Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Pawlaschyk

Wuppertal, 13.08.2018

# Mathematik für Sicherheitsingenieure I A

**Aufgabe 1.** *(5+5+5+5 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ☒. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$.

(2) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad |-x| = 3$.

(3) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|x-3| \leq |x| + 3$

(4) W ☐ F ☐ Für drei Mengen $A, B, C$ gilt:

$$x \in A \cap (B \cup C) \;\Leftrightarrow\; x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(5) W ☐ F ☐ Es gilt: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$

b) Zeigen Sie durch Induktion: $2^n > n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

c) Stellen Sie die folgenden Mengen mit Hilfe von Intervallen dar und zeichnen Sie sie jeweils in eine reellen Achse im Bereich $-4 \leq x \leq 4$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 1\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}.$$

d) Seien $A$, $B$, $C$ Teilmengen einer Menge $M$. Vereinfachen Sie:

$$((A \cup B)^c \cap C^c)^c$$

**Lösung:**

a) Lösung:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | W | ☐ | F | ☒ |
| (2) | W | ☒ | F | ☐ |
| (3) | W | ☒ | F | ☐ |
| (4) | W | ☐ | F | ☒ |
| (5) | W | ☒ | F | ☐ |

(1) ist FALSCH, denn $x^2 = 1$ impliziert $x = 1$ oder $x = -1$.

(2) ist WAHR, denn $x^2 = 9$ ist äquivalent zu $|x| = 3$. Ferner ist $|-x| = |x|$.

(3) ist WAHR, denn die Dreiecksungleichung besagt: $|x-y| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$

(4) ist FALSCH. Denn ist z.B. $A = \emptyset$, so steht links die leere Menge und rechts $B \cap C$.

(5) ist WAHR, denn die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, und aus $A \subset B$ folgt immer $A \cap B = A$.

b) **Induktionsanfang** $(n = 2)$: $4 = 2^2 > 2 + 1 = 3$

**Induktionsschritt** $n \mapsto n + 1$: Nach Voraussetzung ist $2^n > n + 1$, wobei $n \geq 2$ ist. Wir müssen zeigen, dass auch $2^{n+1} > (n + 1) + 1$ gilt. Wir berechnen:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{I.V.}}{>} (n + 1)2 = 2n + 2 = n + n + 2 > n + 2 = (n + 1) + 1$$

c) Es ist $A = [2 - 1, 2 + 1] = [1, 3]$ und $B = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

d)

$$\begin{aligned} &((A \cup B)^c \cap C^c)^c \\ &= ((A^c \cap B^c) \cap C^c)^c \\ &= ((A^c \cap B^c)^c \cup (C^c)^c) \\ &= (A^c)^c \cup (B^c)^c \cup C \\ &= A \cup B \cup C \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ☒. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{\pi}{2}$ genau dann, wenn sie senkrecht aufeinander sind.

(2) W ☐ F ☐ Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\det(\vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind.

(3) W ☐ F ☐ Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, so ist ihr linearer Spann $\mathrm{Lin}(\vec{x}, \vec{y})$ genau der gesamte Raum $\mathbb{R}^2$.

(4) W ☐ F ☐ Die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |x_1| = 1\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

(5) W ☐ F ☐ Der Durchschnitt zweier 2-dimensionaler Unterräume im $\mathbb{R}^4$ hat die Dimension 0, 1 oder 2.

b) Geben Sie einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ an, der auf $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht steht und zu $\vec{w}$ den Abstand $\|\vec{v} - \vec{w}\| = 3$ hat.

c) Sei die Ebene $E$ in der Paramterform

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Stellen Sie $E \subset \mathbb{R}^3$ in der Form $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = c\}$ dar.

**Lösung:**

a) Lösungen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | W | ☐ | F | ☒ |
| (2) | W | ☒ | F | ☐ |
| (3) | W | ☒ | F | ☐ |
| (4) | W | ☐ | F | ☒ |
| (5) | W | ☒ | F | ☐ |

(1) ist FALSCH, denn sie sind genau dann senkrecht, wenn $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

(2) ist WAHR. Siehe Satz in der Vorlesung.

