Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 05.09.2017

Mathematik für Sicherheitsingenieure I B (BScS 2011)

Aufgabe 1. *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind.

(1) Ist F Stammfunktion einer Funktion f, so gilt $F' = f$.

(2) Ist F Stammfunktion von f, so ist F eindeutig bestimmt.

(3) Für eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist das Maximum aller Untersummen gleich dem Minimum aller Obersummen.

(4) Ein uneigentliches Integral einer positiven Funktion existiert genau dann, wenn der entsprechende Fächeninhalt unter dem Graphen der Funktion endlich ist.

(5) Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ gilt, so existiert das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

b) Verwenden Sie die Substitution $s = \sqrt{x}$, um folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_1^{16} \frac{1}{4\sqrt{x} + 2x} dx$$

c) Berechnen Sie das Integral:

$$\int_1^3 \frac{3 + 2x}{x^2} dx$$

Lösung:

a)

(1) ist WAHR nach Definition.

(2) ist FALSCH, denn alle $F + c$, $c \in \mathbb{R}$, sind Stammfunktionen.

(3) ist FALSCH, denn Maximum/Minimum müssen nicht existieren.

(4) ist WAHR nach Definition.

(5) ist FALSCH, zum Beispiel $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ existiert nicht.

b) Mit der Substitution $s = \sqrt{x}$ (und daher $ds = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_1^{16} \frac{1}{4\sqrt{x} + 2x} dx &= \int_{x=1}^{x=16} \frac{1}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_{s=1}^{s=4} \frac{1}{2 + s} ds \\ &= \big[\ln(2 + s)\big]_1^4 = \ln 6 - \ln 3 = \ln(6/3) = \ln 2 \end{aligned}$$

c)

$$... = \int_1^3 \frac{3}{x^2} dx + 2 \int_1^3 \frac{dx}{x} = \Big[-\frac{3}{x} + 2 \ln x \Big]_1^3 = -1 + 2 \ln 3 + 3 = 2 + 2 \ln 3$$

Aufgabe 2. *(8+6+6 Punkte)*

a) Gegeben sei die parametrisierte Kurve $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ durch $\gamma(t) := (t, t^2)$.

i. Stellen Sie den Graphen von γ in $\mathbb{R}^2$ zeichnerisch dar.

ii. Bestimmen Sie den Ableitungsvektor γ' von γ (als Funktion $[-1,1] \to \mathbb{R}^2$).

iii. Für welche $t \in [-1,1]$ ist γ regulär?

iv. Bestimmen Sie die Tangente an γ im Punkt $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der parametrisierten Kurve $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $\alpha(t) = (t^3, t^3)$.

c) Berechnen Sie den von der parametrisierten Kurve $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(t) = r(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

mit $r(t) = \sqrt{4\pi^2 - 3t^2}$, umfahrenen Flächeninhalt.

Lösung:

a) Der Graph ist das Parabelstück $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2,\ x \in [-1,1]\}$. Der Ableitungsvektor ist

$$\gamma'(t) = (1, 2t).$$

Damit ist $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in [-1,1]$, also ist γ für alle $t \in [-1,1]$ regulär. Wegen $\gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = (1,1)$ ist die Tangente:

$$T_{\gamma,\frac{1}{2}} = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \mathbb{R} \cdot \gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Der Ableitungsvektor ist $\alpha'(t) = (3t^2, 3t^2)$ und hat die Länge

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{|\alpha_1'(t)|^2 + |\alpha_2'(t)|^2} = \sqrt{9t^4 + 9t^4} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot t^2$$

Somit berechnen wir für die Bogenlänge:

$$L(\alpha) = \int_{-1}^{1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{-1}^{1} 3 \cdot \sqrt{2} \cdot t^2 dt = \sqrt{2}\left[t^3\right]_{-1}^{1} = \sqrt{2}(1 - (-1)) = 2\sqrt{2}$$

c) Der Flächeninhalt ist:

$$\begin{aligned} F_\varphi &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (4\pi^2 - 3t^2) dt = \frac{1}{2}\left[4\pi^2 t - t^3\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left(4\pi^3 - \pi^3 + 4\pi^3 - \pi^3\right) = 3\pi^3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind.

