**Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann** **6.9.2016**
**Bergische Universität Wuppertal**

# Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

**Aufgabe 1** (20 Punkte)

a) Berechnen Sie mit der Substitutionsregel das Integral $I_1 := \int_1^2 t \ln(4+t^2)dt$.

(5 Punkte)

b) Wie lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$R(x) := \frac{3x^3 - 6x^2 + 50x - 81}{(x-1)^2(x^2+16)}$$

(3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung zu $R$. (6 Punkte)

d) Berechnen Sie das Integral $I_2 := \int_2^5 \left( \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+16} \right) dx$ (6 Punkte)

*Lösung.* Zu a) Substituieren wir $u = t^2$, so folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_1^2 2t \ln(4+t^2)dt = \frac{1}{2}\int_1^4 \ln(4+u)du \\ &= \frac{1}{2}\Big((4+u)\ln(4+u) - (4+u)\Big)\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\Big(8\ln 8 - 3 - 5\ln(5)\Big) \\ &= 12\ln 2 - \frac{5}{2}\ln 5 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Zu b) Der gesuchte Ansatz lautet

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+16}$$

Zu c) Ausmultiplizieren liefert uns

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A(x-1)(x^2+16) + B(x^2+16) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+16)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (16A+C-2D)x - 16A + 16B + D}{(x-1)^2(x^2+16)} \end{aligned}$$

Es folgt

$$C = 3 - A, \qquad -A+B-2C+D = -6, \qquad 16A+C-2D = 50, \qquad -16A+16B+D = -81$$

$$A+B+D = 0, \qquad 15A-2D = 47, \qquad -16A+16B+D = -81$$

$$17A + 2B = 47, \qquad -17A + 15B = -81$$

Das letztere führt auf $B = -2, A = 3$, also $C = 0, D = -1$.

Dann wird

$$R(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+16}$$

Zu d) Es gilt

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_2^5 \left( \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+16} \right) dx \\ &= \left( 3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{4}\right) \right)\Big|_2^5 \\ &= 6\ln 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\left( \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** (20 Punkte)
Es sei $\alpha$ die in Polarkoordinaten gegebene Kurve

$$\alpha(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

mit $r(\varphi) = 1 + \frac{1}{2}\cos(\varphi),\ -\pi \leq \varphi < \pi$.

a) Bestimmen Sie die Tangente an diese Kurve im Punkte $\alpha(\pi/4)$.

b) An welchen regulären Stellen von $\alpha$ verläuft die Tangente an $\alpha$ senkrecht ?

c) Was ist der Flächeninhalt der von der Kurve eingeschlossenen Fläche ?

(6+6+8 Punkte)

*Lösung.* Zu a) Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha'(\varphi) &= r'(\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + r(\varphi) \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= (-\frac{1}{2})\sin(\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + (1 + \frac{1}{2}\cos(\varphi)) \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ folgt

$$\alpha'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Tangente ist dann

$$T = \alpha(\pi/4) + \mathbb{R}\alpha'(\pi/4) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu b) Es gilt

$$x'(\varphi) = -\frac{1}{2}\sin(\varphi)\cos\varphi - (1 + \frac{1}{2}\cos\varphi)\sin\varphi = -(1 + \cos(\varphi))\sin\varphi = 0$$

genau dann, wenn $\varphi \in \{0, -\pi\}$.

Zu c) Da die Kurve in Polarkoordinaten gegeben ist, ist der gesuchte Flächeninhalt gerade

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r(\varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \cos(\varphi) + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) d\varphi \\ &= 2\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3** (20 Punkte)
Es sei $f(x,y) := \cos(\pi x)\ \sin(\pi xy) + \cos^2(\pi y)$. Mit $\vec{g}(t,s)$ bezeichnen wir die Abbildung

$$\vec{g}(t,s) = \Big(t(t+s),\ \ s(t-2st)\Big)$$

a) Berechnen Sie $\nabla f$ (8 Punkte)

b) Was ist die Jacobimatrix von $\vec{g}$ ? (4 Punkte)

c) Für $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$ berechnen Sie $\nabla h(-1,2)$. (8 Punkte)