(3) ist WAHR. Ihr linearer Spann hat in diesem Fall die Dimension 2. Ein 2-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2$ kann nur der $\mathbb{R}^2$ sein.

(4) ist FALSCH, denn der Nullvektor ist nicht enthalten.

(5) ist WAHR. Sie schneiden sich nur in einem Punkt, dem Nullpunkt (Dimension=0):

z.B. $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Oder sie schneiden sich in einer Geraden durch den Ursprung (Dimension=1):

z.B. $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

Oder sie sind gleich (Dimension=2).

b) Folgendes Gleichungssystem sind zu lösen:

$$\begin{aligned} a - b &= 0 \\ (a-1)^2 + (b+1)^2 + 1^2 &= 9 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert $a = b$, was wir in die zweite Gleichung einsetzen können:

$$9 = (a-1)^2 + (a+1)^2 + 1^2 = 2a^2 - 2a + 2a + 2 + 1 = 2a^2 + 3$$

Das liefert $a^2 = 3$. Somit ist der gesuchte Vektor z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ oder $\vec{v} = \begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$.

c) Der auf der Ebene senkrecht stehende Vektor berechnet sich durch das Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 - 6\cdot 3\\6\cdot 1 - 2\cdot 0\\0\cdot 3 - 1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\6\\-1\end{pmatrix}$$

Ferner ist $c = \langle \vec{n}, \vec{a}\rangle = \langle \begin{pmatrix}-16\\6\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\rangle = -32 + 0 + 2 = -30.$

Das ergibt die Normalenform

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \begin{pmatrix}-16\\6\\-1\end{pmatrix}, \vec{x}\rangle = -30\}.$$

**Aufgabe 3.** *(7+3+6+4 Punkte)*

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bringen Sie die Matrix $A$ auf Zeilenstufenform.

b) Geben Sie den Rang von $A$ an, sowie die Dimension des homogenen Lösungsraums

$$L_H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

c) Bestimmen Sie eine Basis von $L_H$.

d) Berechnen Sie $A\vec{x}$, wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

**Lösung:**

a) Multiplikation der 1. Zeile mit 5 und Addition zur 2. Zeile, und Multiplikaiton der 1. Zeile mit $(-4)$ und Addition zur 3. Zeile liefern:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}$$

Mupliplikation der 2.Zeile mit 5 und der 3. Zeile mit 4 und Addition der beiden Zeilen liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile können wir noch durch $(-4)$ dividieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Der Zeilenrang der Matrix ist gleich 2. Daher ist die Dimension von $L_H$ gleich $4 - 2 = 2$ nach der Dimensionsformel.

c) Die zweite Zeile der Zeilenstufenform liefert

$$x_2 = 2x_3 - 3x_4$$

Das setzen wir in die erste Zeile ein und lösen nach $x_1$ auf:

$$x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2(2x_3 - 3x_4) - 3x_3 + 4x_4 = x_3 - 2x_4$$

Das setzen wir in $\vec{x}$ und erhalten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 2x_4 \\ 2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also $L_H = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d)

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4.** *(5+3+5+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ☒. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Ist $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

(2) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(3) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x) = |x|^2$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

(4) W ☐ F ☐ Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ hat eine Nullstelle.

(5) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ ist ungerade.

b) Seien $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{1 + x^3} e^x$ und $a_n = \frac{1}{n}$. Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

c) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $f : (-1, +\infty) \to (-1, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

d) Sei $P(x) = x^3 - 7x - 6$. Zerlegen Sie $P$ in Linearfaktoren.

**Lösung:**

a) Lösungen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | W | ☐ | F | ☒ |
| (2) | W | ☒ | F | ☐ |
| (3) | W | ☒ | F | ☐ |
| (4) | W | ☒ | F | ☐ |
| (5) | W | ☒ | F | ☐ |

(1) ist FALSCH, z.B. für $q = 2$.

(2) ist WAHR, da die Betragsfunktion $h(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$, die Wurzelfunktion $g(y) = \sqrt{y}$ auf $[0, +\infty)$ sowie nach einem Satz aus der Vorlesung folglich auch deren Verknüpfung $(g \circ h)(x) = \sqrt{|x|} = f(x)$ auf $\mathbb{R}$ stetig sind.

