Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **15.8.2016**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1a für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \geq 1$ die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} 6^{-k} \frac{5k+6}{k(k+1)} = 1 - 6^{-n} \frac{1}{n+1}$$

b) Berechnen Sie die Menge M aller x, die die Ungleichung

$$|3x+2| > |x-4|$$

erfüllen.

(10+10 Pkte)

Lösung. a) Induktion nach n. Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich $\frac{11}{12}$. Gilt die Formel für n, so auch für $n+1$, denn wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 6^{-k} \frac{5k+6}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} 6^{-k} \frac{5k+6}{k(k+1)} + 6^{-n-1} \frac{5n+11}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - 6^{-n} \frac{1}{n+1} + 6^{-n-1} \frac{5n+11}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{6^{-n-1}}{(n+1)(n+2)} (6(n+2) - 5n - 11) = 1 - \frac{6^{-n-1}}{n+2}
\end{aligned}$$

b) Folgende Umformungen sind äquivalent:

$x \in M$

$9x^2 + 12x + 4 > x^2 - 8x + 16$

$8x^2 + 20x > 12$

$x^2 + \frac{5}{2}x > \frac{3}{2}$

$(x + \frac{5}{4})^2 > \frac{49}{16} = (\frac{7}{4})^2$

$|x + \frac{5}{4}| > \frac{7}{4}$

$x \in \mathbb{R} \setminus [-3, \frac{1}{2}]$

Somit ist

$$M = \mathbb{R} \setminus [-3, \frac{1}{2}]$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

a) Liegen die Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in einer Ebene ?

b) Welchen Abstand hat der Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ von der Geraden G durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$?

(10+10 Pkte)

Lösung. a) Die durch die erstgenannten 3 Punkte verlaufende Ebene ist

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\Big(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\Big) + \mathbb{R}\Big(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\Big) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt aber $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin E$, denn sonst gäbe es $t, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es müsste dann also $t + 3s = 5, \quad 5t - 5s = 1$ und $t + 4s = 1$ sein. Aus den ersten beiden Gleichungen folgte dann $t = 7/5$, $s = 6/5$, aber die dritte Gleichung ist verletzt, da $t + 4s = 31/5 \neq 1$.

b) Es gilt zunächst $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\Big(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Dann wird der gesuchte Abstand gegeben durch

$$\begin{aligned} d &= \frac{\Big\|\Big(\vec{P} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\Big\|}{\Big\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\Big\|} \\ &= \frac{\Big\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\Big\|}{\sqrt{30}} = \frac{\Big\|\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}\Big\|}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{186}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{31}{5}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 14 & 8 & -6 & 1 \\ 10 & 6 & -4 & t \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von $\mathcal{A}$ und die Dimension des Nullraumes $N_{\mathcal{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ in Abhängigkeit von t. (10 Pkte)

b) Sei $t = 1$ und $\vec{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\mathscr{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gilt dann die Beziehung $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$? (5 Pkte)

c) Gilt für $t = 1$ sogar

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) \quad ?$$

Dazu betrachten Sie $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. (5 Pkte)

Lösung. a) In $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 14 & 8 & -6 & 1 \\ 10 & 6 & -4 & t \end{pmatrix}$ subtrahieren wir von der 2. Zeile das $\frac{7}{2}$-fache der 1. Zeile und von der 3. Zeile das $\frac{5}{2}$-fache der 1. Zeile. Es entsteht die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & t-\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Hierin subtrahieren wir von der 3. Zeile das $\frac{3}{5}$-fache der 2. Zeile und gelangen zu

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir ab, dass $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 2$ für $t = 1$ und $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 3$ für $t \leq 1$ gilt. Es ergibt sich aus $\dim N_{\mathcal{A}} = 4 - \operatorname{rg} \mathcal{A}$, dass $\dim N_{\mathcal{A}} = 2$ für $t = 1$ und $\dim N_{\mathcal{A}} = 1$, wenn $t \neq 1$ ist.

Zu b). Sei $t = 1$. Es ist $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Somit $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$.

Zu c) Für $t = 1$ gilt: $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{0}$, also ist auch $\vec{v} \in \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$. Wäre $\vec{v} \in \mathscr{L}_1$, so wäre aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das ist aber nicht möglich, wie der Vergleich der 4. Koordinate zeigt.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Die Folge $(x_n)_n$ sei definiert durch

$$x_n = \frac{3n^3 + 5n - 4}{2n^2 - 5} - \frac{6n^2 + 4n + 1}{4n + 3}$$

Hat die Folge $(x_n)_n$ einen Grenzwert ? (10 Pkte)

b) Für $x \geq \dfrac{3}{2}$ sei $f(x) := 4x^2 - 12x + 4$.

(i) Bestimmen Sie die Wertemenge W von f.

(ii) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f auf W. (5+5 Pkte)

Lösung. a) Aus $3n^3 + 5n - 4 = \frac{3}{2}n(2n^2 - 5) + \frac{25}{2}n - 4$ und $6n^2 + 4n + 1 = \frac{3}{2}n(4n + 3) - (\frac{1}{2}n - 1)$ folgt

$$x_n = \frac{3}{2}n + \frac{\frac{25}{2}n - 4}{2n^2 - 5} - \frac{3}{2}n + \frac{\frac{1}{2}n - 1}{4n + 3} \longrightarrow \frac{1}{8}\,,$$

wenn $n \to \infty$.

Zu b). Es ist $f(x) = 4(x^2 - 3x + 1) = 4(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$.

(i) Also gilt $W \subset [-\frac{5}{4}, \infty)$. Da $f(3/2) = -\frac{5}{4}$ und $f(x) \longrightarrow \infty$ mit $x \to \infty$, ist sogar mit dem Zwischenwertsatz $W = [-\frac{5}{4}, \infty)$.

(ii) Wir lösen die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf und finden $\dfrac{y + 5/4}{4} = (x - \dfrac{3}{2})^2$. Somit ist $x = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{y + 5/4}{4}}$. Soll $x \geq 3/2$ sein, muss das positive Vorzeichen gewählt werden. Also

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{y + \frac{5}{4}}\;)$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Sei $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x^2}$.

a) Berechnen Sie f'.

b) Auf welchen Intervallen ist f monoton wachsend, wo monoton fallend?

c) Welche lokalen Extrema gibt es für die Funktion f ?

d) Wie lautet die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f bei $x_0 = 2$? (4+8+5+3 Pkte)

Lösung. a) Es gilt mit der Produktregel

$$f'(x) = (2x-2)e^{-x^2} - 2x(x^2 - 2x - 1)e^{-x^2} = -(2x^3 - 4x^2 - 4x + 2)e^{-x^2}$$

b) Es gilt weiter

$$e^{x^2} f'(x) = -2(x+1)(x^2 - 3x + 1) = -2(x+1)(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})$$

Also ist $f' > 0$ auf $(-\infty, -1)$. Weiter ist $f'(x) < 0$ auf $(-1, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ und $f' > 0$ auf $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$. Auf $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ ist wieder $f' < 0$.

Das bedeutet, dass f auf $(-\infty, -1)$ und auf $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ monoton wächst und auf $(-1, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ und $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ monoton fällt.

c) Bei -1 liegt eine lokale Maximumsstelle, ebenso bei $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, während bei $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ein lokales Minimum liegt.

d) Die Gleichung der Tangenten ist $y = f(2) + f'(2)(x-2)$. Mit $f(2) = -e^{-4},\ f'(2) = 6e^{-4}$ ergibt das

$$y = -e^{-4} + 6e^{-4}(x-2) = +6e^{-4}x - 13e^{-4}$$