Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **1.9.2015**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das Integral $I_1 := \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x\,)}\,dx$ mit der Substitutionsregel. (5 Pkte)

b) Wie muss der Partialbruchansatz für die Funktion $R(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 10x - 8}{x(x-2)(x^2+4)}$ lauten? (3 Pkte)

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung für R. (6 Pkte)

d) Berechnen Sie das Integral $I_2 = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2+4}\right) dx$. (6 Pkte)

Lösung. a) Es gilt mit $u(x) := \ln x$

$$I_1 = \int_1^e \frac{1}{1+u(x)} u'(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+u} du = \ln 2$$

b) Der richtige Ansatz ist

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

c) Dabei wird

$$A = \lim_{x\to 0} xR(x) = 1, \qquad B = \lim_{x\to 2}(x-2)R(x) = 1$$

$$-\frac{1}{5} = R(1) = A - B + \frac{C+D}{5} = \frac{C+D}{5}, \qquad C + D = -1$$

$$-\frac{23}{15} = R(-1) = -A - \frac{1}{3}B + \frac{-C+D}{5} = -\frac{4}{3} + \frac{-C+D}{5}, \qquad \frac{-C+D}{5} = -\frac{1}{5}$$

Also ist $C = 0, D = -1$. Das führt auf

$$R(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2+4}$$

d) Da $R(x) = \left(\ln x + \ln x - 2 - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(\frac{x}{2})\right)'$, folgt

$$I_2 = \ln(\frac{4}{3}) + \ln 2 - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(2) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(3/2)$$

Aufgabe 2

Es sei $\alpha(t) := \Big(\cos(2t),\ \sin(t)\cdot\cos(2t)\Big)$ für $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$.

a) Berechnen Sie α'. (5 Pkte)

b) Wo ist α regulär? (4 Pkte)

c) Was ist die Normale an α an der Stelle $\alpha(\frac{\pi}{3})$? (4 Pkte)

d) Welche Fläche A schließt die Kurve α ein? Zeigen Sie, dass $A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(t)\cdot\cos^2(2t)\,dt$ ist und benutzen dann $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$ und schließlich die Substitutionsregel. (7 Pkte)

Lösung. a) Mit der Produktregel errechnen wir

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos t \cdot \cos(2t) - 2\sin t \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}$$

b) Ist t_0 eine Stelle, an der α irregulär ist, so muss $\alpha(t_0) = \vec{0}$ sein. Dann ist aber $\sin(2t_0) = 0$ und zugleich $\cos(t_0)\cdot\cos(2t_0) = 0$. Es bleibt nur $\cos(t_0) = 0$, da nun $\cos(2t_0) = 1$ ist. Da $-\frac{\pi}{4} \le t_0 \le \frac{\pi}{4}$, bleibt nur $t_0 = 0$ als Möglichkeit, soll $\sin(2t_0) = 0$ werden. Da aber dann $\cos(t_0) = 1 \neq 0$, entsteht erneut ein Widerspruch. Es gibt daher keine solche Stelle t_0. α ist überall regulär.

c) Es gilt $\alpha(\pi/3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\alpha'(\pi/3) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$. Die Normale an α bei $\alpha(\pi/3)$ ist dann

$$N = \alpha(\pi/3) + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

d) Wir arbeiten mit der Sektorformel. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(\alpha(t),\, \alpha'(t)\,) &= \begin{vmatrix} \cos(2t) & -2\sin(2t) \\ \sin t\cos(2t) & \cos t\,\cos(2t) - 2\sin t\,\sin(2t) \end{vmatrix} \\
&= \cos t\,\cos^2(2t) - 2\sin t\sin(2t)\cos(2t) + 2\sin t\sin(2t)\cos(2t) \\
&= \cos t\,\cos^2(2t) = \cos t(1 - 2\sin^2 t)^2
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t(1-2\sin^2 t)^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1-2x^2)^2 dx \\
&= \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-2x^2)^2 dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 4x^2 + 4x^4) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{8}{15\sqrt{2}} = \frac{4}{15}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Auf $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y > 0\}$ wird die Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \dfrac{x+2y}{1+x+y}$. Weiter sei $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\vec{g}(t,s) := \begin{pmatrix} t^2 + s(t+1) \\ t(t+s^2) \end{pmatrix}$. Mit h bezeichnen wir die auf $V := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{g}(t,s) \in U\}$ definierte zusammengesetzte Funktion $h = f \circ \vec{g}$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Pkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix $J_{\vec{g}}$ von $\vec{g}$. (4 Pkte)

c) Berechnen Sie $\nabla h(1,-1)$. (10 Pkte)

