $\frac{2n^2+7n+5}{(2n+7)}$ durch $2n+5$.

b) Die Ungleichung ist zu jeder der folgenden Ungleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned}
(2x+3)^2 &< (x-1)^2 \\
4x^2 + 12x + 9 &< x^2 - 2x + 1 \\
3x^2 + 14x &< -8 \\
x^2 + \tfrac{14}{3}x &< -\tfrac{8}{3} \\
(x + \tfrac{7}{3})^2 &< (\tfrac{5}{3})^2 \\
|x + \tfrac{7}{3}| &< \tfrac{5}{3}
\end{aligned}$$

Das bedeutet $M = (-4, -2/3)$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck, dessen Ecken A, B und C durch die Ortsvektoren $\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ gegeben sind.

a) Welchen Abstand hat $\vec{C}$ von der Seite durch A und B? (8 Punkte)

b) Es bedeute $\vec{M}_1$ den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Weiter teile $\vec{M}_2$ die Seite $\overline{BC}$ von B aus im Verhältnis 2:1, und der Punkt $\vec{M}_3$ die Seite $\overline{CA}$ von C aus im Verhältnis $3:2$. Berechnen Sie $\vec{M}_1, \vec{M}_2$ und $\vec{M}_3$. (8 Punkte)

c) Welchen Flächeninhalt hat das von $\vec{M}_1, \vec{M}_2$ und $\vec{M}_3$ gebildete Dreieck? (4 Punkte)

Lösung. a) Der gesuchte Abstand ist

$$d = \frac{|\det(\vec{C}-\vec{A},\, \vec{B}-\vec{A})|}{\|\vec{B}-\vec{A}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \det \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

b) Wir berechnen die Punkte $\vec{M}_1, \vec{M}_2$ und $\vec{M}_3$, nämlich

$$\vec{M}_1 = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{M}_2 = \vec{B} + \frac{2}{3}(\vec{C}-\vec{B}) = \frac{\vec{B}+2\vec{C}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ 19 \end{pmatrix},$$

$$\vec{M}_3 = \vec{C} + \frac{3}{5}(\vec{A}-\vec{C}) = \frac{3\vec{A}+2\vec{C}}{5} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 14 \\ 22 \end{pmatrix}$$

c) Die gesuchte Dreicksfläche ist

$$F = \frac{1}{2}\left| \det(\vec{M}_2 - \vec{M}_1\ ,\ \vec{M}_3 - \vec{M}_1) \right| = \frac{1}{2}\left| \det \begin{pmatrix} -7/3 & -11/5 \\ 23/6 & 19/10 \end{pmatrix} \right| = \frac{-133+253}{60} = 2$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ -4 & -2 & -5 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}$.

a) Für welches t ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ nicht-leer? (Zur Orientierung $t = -2$)

b) Berechnen Sie für dieses t Zahlen $u, v \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Berechnen Sie für dieses t den Lösungsraum $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ (10+5+5 Pkte)

Lösung. a) In der erweiterten Matrix $(\mathcal{A}\,|\,\vec{b}\,)$ addieren wir zur 2. Zeile des 2-fache der 1. Zeile und von der 3. Zeile subtrahieren wir 3 $\times$ die 1. Zeile. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 5 & -14 \\ -4 & -2 & -5 & -4 & 4 \\ 6 & 3 & 7 & 5 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -24 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & 42+t \end{array}\right)$$

Zur 3. Zeile addieren wir das $\frac{5}{3}$-fache der 2. Zeile und finden

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42+t-24\cdot\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

Somit ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ genau dann nicht-leer, wenn $42 + t - \frac{24\cdot 5}{3} = t + 2 = 0$, also wenn $t = -2$ gewählt wird.

b) Die gesuchten u, v müssen

$$2u + 5v = -14, \quad 6v = -24$$

lösen, also ist $u = 3, v = -4$.

c) Wir müssen nur noch $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ berechnen. Genau dann ist $\vec{x} \in \mathcal{N}_\mathcal{A}$, wenn

$$2x_1 + 4x_3 = -x_2 - 5x_4, \; 3x_3 = -6x_4$$

Das führt auf

$$x_3 = -2x_4, \quad x_1 = \frac{1}{2}(-x_2 - 5x_4 + 8x_4) = \frac{1}{2}(-x_2 + 3x_4)$$

Damit ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

und damit

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Gegeben sei die Folge

$$x_n = \frac{3n^3 + 5n + 5}{n^2 + 3} - \frac{6n^2 + 14}{2n + 5}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_n mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3\sin(3x - \frac{\pi}{4})$. Klären Sie folgende Fragen:

(i) Welche Periode hat f?

