Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **2.9.2014**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x + 4e} dx$.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \frac{5x^2 - 8x + 8}{x^2(x^2 - x + 2)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von R?

(9 Pkte)

c) Berechnen Sie das Integral $I = \int_2^3 \left(-\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{2x-1}{x^2 - x + 2} \right) dx$.

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Sei $f(t) = \frac{t}{t + 4e} = 1 - \frac{4e}{t + 4e}$. Dann ist $\frac{e^{2x}}{e^x+4e} = f(e^x)e^x$, und es folgt mit der Substitutionsregel

$$I = \int_1^2 f(e^x)e^x dx = \int_e^{e^2} f(t)dt = e^2 - e - 4e\ln \frac{e^2 + 4e}{e + 4e} = e^2 - e - 4e\ln{(4 + e/5)}$$

b) Da $x^2 - x + 2$ keine reellen Nullstellen hat, muss der Ansatz lauten

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 2}$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned} 5x^2 - 8x + 8 &= x^2(x^2 - x + 2)R(x) \\ &= Ax(x^2 - x + 2) + B(x^2 - x + 2) + x^2(Cx + D) \\ &= (A + C)x^3 + (-A + B + D)x^2 + (2A - B)x + 2B \end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$B = 4; \qquad A = -2, \qquad C = 2, \qquad D = -1$$

Also wird

$$R(x) = -\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2}$$

c)

$$I = -2\ln{(3/2)} + 2 - \frac{4}{3} + \ln{(x^2 - x + 2)}\Big|_2^3 = 2/3 - 2\ln{(3/2)} + \ln 2$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[0,1]$ definierte Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t) = t(1-t)^2$ und $y(t) = t^2 x(t)$.

a) Berechnen Sie α'. (Zur Orientierung $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} (t-1)(3t-1) \\ (t-1)t^2(5t-3) \end{pmatrix}$) (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale an α im Punkte $\alpha(1/4)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt der von α umschlossenen Fläche. (6 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$x'(t) = (1-t)^2 - 2t(1-t) = (1-t)(1-3t)$$

und

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2tx(t) + t^2 x'(t) \\ &= 2t^2(1-t)^2 + t^2(1-t)(1-3t) = t^2(1-t)(2(1-t)+1-3t) \\ &= t^2(1-t)(3-5t). \end{aligned}$$

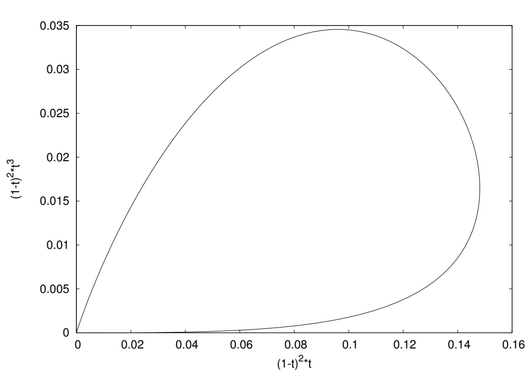
b) Wir haben $x'(t) = 0$ nur, wenn $t = 1$ oder $t = 1/3$. Da auch $y'(1) = 0$, ist α bei $t = 1$ nicht regulär. Wegen $y'(1/3) \neq 0$, ist α bei $t = 1/3$ regulär. Insgesamt sehen wir, dass auf $[0,1)$ die Kurve α regulär ist.

c) Zunächst ist $\alpha(1/4) = \frac{9}{64}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/16 \end{pmatrix}$. Weiter ist $\alpha'(1/4) = \frac{3}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 7/16 \end{pmatrix}$. Die gesuchte Normale ist dann $\mathcal{N} = \frac{9}{64}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/16 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -7/16 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Die Kurve umschließt eine Fläche mit Inhalt A. Es gilt

