**Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann** **20.3.2012**
**Bergische Universität Wuppertal**

## Modul: Mathematik für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

**Aufgabe 1** (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass folgendes für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{n}{5(3n+5)}$$

(10 Pkte)

b) Berechnen Sie die Menge $M$ aller Zahlen $x$, die die Ungleichung

$$|x^2 + x - 2| < \frac{7}{4}$$

erfüllen.

(10 Pkte)

*Lösung.* I.A.: $n = 1$. Beide Seiten haben den Wert $\frac{1}{40}$.

I.S. $n \longmapsto n+1$: Wir müssen zeigen, dass $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{n+1}{5(3n+8)}$ gilt. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} + \frac{1}{(3n+5)(3n+8)} \\
&= \frac{n}{5(3n+5)} + \frac{1}{(3n+5)(3n+8)} \\
&= \frac{1}{5(3n+5)}(n + \frac{5}{3n+8}) \\
&= \frac{1}{5(3n+5)} \frac{3n^2+8n+5}{3n+8} \\
&= \frac{n+1}{5(3n+8)}
\end{aligned}$$

denn $3n^2 + 8n + 5 = (n+1)(3n+5)$.

Zu b) Folgende Zeilen sind äquivalent

(1) $x \in M$

(2) $-\frac{7}{4} < (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 < \frac{7}{4}$

(3) $\frac{1}{2} < (x + \frac{1}{2})^2 < 4$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}} < |x + \frac{1}{2}| < 2$

(5) $x \in \Big( (\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \infty) \cup (-\infty, -\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \Big) \cap (-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) = (-\frac{5}{2}, -\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2})$

**Aufgabe 2** (20 Punkte)

a) Gegeben seien die Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{D} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Gibt es eine Ebene $E$, die alle 4 Punkte enthält? Wenn ja, geben Sie diese Ebene an.

b) Die Gerade $G$ gehe durch die beiden Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$. Welchen Abstand $d$ hat dann der Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ von $G$? (10 +10 Pkte)

*Lösung.* a) Wir bestimmen die Ebene $E$ durch $\vec{A}, \vec{B}$ und $\vec{C}$. Es gilt

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Frage ist nun: Liegt $\vec{D} \in E$? Dazu suchen wir nach Parametern $t, s$, so dass

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \vec{D} - \vec{A} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dazu muss $t = 2$ sein und $10 + s = -2$, also $s = -12$. Dann stimmt die Vektorgleichung in den Komponenten 2 und 3. Auch in Komponente 1 gilt sie, denn $2t + s = 4 - 12 = -8$. Somit liegt $\vec{D}$ in $E$.

b) Es gilt

$$G = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Abstand ist nun

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left\| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\|} \\ &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|}{9} = \frac{1}{3}\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{29}}{3} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3** (20 Punkte)
Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung, wobei

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 8 & -3 \\ -6 & 9 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}$$

(Zur Orientierung: $t = 2$)

b) Wieviele Elemente hat der Lösungsraum für dieses lineare Gleichungssystem ?

☐ Genau ein Element

☐ Endlich viele Elemente

☐ Unendlich viele Elemente

Kreuzen Sie eine Antwort an und begründen Sie sie. (15+5 Pkte)

*Lösung.* a) In der erweiterten Matrix $(\mathscr{A}\,|\,\vec{b}\,)$ wird die 1. Zeile mit der 2. Zeile vertauscht.Es entsteht

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 8 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 1 & 2 & 1 \\ -6 & 9 & 6 & -7 & t \end{array}\right)$$

Anschließend subtrahieren wir das 2-fache der Zeile 1 von Zeile 2 und addieren das 3-fache der Zeile 1 zu Zeile 3. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 8 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -15 & 8 & -7 \\ 0 & 6 & 30 & -16 & t+12 \end{array}\right)$$

Dann addieren wir das 2-fache der Zeile 2 zu Zeile 3 und finden die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 8 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -15 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2 \end{array}\right)$$

So finden wir den Wert $t = 2$.

b) Der Lösungsraum hat die Form $\mathscr{L} = \vec{x}_0 + \mathscr{N}_{\mathscr{A}}$, wobei $\mathscr{N}_{\mathscr{A}}$ der Nullraum von $\mathscr{A}$ ist. Er hat in unserem Fall die Dimension $4 - \mathrm{Rang}(\mathscr{A}) = 2$. Daher hat $\mathscr{L}$ unendlich viele Elemente.