(1) Jede total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist partiell differenzierbar.

(2) Jede partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist total differenzierbar.

(3) Es gibt total differenzierbare Funktionen, die nicht stetig sind.

(4) Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein lokales Maximum, so ist die Hesse-Matrix von f in x_0 negativ definit.

(5) Der Gradient einer total differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zeigt immer in die Richtung des stärksten Wachstums.

b) Wir betrachten die beiden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$f(x,y) = ye^{3x+x^2} \quad , \quad g(t) = \big(\ln t \ , \ 2\sqrt{t}\big)$$

Ermitteln Sie den Gradienten von f und die Jacobi-Matrix von g.

c) Wir betrachten wieder die beiden Abbildungen f und g aus Teil b). Berechen Sie nun den Gradienten von f im Punkt $(x,y) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, die Jacobi-Matrix von g im Punkt $t = 1 \in \mathbb{R}$ und die Jacobi-Matrix der Komposition $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x,y) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$.

Lösung:

a)

(1) ist WAHR nach einem Satz aus der Vorlesung.

(2) ist FALSCH nach einem Beispiel aus der Vorlesung.

(3) ist FALSCH, denn total differenzierbare Funktionen sind stetig.

(4) ist FALSCH, denn die Matrix kann auch semi-definit sein.

(5) ist WAHR, siehe Vorlesung.

b) Unter Verwendung der Produkt- und der Kettenregel berechnen wir:

$$\nabla f(x,y) = \big((3+2x)ye^{3x+x^2} \ , \ e^{3x+x^2}\big) \quad , \quad \text{Jac } g(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

c) Wegen $f(0,1) = 1$ ist

$$\nabla f(0,1) = \big(3,1\big) \ , \ \text{Jac } g(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \text{Jac } (g \circ f)(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \big(3,1\big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. *(10+10 Punkte)*

a) Wir betrachten das Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 3\}$ in $\mathbb{R}^2$. Stellen Sie das Gebiet G in $\mathbb{R}^2$ graphisch dar und berechnen Sie die beiden folgenden Integrale (der erste Schritt ist schon vorgegeben):

$$(i) \qquad \int\int_G yx^2 dG = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=1}^{y=3} yx^2 dG = ...$$

$$(ii) \qquad \int\int_G \frac{1}{(x+y)^2} dG = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=1}^{y=3} \frac{1}{(x+y)^2} dG = ...$$

b) Wir betrachten nun in $\mathbb{R}^2$ das Gebiet

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - |x|\}.$$

Stellen Sie das Gebiet D graphisch dar und berechnen Sie den Schwerpunkt von D.

Lösung:

a) Es handelt sich um ein Rechteck der Kantenlängen 3 (in x) und 2 (in y). Zeichnen! Für die Integrale berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int\int_G yx^2 dG &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=1}^{y=3} yx^2 dG = \int_{x=0}^{x=3} x^2 \left(\int_{y=1}^{y=3} y dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=3} x^2 \big[\frac{1}{2}y^2\big]_1^3 dx \\
&= \int_{x=0}^{x=3} x^2 \frac{9-1}{2} dx = 4\big[\frac{1}{3}x^3\big]_0^3 = \frac{4}{3}(27-0) = 36 \\
\int\int_G \frac{1}{(x+y)^2} dG &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=1}^{y=3} \frac{1}{(x+y)^2} dG = \int_{x=0}^{x=3} \left[\frac{-1}{x+y}\right]_{y=1}^{y=3} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = [\ln(x+1) - \ln(x+3)]_{x=0}^{x=3} \\
&= \ln 4 - \ln 6 - \ln 1 + \ln 3 = \ln \frac{4 \cdot 3}{6} = \ln 2
\end{aligned}$$