$$\begin{aligned} 2A &= \Big|\int_0^1 \det(\alpha(t),\ \alpha'(t))dt\Big| \\ &= \int_0^1 (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,dt = \Big|\int_0^1 x(t)\left(2tx(t) + t^2x'(t) - t^2x'(t)x(t)\right)dt\Big| \\ &= 2\int_0^1 tx(t)^2 dt = 2\int_0^1 t^3(1-t)^4 dt = 2\int_0^1 s^4(1-s)^3 ds, \quad \text{Subst. } s := 1-t \\ &= 2\int_0^1 s^4(1-3s+3s^2-s^3)ds = 2\Big(\int_0^1 s^4 ds - 3\int_0^1 s^5 ds + 3\int_0^1 s^6 ds - \int_0^1 s^7 ds\Big) \\ &= 2(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{7} - \frac{1}{8}) = 2(-\frac{3}{10} + \frac{17}{56}) = \frac{1}{140} \end{aligned}$$

Also ist $A = \dfrac{1}{280}$. Hier ist das Bild der Kurve α:



Aufgabe 3 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big((2s-1)\sin(\pi t),\ (t^2-st)\cos(\pi t/2)\Big)$ und $f(x,y) := x(xy-y^2)$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (10 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $h_s(1/2,1/2)$. (4 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $f(x,y) = x^2y - xy^2$, also $f_x = 2xy - y^2$, $f_y = x^2 - 2xy$, womit gezeigt ist, dass $\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy-y^2 \\ x^2-2xy \end{pmatrix}$.

b) Wir haben $\vec{g}(t,s) = \begin{pmatrix} (2s-1)\sin(\pi t) \\ (t^2-st)\cos(\pi t/2) \end{pmatrix}$, also folgt

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} \pi(2s-1)\cos(\pi t) & 2\sin(\pi t) \\ (2t-s)\cos(\pi t/2) - \frac{\pi}{2}(t^2-st)\sin(\pi t/2) & -t\cos(\pi t/2) \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $\vec{x}_0 := \vec{g}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \vec{0}$.

Mit der Kettenregel folgt nun

$$h_s(1/2,1/2) = \Big(f_x, f_y\Big) \cdot J_{\vec{g}}(1/2,1/2) \cdot \vec{e}_2 = 0$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = 0$ und $x = 2$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := x(3-x)$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x$ berandet wird.

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

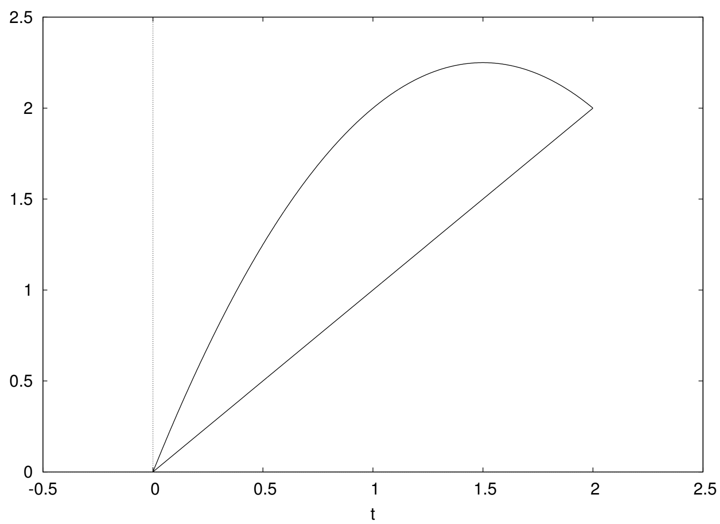
b) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_G \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(15 Punkte)

