Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Pawlaschyk

Wuppertal, 04.09.2018

Mathematik für Sicherheitsingenieure I B

Aufgabe 1. *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ☒. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

(2) W ☐ F ☐ Zwei Stammfunktionen einer Funktion f unterscheiden sich nur um eine Konstante.

(3) W ☐ F ☐ $\ln|x| + \ln(2)$ ist eine Stammfunktion zu $\dfrac{1}{x}$.

(4) W ☐ F ☐ Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist $f(t) = \displaystyle\int_0^t f'(x)\, dx$ für $t \in [0,1]$.

(5) W ☐ F ☐ Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}\, dx$ durch partielle Integration.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))}$ durch die Substitution $t = \ln(x)$.

Lösung:

a) Lösungen:

(1)	W	☒	F	☐
(2)	W	☒	F	☐
(3)	W	☒	F	☐
(4)	W	☐	F	☒
(5)	W	☐	F	☒

(1) ist WAHR, siehe Satz in der Vorlesung.

(2) ist WAHR, denn sind $F' = G' = f$, so ist $(F-G)' = 0$ und damit $F - G = c$, wobei c eine Konstante ist. Daher ist $F = G + c$.

(3) ist WAHR, da $(\ln|x| + \ln(2))' = 1/x$.

(4) ist FALSCH, z.B. für $f(t) = 1$.

(5) ist FALSCH, z.B. $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \infty$.

b) Mit partieller Integration folgt:

$$\int_R^0 xe^{2x}\ dx = \big[x\frac{e^{2x}}{2}\big]_R^0 - \int_R^0 \frac{e^{2x}}{2}\ dx = -\frac{R}{2}e^{2R} - \big[\frac{1}{4}e^{2x}\big]_R^0$$
$$= -\frac{R}{2}e^{2R} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2R}$$

Für $R \to -\infty$ gehen der erste und der dritte Term gegen 0, so dass

$$\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\ dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^0 xe^{2x}\ dx = -\frac{1}{4}.$$

c) Wir wählen $t = \ln(x)$. Dann ist die untere Grenze $t = \ln(1) = 0$, die obere Grenze $t = \ln(e) = 1$ und $dt = \frac{1}{x}\ dx$. Ins Integral eingesetzt ist das

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \int_1^e \frac{1}{1+\ln(x)}\cdot\frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = \big[\ln(1+t)\big]_0^1 = \ln 2$$

Aufgabe 2. *(6+6+8 Punkte)*

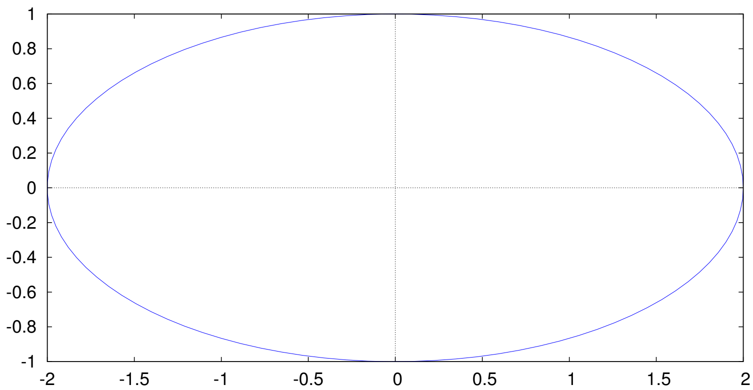
a) Zeichnen Sie die Spur von $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 9\pi]$. Wie oft umläuft α den Ursprung? Deuten Sie die Umlaufrichtung mit einem Pfeil an.

b) Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\beta(t) = t^2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ eine Kurve in Polarkoordinaten.
Wo ist β regulär?

c) Berechnen Sie die Fläche der von $\gamma(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ umschlossenen Fläche, wobei $r(t) = 2\pi t - t^2$ und $t \in [0, 2\pi]$.