Lösung. a) Mit der Quotientenregel wird

$$f_x = \frac{1+x+y-x-2y}{(1+x+y)^2} = \frac{1-y}{(1+x+y)^2}$$

$$f_y = \frac{2(1+x+y)-x-2y}{(1+x+y)^2} = \frac{2+x}{(1+x+y)^2}$$

Somit $\nabla f = \dfrac{1}{(1+x+y)^2}\begin{pmatrix} 1-y \\ 2+x \end{pmatrix}$.

b) Die Regeln für das partielle Differenzieren liefern auch

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} 2t+s & t+1 \\ 2t+s^2 & 2ts \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $(x_0, y_0) := \vec{g}(1,-1) = (-1,2)$. Mit der Kettenregel folgt jetzt

$$(h_t(1,-1),\, h_s(1,-1)\,) = (f_x(x_0,y_0),\, f_y(x_0,y_0)\,)J_{\vec{g}}(1,-1) = \frac{1}{4}(-1,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = (\,\frac{1}{2}, -1\,)$$

Aufgabe 4 Es sei G das für $0 \le x \le 2$ von unten durch den Graphen von $f_1(x) = x(2-x)$ und von oben durch $f_2(x) = 2(1-|x-1|)$ begrenzte Gebiet. Weiter sei $f(x,y) := \dfrac{1}{\left(1+x+\frac{1}{2}y\right)^2}$

a) Skizzieren Sie G (5 Pkte)

b) Berechnen Sie für jedes $x \in [0,2]$ das "innere" Integral

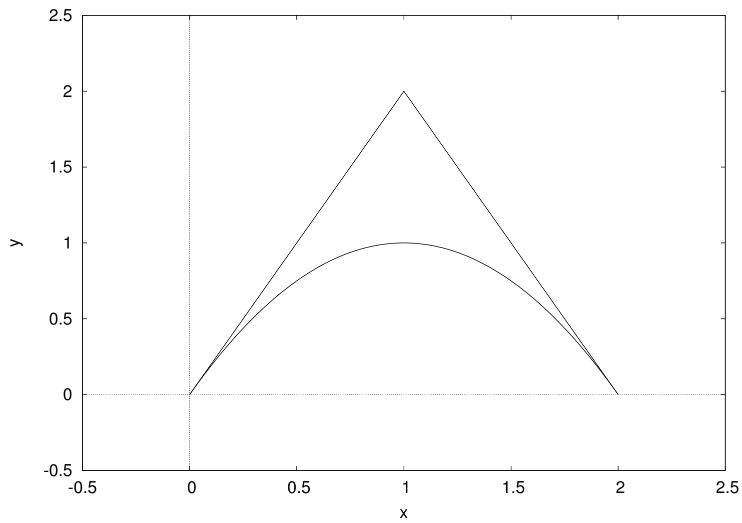
$$J(x) := \int_{G_x} f(x,y)dy,$$

wobei $G_x = \{y \,|\, (x,y) \in G\}$ (8 Pkte)

c) Berechnen Sie das Integral $J := \iint\limits_G f(x,y)dG$.

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2x-(x^2/2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left(\frac{\sqrt{6}+x-2}{\sqrt{6}-(x-2)}\right)$ (7 Pkte)

Lösung. a) Hier ist eine Skizze für G:



b) Es gilt $G_x = \{(x,y) \,\|x(2-x) \le y \le 2(1-|x-1|)\}$ und damit

$$
\begin{aligned}
\int_{G_x} f(x,y)dy &= \int_{x(2-x)}^{2(1-|x-1|)} \frac{dy}{\left(1+x+\frac{1}{2}y\right)^2} \\
&= (-2)\cdot \frac{1}{1+x+\frac{1}{2}y}\Big|_{x(2-x)}^{2(1-|x-1|)} \\
&= \frac{2}{1+2x-\frac{1}{2}x^2} - \frac{2}{2+x-|x-1|}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^2 \frac{2}{1+2x-\frac{1}{2}x^2}dx - \int_0^2 \frac{2}{2+x-|x-1|}dx \\
&= \int_0^2 \frac{2}{1+2x-\frac{1}{2}x^2}dx - \int_0^1 \frac{2}{1+2x}dx - \int_1^2 \frac{2}{3}dx \\
&= \int_0^2 \frac{2}{1+2x-\frac{1}{2}x^2}dx - \ln 3 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left(\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}\right) - \ln 3 - \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = (-4t+1)e^{-2t}$$

a) Was ist das charakteristische Polynom P dieser DGL? (3 Pkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei 2.) (3 Pkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Pkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung u_p ? (4 Pkte)

e) Berechnen Sie u_p mit diesem Ansatz. (6 Pkte)

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. a),b) Es gilt $P(X) = X^3 + 4X^2 - 3X - 18 = (X-2)X^2 + 6X(X-2) + 9(X-2) = (X-2)(X+3)^2$, also sind 2 und 3 die Nullstellen von P.

c) Die Basislösungen sind $e^{2t}, e^{-3t}, te^{-3t}$.

d) Der Ansatz muss lauten $y_p(t) = (at+b)e^{-2t}$.

e) Wir berechnen $y_p' = e^{-2t}(a - 2b - 2at)$, $\quad y_p'' = e^{-2t}(-4a + 4b + 4at)$, $\quad y_p''' = e^{-2t}(12a - 8b - 8at)$ und setzen es in die DGL ein. Es folgt

$$12a - 8b - 8at + 4(-4a + 4b + 4at) - 3(a - 2b - 2at) - 18(at + b) = -4t + 1$$

also

$$-7a - 4b - 4at = -4t + 1$$

Es muss somit $a = 1, b = -2$ sein.