(ii) Welche Nullstellen hat f innerhalb einer Periode?

(iii) Wo hat f innerhalb einer Periode seinen größten, wo seinen kleinsten Wert?

(iv) Skizzieren Sie den Graphen von f über einer Periode. (10+1+2+3+4 Pkte)

Lösung. a)

$$\frac{3n^3 + 5n + 5}{n^2 + 3} = 3n - \frac{4n - 5}{n^2 + 3}$$

Weiter ist

$$\frac{6n^2 + 14}{2n + 5} = 3n - \frac{15n - 14}{2n + 5}$$

Also wird

$$x_n = \frac{15n - 14}{2n + 5} - \frac{4n - 5}{n^2 + 3} \longrightarrow \frac{15}{2}$$

mit $n \to \infty$.

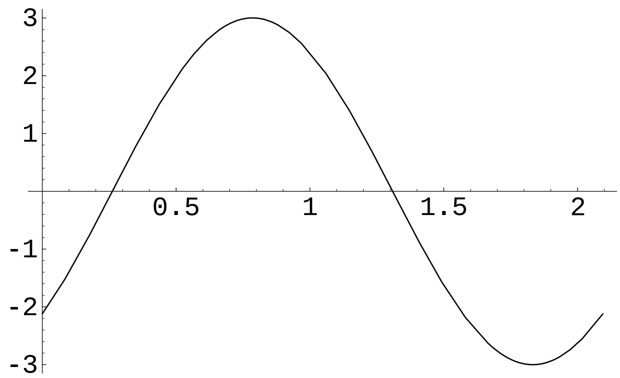
b) Zu (i) f hat die Periode $\frac{2\pi}{3}$.

Zu (ii) $f(x) = 0$ genau dort, wo $3x - \pi/4 \in \{0, \pi\}$, also bei $x = \frac{\pi}{12}$ und bei $x = \frac{5\pi}{12}$.

Zu (iii) Dort hat f seinen größten Wert, wo $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 1$, also $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ und damit $x = \frac{\pi}{4}$. Der größte Wert von f ist dann $f(\pi/4) = 3$.

Seinen kleinsten Wert nimmt f dort an, wo $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = -1$, also $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, d.h. bei $x = \frac{7\pi}{12}$, also $f(7\pi/12) = -3$.

Zu (iv) Graph (f):



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot e^{-4x}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? (4 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (3 Pkte)

d) Berechnen Sie die Sekante zum Graphen von f durch die Punkte $(2,\ f(2))$ und $(3,\ f(3))$. (6 Pkte)

e) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 1$.

(4 Pkte)

Lösung. a) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$.

b) Es gilt

$$f'(x) = \frac{-4(1+2x)e^{-4x} - 2e^{-4x}}{(1+2x)^2} = -\frac{(6+8x)e^{-4x}}{(1+2x)^2}$$

c) Es gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -3/4$. Links von $-3/4$ ist $f'(x) > 0$ und rechts davon ist $f'(x) < 0$, also liegt ein lokales Maximum vor. Weitere lokale Extrema sind nicht vorhanden.

d) Wir haben: $f(3) = \frac{1}{7}e^{-12}, f(2) = \frac{1}{5}e^{-8}$, also hat die gesuchte Sekante die Steigung $\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{1}{7}e^{-12} - \frac{1}{5}e^{-8}$. Die Gleichung der Sekante ist dann

$$S(x) := f(2) + \frac{f(3)-f(2)}{3-2}(x-2) = \frac{1}{5}e^{-8} + (\frac{1}{7}e^{-12} - \frac{1}{5}e^{-8})(x-2)$$

e) Es gilt

$$\begin{aligned} T_1 f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) \\ &= \frac{1}{3}e^{-4} - \frac{14}{9}e^{-4}(x-1) \end{aligned}$$