Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **10.8.2015**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1a für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (10+10 Pkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3 - 2k) = \frac{n(n+1)(n^2+n-4)}{4}$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|7x-2| < |2x+7|$ erfüllen.

Hinweis: $53^2 = 2809$

Lösung. a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind beide Seiten der behaupteten Gleichung gleich -1.

Gilt die Summenformel für n, so haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(k^3 - 2k) &= \frac{n(n+1)(n^2+n-4)}{4} + (n+1)^3 - 2(n+1) \\
&= \frac{n+1}{4} \cdot \Big(n(n^2+n-4) + 4(n+1)^2 - 8\Big) \\
&= \frac{n+1}{4} \cdot (n^3 + n^2 - 4n + 4n^2 + 8n - 4) \\
&= \frac{n+1}{4} \cdot (n^3 + 5n^2 + 4n - 4)
\end{aligned}$$

Das soll gleich $\frac{n+1}{4}(n+2)((n+1)^2+n+1-4)$ werden. Wir müssen also n^3+5n^2+4n-4 mit $(n+2)((n+1)^2+n+1-4)$ vergleichen. Dazu rechnen wir nach, dass $(n+2)((n+1)^2+n+1-4) = (n+2)(n^2+3n-2) = n^3+3n^2-2n+2n^2+6n-4 = n^3+5n^2+4n-4$ gilt. Die Summenformel gilt auch für $n+1$.

b) Die Ungleichung ist mit jeder der folgenden Ungleichungen äquivalent:

$(7x-2)^2 < (2x+7)^2$

$49x^2 - 28x + 4 < 4x^2 + 28x + 49$

$45x^2 - 56x < 45$

$x^2 - \frac{56}{45}x < 1$

$(x - \frac{28}{45})^2 < 1 + (\frac{28}{45})^2 = \frac{2025+784}{45^2} = \frac{2809}{45^2} = (\frac{53}{45})^2$

$|x - \frac{28}{45}| < \frac{53}{45}$

$-\frac{53}{45} < x - \frac{28}{45} < \frac{53}{45}$

$-\frac{5}{9} < x < \frac{9}{5}$

Also ist $M = (-\frac{5}{9}, \frac{9}{5})$.

Aufgabe 2 (10+10 Pkte) a) Gegeben seien die Geraden G_1 durch $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $G_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Haben G_1 und G_2 einen Schnittpunkt?

b) Welchen Abstand hat $\vec{P} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ von G_2 ?

Lösung. a) Es gilt $G_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1-4 \\ 6-2 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Haben G_1 und G_2 einen gemeinsamen Punkt $\vec{p}$, so gilt mit passenden $s, t \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestehen, also müssen $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig sein. Stattdessen ist aber die Determinante $\det \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$. Also ist $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

b) Der gesuchte Abstand d ist

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left\| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{2}} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| / \sqrt{2} = \sqrt{\frac{243}{2}} = 9\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (10+5+5 Pkte)

a) Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 & 15 \\ t & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 24 & 26 & -13 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von $\mathcal{A}$ und die Dimension des Nullraumes $N_{\mathcal{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ in Abhängigkeit von t.

b) Sei $t = 4$ und $\vec{b} := \begin{pmatrix} -26 \\ -11 \\ 34 \end{pmatrix}$ und $\mathscr{L}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gilt dann $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$?

c) Gilt für $t = 4$ sogar $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$? Dazu betrachten Sie den Vektor $\vec{v} := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung. a) Wir vertauschen die Zeilen 1 und 3 und erhalten aus $\mathcal{A}$ die neue Matrix $\mathcal{A}' := \begin{pmatrix} 1 & 24 & 26 & -13 \\ t & 3 & 5 & 8 \\ 5 & -4 & -2 & 15 \end{pmatrix}$. Darin subtrahieren wir von der 2. Zeile das t-fache der ersten und von der 3.Zeile das 5-fache der ersten. Es entsteht $\mathcal{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 26 & -13 \\ 0 & 3-24t & 5-26t & 8+13t \\ 0 & -124 & -132 & 80 \end{pmatrix}$. Die letzte Zeile teilen wir durch 4 und erhalten $\mathcal{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 26 & -13 \\ 0 & 3-24t & 5-26t & 8+13t \\ 0 & -31 & -33 & 20 \end{pmatrix}$. Wir vertauschen hierin die Zeilen 2 und 3 und finden die Matrix $\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 26 & -13 \\ 0 & -31 & -33 & 20 \\ 0 & 3-24t & 5-26t & 8+13t \end{pmatrix}$. Wir addieren zur 3. Zeile das $\frac{3-24t}{31}$-fache der 2. Zeile und finden die neue Matrix

$$\mathcal{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 26 & -13 \\ 0 & -31 & -33 & 20 \\ 0 & 0 & 5-26t-33\cdot\frac{3-24t}{31} & 8+13t+20\cdot\frac{3-24t}{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 26 & -13 \\ 0 & -31 & -33 & 20 \\ 0 & 0 & \frac{56-14t}{31} & \frac{308-77t}{31} \end{pmatrix}$$