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$y(t) = Ae^{2t} + (Bt + C)e^{-3t} + (t-2)e^{-2t}$$

mit beliebigen Koeffizienten A, B und C.

Aufgabe 6 Es werde mit 2 nicht präparierten Würfeln 2-mal geworfen. Die Gesamtaugenzahl beim 1. Wurf sei X_1 und die beim 2. Wurf sei X_2. Man interessiert sich für die Verteilung der Differenz $X_2 - X_1$.

a) Was ist der Ergebnisraum Ω? (5 Pkte)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse, also alle $P(\{y\})$, wenn $y \in \Omega$, (8 Pkte)

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $|X_2 - X_1| \leq 4$? (7 Pkte)

Lösung. a) Es gilt

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x_2 - x_1 \mid x_1, x_2 \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}\} \\ &= \{-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \end{aligned}$$

b) Für die Augenzahl X_1 beim 1. Wurf gibt es 11 Möglichkeiten, ebenso für die Augenzahl X_2 beim 2. Wurf. Das sind 121 Möglichkeiten. Wie oft kommt jede der Zahlen aus Ω vor? Hier ist die Häufigkeitstabelle:

$X_2 - X_1$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Häufigkeit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 - X_1 = k)$ ist gerade die durch 121 dividierte Häufgkeit, dass $X_2 - X_1 = k$ ist. Also $P(X_2 - X_1 = k) = \dfrac{11-k}{121}$, wenn $k \geq 0$ und $P(X_2 - X_1 = k) = \dfrac{k+11}{121}$, für $k < 0$.

c) Es gilt

$$\begin{aligned} P(|X_2 - X_1| \leq 4) &= \sum_{k=-4}^{4} P(X_2 - X_1 = k) = \sum_{k=-4}^{-1} \frac{k+11}{121} + \sum_{k=0}^{4} \frac{11-k}{121} \\ &= \sum_{k=1}^{4} \frac{-k+11}{121} + \sum_{k=0}^{4} \frac{11-k}{121} = 2\sum_{k=1}^{4} \frac{-k+11}{121} + \frac{1}{11} = \frac{79}{121} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 Die Beleuchtungsstärke eines bestimmten Typs von Glühlampen sei normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 20000$ Lux und Standardabweichung σ.

a) Sei $\sigma = 850$ Lux. Angenommen, von einer Lieferung dieser Glühlampen seien nur solche mit Beleuchtungsstärke $\geq L$ zu gebrauchen. Wie groß ist das maximale L, bei dem höchstens 5 % der Glühlampen unbrauchbar sind? (10 Pkte)

b) Angenommen, es werde gewünscht, dass die Beleuchtungsstärke zwischen 18000 und 21000 Lux liege, und es sei $\sigma = 900$ Lux. Wie hoch ist der Ausschussanteil dann? (10 Pkte)

Lösung. a) Es gilt, die Gleichung $P(X \leq L) = 0,05$ zu lösen. Es ist aber auch

$$0,05 = P(X \leq L) = P(\frac{X - 20000}{850} \leq \frac{L - 20000}{850}) = \text{Erf}\,(\frac{L - 20000}{850})$$

Da nun Erf $(-1,645) = 0,05$, folgt $\dfrac{L - 20000}{850} = -1,645$, was auf

$$L = 20000 - 1,645 \cdot 850 = 18601$$

führt.

b) Die Wahrscheinlichkeit w, dass eine Lampe untauglich ist, ist dann aus

$$1-w = P(18000 \leq X \leq 21000) = P(\frac{-2000}{900} \leq \frac{X - 20000}{900} \leq \frac{1000}{900}) = \text{Erf}\,(\frac{10}{9}) - \text{Erf}\,(\frac{-20}{9}) = \text{Erf}\,(\frac{10}{9}) + \text{Erf}\,(\frac{20}{9}) - 1$$

zu berechnen. Es folgt

$$w = 2 - \text{Erf}\,(\frac{10}{9}) - \text{Erf}\,(\frac{20}{9} = 2 - 0,8438 - 0,9868 = 0,1562 + 0,0132 = 0,1694 \approx 16,9\%$$