*Lösung.* Zu a) Mit den Rechenregeln für das partielle Ableiten folgt

$$f_x = \pi\,(-\sin(\pi x)\sin(\pi xy) + y\cos(\pi x)\cos(\pi xy))$$

$$f_y = \pi\,(x\cos(\pi x)\cos(\pi xy) - 2\cos(\pi y)\sin(\pi y))$$

Zu b) Es gilt

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} 2t+s & t \\ s-2s^2 & t-4st \end{pmatrix}$$

Zu c) Es gilt $\vec{g}(-1,2) = (-1,\ 6)$, weiter $J_{\vec{g}}(-1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ und

$$\nabla f(-1,6) = \pi(\,-6,\ 1)$$

Damit folgt

$$\nabla h(-1,2) = \pi(\,-6,\ 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = (\,-6\pi,\ 13\pi\,)$$

**Aufgabe 4** (20 Punkte)

Es sei $G$ das Gebiet, das zwischen $x = -2$ und $x = \dfrac{2}{3}$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := (\dfrac{x}{2} - 1)^2$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x^2$ berandet wird .

a) Skizzieren Sie das Gebiet $G$. ( 5 Punkte)

b) Berechnen Sie für $x \in [-2,\, 2/3]$ das Integral $J(x) := \displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{dy}{(1+x+y)^2}$

(7 Punkte)

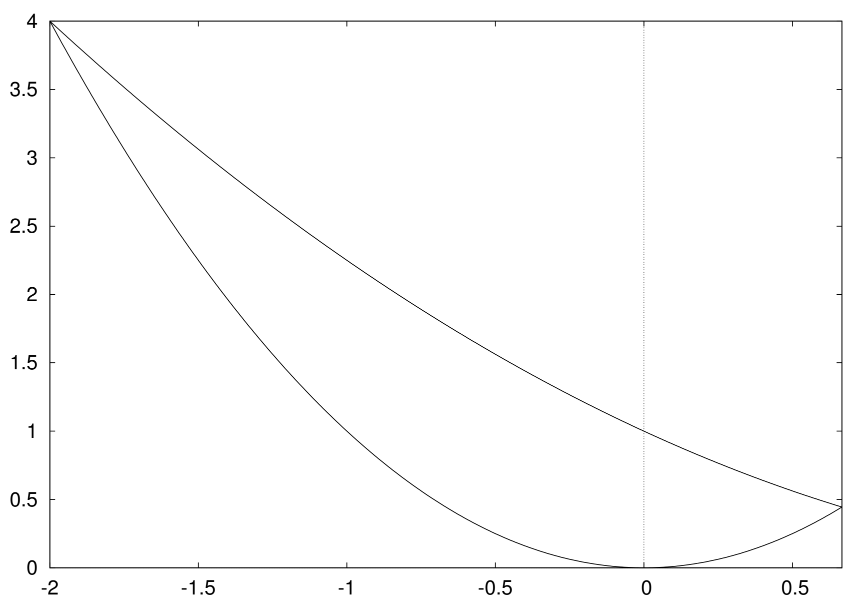
c) Berechnen Sie das Integral $I_1 = \displaystyle\int_G \frac{1}{(1-x+y)^2} dG$ unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$ und

$\displaystyle\int \frac{dx}{2-2x+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big( \ln(4+\sqrt{8}-x) - \ln(4-\sqrt{8}-x) \Big)$ ).

