Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 14.08.2017

Mathematatik für Sicherheitsingenieure I A (BScS 2011)

Aufgabe 1. *(6+8+6 Punkte)*

a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \quad = \quad n^2$$

b) Stellen Sie die folgenden Mengen als Teilmenge der reellen Achse graphisch dar:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 1\} \quad , \quad B = \{x : |x-4| \geq 2\}.$$

Schreiben Sie die Menge A als Intervall und die Menge B als Vereinigung von zwei Intervallen. Welches Intervall ist durch die Menge $C = A \cap B$ gegeben?

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass

$$f(n \cdot x) \quad = \quad n \cdot f(x)$$

Lösung:

a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = (2-1) = 1$ und $n^2 = 1$.
Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Nach Voraussetzung ist

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2n+1)$$

Wir rechnen weiter mit der binomischen Formel:

$$= \quad n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

was zu zeigen war.

b) In Intervallschreibweise ist $A = [1,3]$ und $B = (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$.

Wegen $A \cap [6, +\infty) = \emptyset$ ist

$$C \quad = \quad A \cap B = A \cap (-\infty, 2] = [1,3] \cap (-\infty, 2] = [1,2].$$

c) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.
Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Wegen der Rechenregel $f(x+y) = f(x) + f(y)$ gilt

$$f\big((n+1) \cdot x\big) \quad = \quad f\big(n \cdot x + x\big) = f(n \cdot x) + f(x).$$

Jetzt setzen wir die Induktionsvoraussetzung $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ ein und rechnen weiter:

$$= n \cdot f(x) + f(x) = (n+1) \cdot f(x),$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 2. *(5+7+8 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind.

(1) Sind zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal, so gilt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

(2) Sind zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal, so gilt $\vec{v} \times \vec{w} = 0$.

(3) Sind zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ orthogonal, so sind sie auch linear abhängig.

(4) Vier Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig.

(5) Die Vereinigung zweier Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Unterraum.

b) Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei x eine reelle Zahl sei. Für welche Werte von x sind $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ linear abhängig, für welche Werte linear unabhängig?

c) Eine Ebene E ist in $\mathbb{R}^3$ durch die Gleichung $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$ gegeben. Stellen Sie E in Parameterform

$$E = \vec{P} + \mathbb{R} \cdot \vec{v} + \mathbb{R} \cdot \vec{w}$$

und in der Form

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = c\}$$

dar. Bestimmen Sie einen Vektor der Länge 1, der auf E orthogonal steht.

Lösung:

a)

(1) ist WAHR, denn $\vec{v}, \vec{w}$ sind genau dann orthogonal, wenn $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

(2) ist FALSCH. Die Einheitsvektoren e_1, e_2 sind orthogonal, aber $e_1 \times e_2 = e_3$.

(3) ist FALSCH. e_1, e_2 sind orthogonal aber linear unabhängig.

(4) ist WAHR aus Dimensionsgründen.

(5) ist FALSCH. $U \cup V = \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\} = \{x_1 x_2 = 0\}$ ist kein Unterraum.

b) Wir berechnen die Determinante:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \end{pmatrix} &= 4\cdot 0\cdot x + 2\cdot 1\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot x - 4\cdot 1\cdot 1 \\ &= 6 + 10 - 4x - 4 = 12 - 4x.\end{aligned}$$

Also sind die Vektoren linear abhängig für $x = 3$ und linear unabhängig für $x \neq 3$.

c) Wir bestimmen drei Punkte aus E (etwa, in dem man für $j = 1, 2, 3$ jeweils $x_j = 0$ setzt und dann die beiden anderen Werte so wählt, dass die Gleichung erfüllt ist):

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

Damit ist

$$E = \vec{P} + \mathbb{R}\cdot(\vec{P} - \vec{Q}) + \mathbb{R}\cdot(\vec{P} - \vec{R}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist wichtig, darauf zu achten, dass $\vec{P} - \vec{Q}$ und $\vec{P} - \vec{R}$ linear unabhängig sind. Ausserdem ist $E = \{\vec{x} \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = c\}$ mit $\vec{a} = (2\ ,\ -1\ ,\ 4)$ und $c = 6$. Damit ist $\vec{a}$ ein Vektor, der senkrecht auf E steht, und wir können ihn auf Länge 1 normieren:

$$\frac{1}{\|\vec{a}\|}\cdot\vec{a} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. *(7+8+5 Punkte)*