**Aufgabe 4** (20 Punkte)
a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n := \frac{4n^3 + 8n + 1}{2(n+1)(n+2)} - 2n$$

Konvergiert die Folge $(x_n)_n$, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}\ln\left(2 + e^x\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie eine Menge $W \subset \mathbb{R}$, so dass $f : \mathbb{R} \longrightarrow W$ invertierbar ist und berechnen Sie ihre Umkehrfunktion.

(12+8 Pkte)

*Lösung.* a) Es gilt

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{4n^3+8n+1-4n(n+1)(n+2)}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{4n^3+8n+1-4n^3-12n^2-8n}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-12n^2+1}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Mit den Regeln aus der Vorlesung folgt $x_n \longrightarrow -6$.

b) Die Funktionen $t \longmapsto e^t + 2$ und $x \longmapsto \frac{1}{3}\ln x,\ x \geq 2$ wachsen monoton. Damit wächst auch $f$ als Hintereinanderschaltung dieser 2 Funktionen monoton, und $f : \mathbb{R} \longrightarrow W := (\frac{1}{3}\ln 2, \infty)$ ist invertierbar. Lösen wir die Gleichung $f(x) = y$ nach $x$ auf, so erhalten wir

$$f^{-1}(y) = \ln\left(e^{3y} - 2\right)$$

**Aufgabe 5** (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x+2}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von $f$? (6 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für $f$ gibt es und wo? (6 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an Graph $(f)$ im Punkt $(3|f(3))$. (5 Pkte)

*Lösung.* Mit der Quotientenregel finden wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x^2+x+2)-(3x+1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} \\ &= \frac{3x^2+3x+6-6x^2-5x-1}{(x^2+x+2)^2} = \frac{-3x^2-2x+5}{(x^2+x+2)^2} \end{aligned}$$

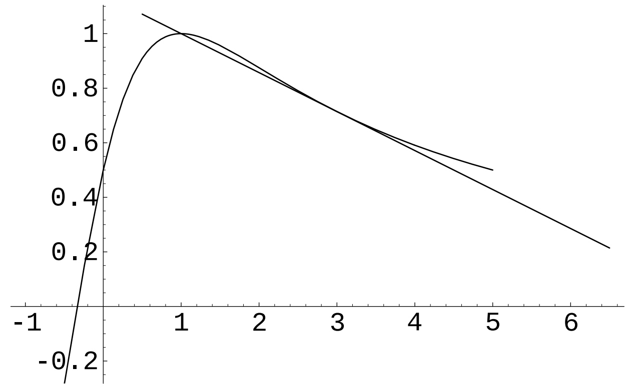
b) Wir formen um:

$$-3x^2 - 2x + 5 = -(x-1)(3x+5)$$

Auf $(-\infty, -\frac{5}{3})$ gilt $f' < 0$ und auf $(-\frac{5}{3},\, 1)$ ist $f' > 0$. Auf $(1,\, \infty)$ haben wir $f' < 0$. Daraus folgt, dass $f$ bei $-\frac{5}{3}$ ein lokales Minimum und bei 1 ein lokales Maximum annimmt.

c) Die Gleichung der gesuchten Tangenten lautet $y = f(3) + f'(3)(x-3)$. Nun ist $f(3) = \frac{5}{7}$ und $f'(3) = -\frac{28}{14^2} = -\frac{1}{7}$. Also lautet die gesuchte Tangentengleichung

$$y = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}(x-3) = \frac{-x+8}{7}$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-1
1
2
3
4
5
6