(8 Punkte)

*Lösung.* Zu a) Das Gebiet hat folgendes Aussehen:




Zu b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
J(x) &= \int_{x^2}^{(\frac{x}{2}-1)^2} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
&= -\frac{1}{1+x+y}\Big|_{x^2}^{(\frac{x}{2}-1)^2} = \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{1}{1+x+(\frac{1}{2}x-1)^2}
\end{aligned}
$$

$$= \quad \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{1}{2+\frac{x^2}{4}}$$

Zu c) Analog zu b) haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{x^2}^{(\frac{x}{2}-1)^2} \frac{dy}{(1-x+y)^2} &= -\frac{1}{1-x+y}\Big|_{x^2}^{(\frac{x}{2}-1)^2} = \frac{1}{1-x+x^2} - \frac{1}{1-x+(\frac{1}{2}x-1)^2} \\
&= \frac{1}{1-x+x^2} - \frac{1}{2-2x+\frac{x^2}{4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-2}^{2/3} \frac{dx}{1-x+x^2} - \int_{-2}^{2/3} \frac{dx}{2-2x+\frac{x^2}{4}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{-2}^{2/3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\ln(4+\sqrt{8}-x) - \ln(4-\sqrt{8}-x)\Big)\Big|_{-2}^{2/3} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln\left(\frac{10}{3}+\sqrt{8}\right) - \ln\left(\frac{10}{3}-\sqrt{8}\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\ln(6+\sqrt{8}) - \ln(6-\sqrt{8})\Big)
\end{aligned}$$

**Aufgabe 5** (20 Punkte)
Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' + y'' - 16y' + 20y = (12t - 5)e^{-t}$$

a) Was ist das charakteristische Polynom $P$ dieser DGL? (3 Punkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei 2.) (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Punkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung $u_p$ ? (4 Punkte)

e) Berechnen Sie $u_p$ mit diesem Ansatz. (6 Punkte)

Beachten Sie: Die Variable ist $t$.

*Lösung.* Zu a) Es ist $P(X) = X^3 + X^2 - 16X + 20$.

Zu b) Es gilt $P(X) = (X-2)^2(X+5)$, so dass die Nullstellen gegeben sind durch $\lambda_1 = 2$ (2-fach) und $\lambda_2 = -5$.

Zu c) Es resultieren die Basislösungen $u_1(t) = e^{2t}, u_2(t) = te^{2t}$ und $u_3(t) = e^{-5t}$.

Zu d) Der Ansatz für eine partikuläre Lösung $u_p$ ist $u_p(t) = (at + b)e^{-t}$.

Zu e) Einsetzen in die DGL liefert wegen $u_p'(t) = (a - b - at)e^{-t}$, $u''(t) = (-2a + b + at)e^{-t}$ und $u'''(t) = (3a - b - at)e^{-t}$:

$$P(\frac{d}{dt})u_p = (-15a + 36b + 36at)e^{-t} = (12t - 5)e^{-t}$$

Wir wählen also $a = \frac{1}{3}, b = 0$. Dann wird die allgemeine Lösung

$$u(t) = (At + B)e^{2t} + Ce^{-5t} + \frac{t}{3}e^{-t}$$

mit Konstanten $A, B$ und $C$.

**Aufgabe 6** (20 Punkte)
a) Ein Kommunikationssystem bestehe aus $n$ Komponenten, von denen jede mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,75$ funktioniert. Das Kommunikationssystem funktioniert, wenn mindestens die Hälfte seiner Komponenten funktioniert. Angenommen, ein Kommunikationssystem habe 3, und ein anderes habe 5 Komponenten. Welches funktioniert mit der größeren Wahrscheinlichkeit? (Hinweis: Binomialverteilung).

b) Angenommen, bei einer Versicherung werden pro Tag durchschnittlich 4 Schadensfälle abgewickelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden innerhalb einer Spanne von 2 Tagen höchstens 4 Schadensfälle reguliert?