(3) ist WAHR, da $f(x) = |x|^2 = x^2$ ein Polynom ist.

(4) ist WAHR. Als differenzierbare Funktion ist $f$ auch stetig. Der Rest folgt aus dem Zwischenwertsatz.

(5) ist WAHR, denn $f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$.

b) Da $f$ stetig ist in Null, $f(0) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

Alternativ:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}} e^{\frac{1}{n}} = \frac{0+0}{1+0} e^0 = 0$$

c) Wir lösen $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ nach $x$ auf und erhalten

$$x = \frac{1-y}{1+y}$$

Die Umkehrfunktion ist also $f^{-1} : I \to I$ mit $f^{-1}(y) = \dfrac{1-y}{1+y}$ und $I = (-1, +\infty)$.

d) Wir erraten die Nullstelle $x_1 = -1$. Polynomdivision liefert nun

$$P(x) : (x+1) \quad = \quad x^2 - x - 6.$$

Die pq-Formel liefert schließlich die weitere Nullstellen $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$. Die Linearfaktorzerlegung lautet:

$$P(x) = (x+1)(x-3)(x+2)$$

**Aufgabe 5.** *(8+6+6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$g(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3} \qquad h(x) = e^{\sin(x^2)}$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

c) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von $f(x) = xe^{-x}$. Untersuchen Sie $f$ auf lokale Extrempunkte, d.h. bestimmen Sie alle lokalen Extrema und begründen Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt. Zeichnen Sie den Graphen von $f$ über dem Intervall $[-1, 3]$, sodass auch Nullstellen und asymptoisches Verhalten von $f$ ersichtlich sind. Zur Orientierung: $e^{-1} = 1/e \approx 0,39$

**Lösung:**

a) Nach der Quotienten- und Kettenregel gilt:

$$g'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)x^3 - (\sin(x) - x)3x^2}{x^6} = \frac{x^3\cos(x) - x^3 - 3x^2\sin(x) + 3x^3}{x^6}$$
$$= \frac{x\cos(x) - 3\sin(x) + 2x}{x^4}$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$h'(x) = 2x\cos(x^2)e^{\sin(x^2)}$$

b) Wir wenden die Regel von l'Hospital 3x an.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6}$$

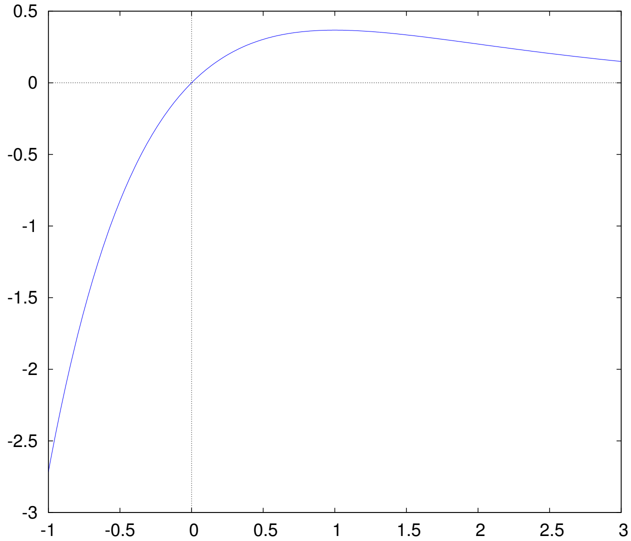
c) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - x)e^{-x} \\ f''(x) &= (-1 + x - 1)e^{-x} = (x - 2)e^{-x} \end{aligned}$$

Eine Extremstelle kann also nur bei $x_1 = 1$ sein. Wegen $f''(1) = -e^{-1} < 0$ besitzt $f$ im Punkt $(1, f(1)) = (1, e^{-1})$ ein lokales Maximum.

Eine Nullstelle liegt bei $x = 0$ vor. Es ist $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. (Eine Rechnung wird nicht verlangt, nur sollten diese Daten auch in der Skizze angedeutet werden.)

Der Graph sieht wie folgt aus:


0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3