b) Es handelt sich um ein Dreieck mit Grundseite $[-1,1] \times \{0\}$ und Spitze in $(0,1)$. Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt auf der y-Achse. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\int\int_G x dG &= \int_{x=-1}^{x=1} \int_0^{1-|x|} x dG = \int_{x=-1}^{x=1} x[y]_0^{1-|x|} dx = \int_{-1}^1 (x - x|x|) dx \\
&= \int_{-1}^0 (x + x^2) dx + \int_0^1 (x - x^2) dx \\
&= \big[x^2/2 + x^3/3\big]_{-1}^0 + \big[x^2/2 - x^3/3\big]_0^1 = -1/2 + 1/3 + 1/2 - 1/3 = 0 \\
\int\int_G y dG &= \int_{x=-1}^{x=1} \int_0^{1-|x|} y dG = \int_{x=-1}^{x=1} \big[\frac{1}{2}y^2\big]_0^{1-|x|} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-|x|)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (1 + 2x + x^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx \\
&= \frac{1}{2} \Big(\big[x + x^2 + x^3/3\big]_{-1}^0 + \big[x - x^2 + x^3/3\big]_0^1 \Big) = \frac{1}{2}\big(1/3 + 1/3\big) = 1/3
\end{aligned}$$

Folglich liegt der Schwerpunkt im Punkt $(x,y) = \big(0, \frac{1}{3}\big)$.

Aufgabe 5. *(2+2+8+8 Punkte)*

a) Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{21+i}{2-3i}$$

in der Form $z = \mathrm{Re}\,(z) + i \cdot \mathrm{Im}\,(z)$.

b) Geben Sie die komplexe Zahl $w = -2i$ in Polarkoordinaten an.

c) Bestimmen Sie den Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung:

$$u''' + u'' + u' + u = 0$$

d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} u'' - 4u' + 4u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 2 \end{aligned}$$

Lösung:

a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{21+i}{2-3i} &= (21+i) \cdot \frac{\overline{2-3i}}{|2-3i|^2} = (21+i) \cdot \frac{2+3i}{2^2+(-3)^2} \\ &= \frac{1}{13}(42+63i+2i-3) = \frac{1}{13}(39+65i) = 3+5i \end{aligned}$$

b) $w = 2e^{i3\pi/2}$

c) Das charakteristische Polynom der DGL ist $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$. Wir erraten die Nullstelle $z_0 = -1$. Polynomdivision liefert nun:

$$(z^3 + z^2 + z + 1) : (z+1) = z^2 + 1$$

Anhand der dritten binomischen Formel oder unter Verwendung der pq-Formel ergeben sich die weiteren Nullstellen $z_1 = i$ und $z_2 = -i$. Der Lösungsraum ist

$$L = \{ae^{-t} + be^{it} + ce^{-it} \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

d) Hier ist das charakteristische Polynom $P(x) = x^2 - 4x + 4$ und mit der pq-Formel faktorisieren wir $P(x) = (x-2)^2$. Die allgemeine Lösung der DGL ist also:

$$u(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$$

Die Startbedingung $u(0) = 0$ liefert $a = 0$, also $u(t) = bte^{2t}$ und $u'(t) = (b + 2bt)e^{2t}$. Einsetzen der Startbedingung $u'(0) = 2$ liefert dann $b = 2$. Die Lösung ist also:

$$u(t) = 2te^{2t}$$

Aufgabe 6. *(4+8+2+6 Punkte)*

Wir betrachten ein Spiel, in dem zwei Aktionen ausgeführt werden. Zunächst wird aus einem Stapel mit den drei Karten *Karo* 2, *Karo* 3, *Karo* 4 eine Karte gezogen. Dann wird noch eine Münze geworfen, die *Kopf* oder *Zahl* zeigt.

a) Was ist der Ergebnisraum Ω für dieses Spiel?

b) Wir gehen davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für die Elementarereignisse Laplace-verteilt ist (also gleichverteilt). Es sei A das Ereignis "*Karo* 2 *gezogen*" und B das Ereignis "*Kopf gefallen*". Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) \quad , \quad P(B) \quad , \quad P(A \cap B) \quad , \quad P(A^c \cup B^c)$$

c) Sind die beiden Ereignisse A und B stochastisch abhängig oder unabhängig? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

d) Es werden nun Punkte vergeben, und zwar 0 Punkte, falls *Kopf* gefallen ist, und der Zahlwert der gezogenen Karte, falls *Zahl* gefallen ist. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Spiels.