Lösung:

a)



Für $t \in [0, 2\pi]$ wird der Ursprung einmal umlaufen. Für $t \in [0, 9\pi]$ wird er demzufolge $4,5$-mal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

b) Da $\beta(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ in Polarkoordinaten ist, wobei $r(t) = t^2$, ist sie genau dann nicht regulär, wenn $r(t) = r'(t) = 0$ sind. Da $r(t) = t^2$ und $r'(t) = 2t$, ist das nur für $t = 0$ möglich. Überall sonst ist β regulär.

c) Da γ in Polarkoordinaten mit Radiusfunktion $r(t) = 2\pi t - t^2$ vorliegt, berechnet sich die Fläche durch das Integral

$$F_\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(t)^2 \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2)^2 \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4\pi^2 t^2 - 4\pi t^3 + t^4) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3}\pi^2 t^3 - \pi t^4 + \frac{t^5}{5} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \left[\frac{32}{3}\pi^5 - 16\pi^5 + \frac{32}{5}\pi^5 \right] = \frac{8}{15}\pi^5$$

Aufgabe 3. *(5+5+10 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ⊠. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Jede partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist total differenzierbar.

(2) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x, y, z) = xy^2 + |xyz| + y^3$ ist total differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$.

(3) W ☐ F ☐ Der Gradient einer total differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ steht senkrecht auf den Niveaulinien von f.

(4) W ☐ F ☐ Hat f ein lokales Minimum in x_0, so verschwindet dort der Gradient.

(5) W ☐ F ☐ Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar, so sind die Komponenten der Jacobi-Matrix genau die partiellen Ableitungen von f.

b) Berechnen Sie den Gradienten von $f(x, y) = ye^{-2x+y}$.

c) Seien $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y - xy^2 \\ xy - y^2 \end{pmatrix}$ und $g(s, t) = \begin{pmatrix} 2s - 1 \\ t^2 - st \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $(g \circ f)(1, 0)$.

Lösung:

a) Lösungen:

(1)	W	☐	F	⊠
(2)	W	☐	F	⊠
(3)	W	⊠	F	☐
(4)	W	⊠	F	☐
(5)	W	⊠	F	☐

(1) ist FALSCH, siehe Beispiel in der Vorlesung.

(2) ist FALSCH, da der Betrag nicht differenzierbar im Ursprung ist.

(3) ist WAHR. Siehe Erläuterungen in der Vorlesung.

(4) ist WAHR, weil es in solch einem Punkt keine Richtung des steilsten Anstiegs mehr gibt, in die der Gradienten zeigen könnte.

(5) ist WAHR, denn in diesem Fall stimmt die Jacobi-Matrix mit dem Gradienten überein, deren Komponenten die partiellen Ableitungen von f sind.

b) Der Gradient von $f(x,y) = ye^{-2x+y}$ lautet:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2ye^{-2x+y} \\ (1+y)e^{-2x+y} \end{pmatrix}$$

c) Für $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y - xy^2 \\ xy - y^2 \end{pmatrix}$ und $g(s,t) = \begin{pmatrix} 2s-1 \\ t^2 - st \end{pmatrix}$ gilt nach der Kettenregel:

$$\mathrm{Jac}(g \circ f)(1,0) = \mathrm{Jac}(g)(f(1,0)) \cdot \mathrm{Jac}(f)(1,0)$$

Es sind $f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, sowie

$$\mathrm{Jac}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 & x^2 - 2xy \\ y & x - 2y \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Jac}(g)(s,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -t & 2t - s \end{pmatrix}$$

Wir setzen die entsprechenden Punkte ein und erhalten:

$$\mathrm{Jac}(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Jac}(g)(f(1,0)) = \mathrm{Jac}(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher ist

$$\mathrm{Jac}(g \circ f)(1,0) = \mathrm{Jac}(g)(f(1,0)) \cdot \mathrm{Jac}(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. *(3+7+10 Punkte)*

Sei $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4,\ (x-1)^2 \le y \le 2x+1\}$.

a) Skizzieren Sie die Fläche G.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von G, d.h. berechnen Sie das Integral

$$\int_G 1\ dG(x,y) \quad = \quad \int_0^4 \int_{(x-1)^2}^{2x+1} dy\ dx = \ldots$$

c) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_D \sin(\pi x y)\ dD(x,y)$ über dem Gebiet