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 12 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A, indem Sie A auf Zeilenstufenform bringen.

b) Bestimmen Sie den Nullraum $\mathcal{N}_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 | A \cdot \vec{x} = 0\}$ und geben Sie seine Dimension an. Bedenken Sie dabei die Rangformel.

c) Seien e_1, e_2, e_3, e_4 die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^4$. Sind die drei Vektoren Ae_1, Ae_2, Ae_3 in $\mathbb{R}^3$ linear abhängig oder unabhängig? Welche Dimension hat der Bildraum

$$L = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} = A\vec{x} \text{ für ein } \vec{x} \in \mathbb{R}^4\}?$$

Lösung:

a) Durch elementare Zeilen–Operationen erhalten wir die Zeilenstufenform:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Also hat A den Rang 3.

b) Nach der Rangformel ist

$$\dim \mathcal{N}_A + \text{rang } A = 4,$$

also $\dim \mathcal{N}_A = 1$. Mit der Matrix A' gilt $\mathcal{N}_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A'\vec{x} = 0\}$.
Das entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & 2x_2 & & -4x_4 & = & 0 \\ & & -x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Setzen wir also $x_4 := t$, so folgt durch Rückwärtssubstitution: $x_3 = t$, $x_2 = 2t$ und $x_1 = -4t - 3t - 4t = -11t$. Wir erhalten:

$$\mathcal{N}_A = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Die drei Vektoren Ae_1, Ae_2, Ae_3 entsprechen den ersten drei Spalten der Matrix A. Man kann also an der Zeilenstufenform (1) ablesen, dass sie linear unabhänig sind. Alternativ könnte man dies auch mit der Determinante der ersten drei Spalten von A überprüfen. Folglich ist $\dim L = 3$, da ohnehin $\dim L \leq 3$ aus Dimensionsgründen gilt. Alternativ könnte man argumentieren, dass $\dim L = 3$ gilt, da die Matrix A den Rang 3 hat.

Aufgabe 4. *(5+10+5 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind.

(1) Jede stetige Funktion ist auch differenzierbar.

(2) Jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nimmt ein Maximum an.

(3) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine Nullstelle.

(4) Der Grenzwert einer konvergenten Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch ein Häufungspunkt.

(5) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert 0, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, so konvergiert die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Wir betrachten die Folgen:

$$a_n := \frac{4n^2 + (3n^3 - 1)^2 - 4n^5}{1 + 2n - 3n^4 - 3n^6} \quad , \quad b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{n - 3n^2}{5n + (-1)^n n^2}$$

Beantworten Sie für beide Folgen die folgenden Fragen: Konvergiert die Folge, wenn ja, gegen welchen Grenzwert? Gibt es Häufungspunkte, wenn ja, welche?

c) Zerlegen Sie das folgende Polynom in Linearfaktoren:

$$f(x) \;=\; x^3 - x^2 - 37x - 35$$

Lösung:

a)

(1) ist FALSCH. $f(x) = |x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

(2) ist WAHR nach einem Satz über stetige Funktionen.

(3) ist FALSCH. $f(x) = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle.

(4) ist WAHR nach der Definition von Häufungspunkten.

(5) ist FALSCH. Das Produkt aus $a_n = 1/n$ und $b_n = n^2$ konvergiert nicht.

b) Für die Folge a_n kürzen wir Zähler und Nenner mit n^6:

$$a_n \;=\; \frac{4n^2 + (3n^3 - 1)^2 - 4n^5}{1 + 2n - 3n^4 - 3n^6} = \frac{4n^{-4} + (3 - 1n^{-3})^2 - 4n^{-1}}{n^{-6} + 2n^{-5} - 3n^{-2} - 3}$$

Wegen $n^{-k} \to 0$ für $n \to \infty$ (falls $k \geq 1$), liefern die Rechenregeln für Grenzwerte nun:

$$a_n \;\to\; \frac{3^2}{-3} = -3 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d.h. die Folge a_n konvergiert gegen den Grenzwert -3. Damit ist -3 natürlich gleichzeitig auch ein Häufungspunkt der Folge.