Lösung:

a) Der Ergebnisraum enthält 6 Elementarereignisse:

$$\begin{aligned} \Omega &= \big\{a_1 = (\text{Karo } 2, \text{Kopf});\ a_2 = (\text{Karo } 3, \text{Kopf}); a_3 = (\text{Karo } 4, \text{Kopf}); \\ &\quad a_4 = (\text{Karo } 2, \text{Zahl});\ a_5 = (\text{Karo } 3, \text{Zahl});\ a_6 = (\text{Karo } 4, \text{Zahl})\big\} \end{aligned}$$

b) Wegen $P(\{a_j\}) = 1/6$ für $j = 1, ..., 6$ und $A = \{a_1, a_4\}$, $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ ist:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{a_1\}) + P(\{a_4\}) = 2/6 = 1/3 \\ P(B) &= P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + P(\{a_3\}) = 3/6 = 1/2 \\ P(A \cap B) &= P\{a_1\}) = 1/6 \\ P(A^c \cup B^c) &= P\big((A \cap B)^c\big) = 1 - P(A \cap B) = 5/6 \end{aligned}$$

c) Die beiden Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, denn:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

d) Der Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} E &= 0 \cdot P(\{a_1\}) + 0 \cdot P(\{a_1\}) + 0 \cdot P(\{a_1\}) \\ &\quad +2 \cdot P(\{a_1\}) + 3 \cdot P(\{a_1\}) + 4 \cdot P(\{a_1\}) = \frac{1}{6}\big(2 + 3 + 4\big) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Es sei b_j das Ergebnis des Ereignisses a_j in Punkten, also $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 = 2$, $b_5 = 3$, $b_6 = 4$. Dann berechnet sich die Varianz für die Laplace-Verteilung als:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6^2} \sum_{i<k} (b_i - b_k)^2 = \frac{1}{36}\big(0^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \\ &\qquad\qquad +2^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2\big) \\ &= \frac{1}{36}\big(2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 16\big) = \frac{1}{36}\big(2 + 16 + 27 + 48\big) = \frac{93}{36} = \frac{31}{12} \end{aligned}$$

Aufgabe 7. *(6+8+3+3 Punkte)*

In einer sehr regenreichen deutschen Stadt sei die jährliche Niederschlagsmenge (in l/m^2) normalverteilt mit Erwartungswert 1200 l/m^2 und Streuung 100 l/m^2.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr weniger als 1100 l/m^2 Niederschlag fällt?

b) Es sei Y nun die Niederschlagsmenge aus 4 Jahren. Die Zufallsvariable Y ist wieder normalverteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Streuung von Y.

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 4 Jahren weniger als 4400 l/m^2 Niederschlag fällt?

d) Die Anzahl der Blitzeinschläge pro Jahr sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 10$. Wie hoch ist der Erwartungswert für die Anzahl der Blitzeinschläge pro Jahr?

Lösung:

a) Wir bezeichnen mit X die Niederschlagsmenge eines Jahres. Dann ist die Zufallsvariable

$$Z := \frac{X - 1200}{100}$$

normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Streuung 1 (also standardnormalverteilt). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(X < 1100) &= P(X - 1200 < -100) = P\left(\frac{X - 1200}{100} < -1\right) = P(Z < -1) \\ &= \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0,841 = 0,159 \end{aligned}$$

Sie liegt also etwa bei $15,9\%$. Dabei haben wir den Wert für $\Phi(1)$ in einer Tabelle für die Standardnormalverteilung abgelesen.

b) Wir erhalten Y als $Y = 4X = X + X + X + X$. Wir können davon ausgehen, dass die Niederschlagsmengen der einzelnen Jahre stochastisch unabhängig sind. Nach den Rechenregeln ist der Erwartungswert von Y:

$$E(Y) = 4 \cdot E(X) = 4 \cdot 1200 = 4800$$

und die Streuung

$$\sigma(Y) = \sqrt{4 \cdot \sigma(X)^2} = \sqrt{4 \cdot 100^2} = 200.$$

c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(Y < 4400) &= P(Y - 4800 < -400) = P\left(\frac{Y - 4800}{200} < -2\right) \\ &= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0,977 = 0,023 \end{aligned}$$

Sie liegt also etwa bei $2,3\%$.

d) Für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable V mit Parameter λ ist der Erwartungswert $P(V) = \lambda$, hier also 10.