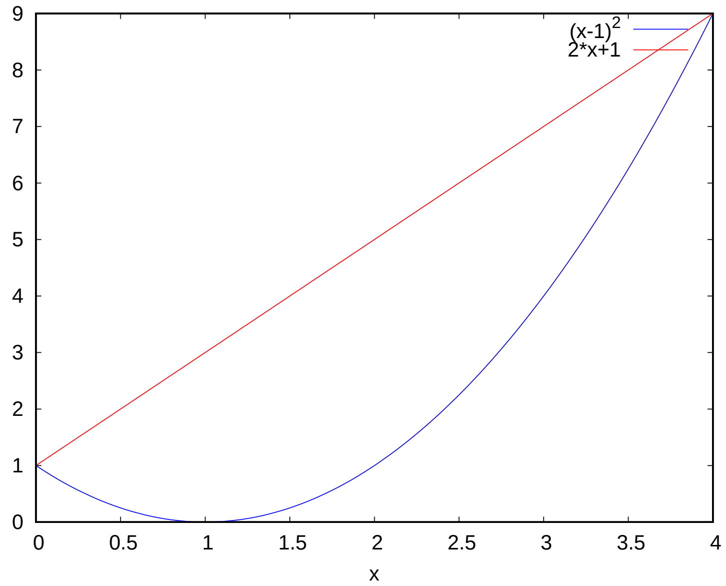
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1/y,\ 1 \le y \le 2\},$$

also

$$\int_1^2 \int_0^{1/y} \sin(\pi x y)\ dx\ dy \quad = \quad \ldots$$

Lösung:

a) Die gesuchte Fläche liegt zwischen beiden Graphen:



b) Die gesuchte Fläche berechnet sich wie folgt:

$$A(G) = \int_0^4 \int_{(x-1)^2}^{2x+1} dy\ dx$$

$$= \int_0^4 \left[2x + 1 - (x-1)^2\right]\ dx$$

$$= \int_0^4 \left[2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)\right]\ dx$$

$$= \int_0^4 \left[2x + 1 - x^2 + 2x - 1\right] \; dx$$

$$= \int_0^4 \left[4x - x^2\right] \; dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{4}$$

$$= 32 - \frac{64}{3} - 0 = \frac{32}{3}$$

c) Das gesuchte Integral ist

$$\int_1^2 \int_0^{1/y} \sin(\pi xy) \; dx \; dy$$

$$= \int_1^2 \big[-\frac{1}{y\pi} \cos(\pi xy)\big]_{x=0}^{1/y} \; dy$$

$$= \int_1^2 \big[-\frac{1}{y\pi} \cos(\pi \cdot \frac{1}{y} \cdot y) + \frac{1}{y\pi} \cos(\pi \cdot 0 \cdot y)\big] \; dy$$

$$= \int_1^2 \big[-\frac{1}{y\pi} \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \frac{1}{y\pi} \underbrace{\cos(0)}_{=1}\big] \; dy$$

$$= \int_1^2 \frac{2}{y\pi} \; dy = \frac{2}{\pi}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{2}{\pi} \ln 2$$

Aufgabe 5. *(5+8+7 Punkte)*

a) Bringen Sie die beiden komplexen Zahlen auf die Gestalt $x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z_1 = \frac{2+3i}{2-3i}, \qquad z_2 = -2e^{-3i\pi}$$

b) Geben Sie den Lösungsraum der nachstehenden homogenen DGL an:

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$$

Hinweis: Hier ist 1 doppelte Nullstelle.

c) Lösen Sie die inhomogene DGL

$$y' + 3y = 6t$$

Lösung:

a) Mit Hilfe der Erweiterung des Bruchs mit der komplex Konjugierten des Nenners erhalten wir:

$$z_1 = \frac{2+3i}{2-3i} = \frac{(2+3i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{4+12i-9}{4+9} = \frac{-5+12i}{13} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$$

Mit Hilfe der Polarkoordinaten gilt:

$$z_2 = -2e^{-3i\pi} = -2(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)) = -2\cos(3\pi) + 2i\sin(3\pi) = 2 + i0 = 2$$

b) Da 1 eine doppelte Nullstelle ist, können wir das charakteristische Polynom der DGL zunächst mit Hilfe der Polynomdivision in die Form $P(X) = (X-1)^2(X^2+1)$ überführen. Zur Kontrolle: $P(X) : (X-1) = X^3 - X^2 + X - 1$.