Für $t = 4$ ist die letzte Zeile 0, also Rang $(\mathcal{A}) = 2$, sonst haben wir Rang $(\mathcal{A}) = 3$.

b) Für $t = 4$ gilt $\mathcal{A} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -11 \\ 34 \end{pmatrix}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Also auch $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$.

c) Da $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0}$ und $\begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, ist $\vec{v} \in \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) \setminus \mathscr{L}_1$.

Aufgabe 4 (10 + 10 Pkte)

a) Es sei $(x_n)_n$ die durch $x_n := \dfrac{3n^3 + 10n^2 - 8n - 6}{n^2 + 3n - 3} - \dfrac{3n^3 - n^2 + 2n - 2}{n^2 + 1}$ definierte Folge. Hat $(x_n)_n$ einen Grenzwert?

b) Für die auf $[0, \infty)$ definierte Funktion $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 3x + 3}$ bestimmen Sie die Wertemenge

$$W := \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \geq 0\}$$

und die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \longrightarrow [0, \infty)$.

Lösung. a) Es gilt $x_n = y_n - z_n$, mit $y_n = \frac{3n^3+10n^2-8n-6}{n^2+3n-3}$, $z_n = \frac{3n^3-n^2+2n-2}{n^2+1}$. Nun ist aber

$$y_n = 3n + \frac{n^2 + n - 6}{n^2 + 3n - 3}, \qquad z_n = 3n - \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 1},$$

also

$$x_n = \frac{n^2 + n - 6}{n^2 + 3n - 3} + \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 1} \longrightarrow 2$$

mit $n \to \infty$.

b) Es gilt $f(x) = \dfrac{3}{(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}}$, woraus wir erkennen können, dass f auf $[0, \infty)$ monoton fällt. Da $f(0) = 1$ und $f(x) \longrightarrow 0$ mit $x \to \infty$, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $W = (0, 1]$ sein muss.

Für $y \in (0, 1]$ muss die Gleichung $f(x) = y$ nach x aufgelöst werden. Also $(x + \dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{y}$. Das ergibt uns $x = -\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{3}{y} - \dfrac{3}{4}}$. Soll $x \geq 0$ sein, muss das +- Zeichen genommen werden, also

$$f^{-1}(y) = x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{y} - \frac{3}{4}}.$$

Aufgabe 5

Es sei $f(x) = (x^2 - 2x + 64)e^{-x/8}$.

a) Berechnen Sie f'. (Zur Orientierung: $f'(x) = -\frac{1}{8}(x^2 - 18x + 80)e^{-x/8}$). (6 Punkte)

b) An welchen Stellen hat f lokale Extrema? (5 Punkte)

c) Sind diese sogar absolute Extrema? (4 Punkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f bei $(2, f(2))$. (5 Punkte)

Lösung. a) Mit Produktregel folgt

$$f'(x) = \Big((2x-2) - \frac{1}{8}(x^2-2x+64)\Big)e^{-x/8} = -\frac{1}{8}\Big(-16x+16+x^2-2x+64\Big)e^{-x/8} = -\frac{1}{8}(x^2-18x+80)e^{-x/8}$$

b) Da $x^2 - 18x + 80 = (x-8)(x-10)$ hat f' Nullstellen bei $x_1 = 8$ und $x_2 = 10$. Aber $f'(x) < 0$ links von x_1 und rechts von x_2 und weiter $f'(x) > 0$ auf (x_1, x_2), hat f ein lokales Minimum bei x_1 und ein lokales Maximum bei x_2.

c) Da $f(x) \longrightarrow \infty$ mit $x \to -\infty$ und $f(x) \longrightarrow 0$, wenn $x \to \infty$ sind x_1 und x_2 keine absoluten Extrema.

d) Es ist $T(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = 64e^{-1/4} - 6e^{-1/4}(x-2)$.