(Hinweis: Poissonverteilung, es gilt $e^8 \approx 2981$). (10+10 Punkte)

*Lösung.* Zu a) Die relevante Binomialverteilung für ein n-komponentiges System lautet so:

$$P_{n,k} := P(\{k \text{ Komponenten funktionieren}\}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\frac{3}{4})^k (\frac{1}{4})^{n-k} = 4^{-n} 3^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

Für $n = 3$ haben wir

$$P(\{\text{Komm.} - \text{System funktioniert nicht}\}) = P_{3,0} + P_{3,1} = 4^{-3}(1+9) = \frac{5}{32}$$

also

$$P(\{\text{Komm.} - \text{System funktioniert}\}) = \frac{27}{32} = 0,84$$

Für $n = 5$ wird

$$P(\{\text{Komm.} - \text{System funktioniert nicht}\}) = P_{5,0} + P_{5,1} + P_{5,2} = 4^{-5}(1+15+90) = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512}$$

also

$$P(\{\text{Komm.} - \text{System funktioniert}\}) = \frac{459}{512} = 0,89$$

Zu b) Es ist für einen Tag $P_1(\{k \text{ Schadensfälle reguliert}\}) = e^{-4}\,\frac{4^k}{k!}$ und für 2 Tage, da die Zahl der an einem Tag regulierten Schadensfälle stochastisch unabhängig von der entsprechenden Zahl an anderen Tagen ist, $P_2(\{k \text{ Schadensfälle reguliert}\}) = e^{-8}\,\dfrac{8^k}{k!}$. Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p = e^{-8} \sum_{k=0}^{4} \frac{8^k}{k!} = e^{-8}(1 + 8 + 32 + \frac{256}{3} + \frac{512}{3}) = 297 e^{-8} = 0,099$$

**Aufgabe 7** (20 Punkte)
Ein Astronom will die Entfernung $d$ (in Lichtjahren als Maßeinheit) zu einem bestimmten Stern messen. Das soll mit einer Messreihe von $n$ Messungen geschehen. Das Ergebnis jeder Messung sei normalverteilt mit Erwartungswert $d$ und Standardabweichung $\sigma = 2$ Lichtjahre. Er ist dann an dem Mittelwert $\overline{X}_{(n)} := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ interessiert, wobei $X_j$ das Resultat der $j$.-ten Messung bedeuteten soll.

a) Welcher Verteilung unterliegt $\overline{X}_{(n)}$ ?

b) Angenommen, es werde 50-mal gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht der Mittelwert $\overline{X}_{(50)}$ um höchstens 0,5 Lichtjahre von $d$ ab?

c) Wie viele Messungen wären nötig, sollte der Mittelwert $\overline{X}_{(n)}$ mit Wahrscheinlichkeit 80% um höchstens 0,25 Lichtjahre von $d$ abweichen?

(5+7+8 Punkte)

*Lösung.* Zu a) Der Mittelwert $\overline{X}_{(n)}$ ist normalverteilt mit Mittel $d$ und Streuung $\overline{\sigma} := \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Zu b) In a) setzen wir $n = 50$. Dann wird $\overline{\sigma} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$. Also

$$P(|\overline{X}_{(50)} - d| \leq 0,5) = P(-\frac{0,5}{\overline{\sigma}} \leq \frac{\overline{X}_{(50)} - d}{\overline{\sigma}} \leq \frac{0,5}{\overline{\sigma}}) = 2\,\mathrm{Erf}\,(\frac{0,5}{\overline{\sigma}}) - 1 = 2\,\mathrm{Erf}\,(\frac{5}{2\sqrt{2}}) - 1 = 0.92$$

Zu c) Es muss gelten:

$$0,8 \leq P(|\overline{X}_{(n)} - d| \leq 0,25) = 2\,\mathrm{Erf}\,(\frac{0,25}{\overline{\sigma}}) - 1 = 2\,\mathrm{Erf}\,(\frac{\sqrt{n}}{8}) - 1$$

Das heißt: $\mathrm{Erf}\,(\frac{\sqrt{n}}{8}) \geq 0,9 =$ $\mathrm{Erf}\,(1,29)$. Das führt auf $\frac{\sqrt{n}}{8} \geq 1,29$ und damit $n \geq (8 \cdot 1,29)^2$, d.h. $n \geq 107$.