Da $\pm i$ die Nullstellen von $X^2 + 1$ sind, ist der Lösungsraum

$$\{u(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{it} + c_4e^{-it} \mid c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C}\}.$$

c) Das charakteristische Polynom ist $P(X) = X + 3$. Die Basislösung ist daher gegeben durch

$$u_h(t) = ce^{-3t}$$

mit $c \in \mathbb{C}$. Wir suchen eine partikuläre Lösung und wählen den Ansatz $u_p(t) = at+b$. Es ist $u_p'(t) = a$. Das setzen wir in die DGL ein und erhalten die Gleichung

$$6t = a + 3(at+b) = a + 3at + 3b = 3at + a + 3b$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $a = 2$ und $a+3b = 0$. Daraus folgt dann $3b = -2$. Eine partikuläre Lösung ist somit gegeben durch $u_p(t) = 2t - \frac{2}{3}$. Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(t) = ce^{-3t} + 2t - \frac{2}{3}$$

Aufgabe 6. *(6+6+8 Punkte)*

Wir betrachten ein Spiel, in dem eine faire Münze fünfmal hintereinander geworfen wird. Die beiden Seiten der Münze sind "Kopf" ($\cong 0$) und Zahl ($\cong 1$).

a) Beschreiben Sie den Ergebnisraum als Menge. Wieviele Elementarereignisse gibt es? Was ist der Ereignisraum und wie sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung aus? Wieviele Elemente enthält der Ereignisraum? (*Zur Beantwortung der letzten Frage reicht es, eine Potenz anzugeben.*)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A *Es fällt nie Kopf.*

B *Es fällt genau zwei Mal Kopf.*

C *Im dritten Wurf fällt Zahl.*

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $B \cap C$ und $B \cup C$. Sind die Ereignisse B und C stochastisch abhängig oder unabhängig? Beweisen Sie Ihre Behauptung. Geben Sie ein Ereignis D an, das von C stochastisch unabhängig ist und beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Der Ergebnisraum ist

$$\begin{aligned}\Omega &= \{0,1\}^5 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \\ &= \big\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_j \in \{0,1\} \; \forall j = 1, ...5\big\}\end{aligned}$$

und enthält $2^5 = 32$ Elemente, also Elementarereignisse. Der Ereignisraum ist die Potenzmenge

$$\mathcal{P}(\Omega) = \big\{M \mid M \subset \Omega\big\},$$

bestehend aus den 2^{32} möglichen Teilmengen von Ω. Da jedes Elementarereignis mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{32}$ gleich wahrscheinlich ist, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben durch

$$P(M) = \frac{\#M}{32}$$

für alle $M \subset \Omega$.

b) Da hier eine Binomialverteilung mit $p = 1/2$ vorliegt, ist:

$$\begin{aligned}P(A) &= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{32} \\ P(B) &= \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}\end{aligned}$$

Für das Ereignis C wird einfach nur der dritte Wurf isoliert betrachtet. Damit ist

$$P(C) = \frac{1}{2}.$$

c) Wir bestimmen die Anzahl der Elementarereignisse in $B \cap C$. Wegen $P(C) = 1/2$ kommen 16 Elementarereignisse in Frage, wovon

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

auch in B liegen. Es ist also:

$$P(B \cap C) = \frac{\#B \cap C}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16},$$

womit wir auch berechnen:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{10}{32} + \frac{16}{32} - \frac{6}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}.$$

Die Ereignisse B und C sind stochastisch abhängig, denn wegen

$$P(B) \cdot P(C) = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{32}$$

ist

$$P(B) \cdot P(C) \neq P(B \cap C) = \frac{6}{32}.$$

Ein Beispiel für ein von C unabhängiges Ereignis wäre etwa das Ereignis D, "im ersten Wurf fällt Zahl", denn dafür ist

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{1}{2}, \\ P(D) &= \frac{1}{2}, \\ P(C) \cdot P(D) &= \frac{1}{4}, \\ P(C \cap D) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. *(7+5+6+2 Punkte)*