Für die Folge b_n kürzen wir im zweiten Summanden Zähler und Nenner mit n^2:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{n - 3n^2}{5n + (-1)^n n^2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{n^{-1} - 3}{5n^{-1} + (-1)^n}$$

Da der erste Summand gegen 0 konvergiert, verhält sich die Folge für $n \to \infty$ wie die Folge

$$c_n = \frac{n^{-1} - 3}{5n^{-1} + (-1)^n}$$

Die Folge c_n verhält sich wegen $n^{-1} \to 0$ für $n \to \infty$ aber wie die Folge $\frac{-3}{(-1)^n} = -3(-1)^n$. Die Folge b_n konvergiert also nicht, sondern hat die beiden Häufungspunkte 3 und -3.

c) Wir erraten die Nullstelle -1. Polynomdivision ergibt dann

$$\left(x^3 - x^2 - 37x - 35\right) : (x + 1) = x^2 - 2x - 35$$

Wir bestimmen die weiteren Nullstellen also durch

$$x_{2,3} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} + 35} = 1 \pm \sqrt{36} = 1 \pm 6$$

als $x_2 = 7$ und $x_3 = -5$. Die Zerlegung in Linearfaktoren ist also:

$$f(x) = (x + 1)(x - 7)(x + 5).$$

Aufgabe 5. *(3+3+10+4 Punkte)*

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) \quad = \quad (x^2-8)e^{1-x^2}$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

b) Wie verhält sich $f(x)$ asymptotisch für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$?

c) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f und untersuchen Sie f auf lokale Extremstellen, d.h. bestimmen Sie alle lokalen Extrema und geben Sie an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

d) Wo ist f monoton wachsend und wo monoton fallend?

Lösung:

a) Da $e^{1-x^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, stimmen die Nullstellen von f mit den Nullstellen von x^2-8 überein. Wir erhalten die beiden Nullstellen $\sqrt{8}$ und $-\sqrt{8}$.

b)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^1 \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-8}{e^{x^2}} = 0.$$

c) Wir berechnen mit der Produkt- und der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1-x^2}\big(2x-(x^2-8)2x\big) = e^{1-x^2}\big(2x(9-x^2)\big) = e^{1-x^2}\big(-2x^3+18x\big), \\ f''(x) &= e^{1-x^2}\big(-6x^2+18-(-2x^3+18x)2x\big) = e^{1-x^2}\big(4x^4-42x^2+18\big) \end{aligned}$$

Für die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ suchen wir die Nullstellen von f'. Analog zu Aufgabe b) stimmen diese mit den Nullstellen von $-2x^3+18x = 2x(9-x^2)$ überein. Wir finden also:

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = -3 \quad , \quad x_2 = 3.$$

Wegen

$$f''(x_0) = 18e^1 > 0 \quad , \quad f''(x_1) = f''(x_2) = e^{-8}(324-378+18) = -36e^{-8} < 0$$

handelt es sich bei $x_0 = 0$ um ein lokales Minimum und bei $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$ um lokale Maxima.

d) Wir untersuchen das Vorzeichen der Ableitung

$$f'(x) = e^{1-x^2}2x(3-x)(3+x)$$

und finden

$$f'(x)\left\{\begin{matrix} >0 \\ <0 \\ >0 \\ <0 \end{matrix}\right\} \quad \text{für} \quad \left\{\begin{matrix} x<-3 \\ -3<x<0 \\ 0<x<3 \\ 3<x \end{matrix}\right.$$

Daher ist f auf $(-\infty,-3)$ und $(0,3)$ streng monoton wachsend, und auf $(-3,0)$ und $(3,+\infty)$ streng monoton fallend.