Ein *Wüstentag* ist nach meteorologischer Definition ein Tag, an dem die gemessene Maximaltemperatur mindestens $35°C$ beträgt. Für die Stadt Wstadt sei die Anzahl der Wüstentage pro Jahr Poisson-verteilt mit durchschnittlich 2 Wüstentagen pro Jahr. Die Maximaltemperatur in Wstadt an Augusttagen sei normalverteilt mit Mittelwert $25°C$ und Streuung $5°C$.

a) Bestimmen Sie den Parameter λ der beschriebenen Poisson-Verteilung. Geben Sie eine grobe Schätzung für die Wahrscheinlichkeit, dass es in einem Jahr in Wstadt <u>mehr</u> als 3 Wüstentage gibt (*rechnen Sie dazu mit* $e \approx 3$). Wieso ist es sinnvoll, für die Anzahl der Wüstentage eine Poisson-Verteilung anzunehmen?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem beliebig ausgewählten Augusttag in Wstadt um einen Wüstentag handelt?

c) Die Zufallsvariable X beschreibe die Maximaltemperatur in Wstadt an einem Augusttag. X ist also normalverteilt mit Mittelwert $25°C$ und Streuung $5°C$. Die durchschnittliche Maximaltemperatur an 4 beliebig ausgewählten Augusttagen ist also beschrieben durch die neue Zufallsvariable

$$Y \quad = \quad \frac{1}{4}\big(X + X + X + X\big)$$

Bestimmen Sie die Normalverteilung von Y. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche Maximaltemperatur für 4 beliebige Tage über $30°C$ liegt?

d) Stimmt die Rechnung aus Teil c) auch für 4 aufeinanderfolgende Tage im August? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

a) Die Anzahl der Wüstentage ist Poisson-verteilt mit $\lambda = 2$. Die Wahrscheinlichkeit, dass es bis zu 3 Wüstentage gibt, ist also:

$$\begin{aligned}
P(k \leq 3) &= P(k=0) + P(k=1) + P(k=2) + P(k=3) \\
&= \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} \\
&= e^{-2}\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right) = e^{-2} \cdot \frac{38}{6} \approx \frac{1}{9} \cdot \frac{38}{6} = \frac{19}{27}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$P(k > 3) \quad = \quad 1 - P(k \leq 3) \approx 1 - \frac{19}{27} = \frac{8}{27} \approx 0,3$$

Sie liegt also bei ca. 30%. Es ist sinnvoll, von einer Poisson-Verteilung auszugehen, da Wüstentage eher seltene Ereignisse sind.

b) Die Zufallsvariable

$$Z := \frac{X - 25}{5}$$

ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Streuung 1 (also standardnormalverteilt). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$\begin{aligned} P(X \geq 35) &= P(X - 25 \geq 10) = P\left(\frac{X-25}{5} \geq 2\right) \\ &= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0,977 = 0,023 \end{aligned}$$

Sie liegt also etwa bei $2,3\%$. Dabei haben wir den Wert für $\Phi(2)$ in einer Tabelle für die Standardnormalverteilung abgelesen.

c) Wir können hier davon ausgehen, dass die Maximaltemperaturen der einzelnen Tage stochastisch unabhängig sind. Nach den Rechenregeln ist

$$Y^* \quad := \quad X + X + X + X$$

normalverteilt mit Erwartungswert

$$E(Y^*) = 4 \cdot E(X) = 4 \cdot 25 = 100$$

und Streuung

$$\sigma(Y^*) = \sqrt{4 \cdot \sigma(X)^2} = \sqrt{4 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 = 10.$$

Damit ist Y normalverteilt mit Erwartungswert $E(Y) = E(Y^*)/4 = 25$ und Streuung

$$\sigma(Y) = \sigma(Y^*)/4 = 10/4 = 5/2.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(Y > 30) &= P(Y - 25 > 5) = P\left(\frac{Y-25}{5/2} > 2\right) \\ &= 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0,977 = 0,023 \end{aligned}$$

Sie liegt also etwa bei $2,3\%$.

d) Für aufeinanderfolgende Tage stimmt die Rechnung nicht, da die Temperaturen solcher Tage nicht stochastisch unabhängig sind.