Lösung. a) Hier ist das Gebiet G:



b) Es gilt

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \sqrt{x} \left(\int_x^{x(3-x)} \frac{dy}{\sqrt{x+y}} \right) dx \\
&= 2 \int_0^2 \sqrt{x} \left(\sqrt{x+y}\Big|_x^{x(3-x)} \right) dx \\
&= 2 \int_0^2 \sqrt{x} \left(\sqrt{4x-x^2} - \sqrt{2x} \right) dx \\
&= 2 \int_0^2 \left(x\sqrt{4-x} - \sqrt{2}\, x \right) dx \\
&= 2 \int_2^4 \left(4\sqrt{u} - u^{3/2} \right) du - 4\sqrt{2}, \qquad u := 4-x \\
&= 2 \left(\frac{8}{3}(4^{3/2} - 2^{3/2}) - \frac{2}{5}(4^{5/2} - 2^{5/2}) \right) - 4\sqrt{2} \\
&= 2 \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5} + (\frac{8}{5} - \frac{16}{3})\sqrt{2} \right) - 4\sqrt{2} = 2 \left(\frac{128}{15} - \frac{56}{15}\sqrt{2} \right) - 4\sqrt{2} = \frac{256 - 172\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = te^{-t}$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei 1.

Lösung. Das charakteristische Polynom ist $P(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-2)^2(X-1)$.

Also hat die homogene DGL die Basislösungen e^{2t}, te^{2t} und e^t, so dass die homogene DGL die allgemeine Lösung

$$y_{\mathrm{hom}}(t) = (A + Bt)e^{2t} + Ce^t$$

mit Konstanten $A, B, C \in \mathbb{R}$ hat. Gesucht ist nun noch eine partikuläre Lösung. Wir probieren $y_p(t) := (at+b)e^{-t}$ und setzen ein:

$$y_p'(t) = (a - b - at)e^{-t}, \qquad y_p''(t) = (-a - (a - b - at))e^{-t} = (b - 2a + at)e^{-t}$$

und

$$y_p'''(t) = (a - (b - 2a + at))e^{-t} = (3a - b - at)e^{-t}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} y_p''' - 5y_p'' + 8y_p{}' - 4y_p &= (3a - b - at - 5(b - 2a + at) + 8(a - b - at) - 4(at + b))e^{-t} \\ &= (-18at + 21a - 18b)e^{-t} \end{aligned}$$

Wir wählen also $a = -\frac{1}{18}$ und $b = -\frac{7}{108}$. Die allgemeine Lösung lautet jetzt

$$y(t) = -\frac{6t+7}{108}e^{-t} + (A + Bt)e^{2t} + Ce^t$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Eine Zufallsgröße X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) := c(1+x)e^{-x}$, für $-1 \leq x \leq 1$ und $f(x) = 0$, für $x \notin [-1, 1]$.

a) Wie muss man c wählen, damit $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$ wird?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathscr{E}(X)$ von X.

Lösung. a) Es muss $c\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$ werden. Nun ist aber

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (1+x)e^{-x}dx = -(1+x)e^{-x}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}dx = (-(1+x)e^{-x} - e^{-x})\Big|_{-1}^{1} = e - 3e^{-1}$$

Also wählen wir $c = \dfrac{1}{e - 3e^{-1}}$.

b) Wir rechnen aus:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(X) &= c\int_{-1}^{1} xf(x)dx = c\int_{-1}^{1} x(1+x)e^{-x}dx \\
&= c\left(\int_{-1}^{1} xe^{-x}dx + \int_{-1}^{1} x^2e^{-x}dx\right) \\
&= c\left(\int_{-1}^{1} xe^{-x}dx - x^2e^{-x}\Big|_{-1}^{1} + 2\int_{-1}^{1} xe^{-x}dx\right) \\
&= 3c\int_{-1}^{1} xe^{-x}dx + c(e - e^{-1}) \\
&= 3c\left(-xe^{-x}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}dx\right) + c(e - e^{-1}) \\
&= 3c(-e - e^{-1} + e - e^{-1}) + c(e - e^{-1}) = c(e - 7e^{-1})
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Eine Maschine produziert Stangen, deren Längen 800mm betragen soll. Man hat festgestellt, dass die Länge normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 800$mm und Streuung $\sigma = 5$ ist.

a) Wie hoch ist der Ausschuss, wenn man nur Stangen gebrauchen kann, deren Länge um höchstens 7mm von der gewünschten Länge abweicht?

b) Wie hoch darf die Streuung höchstens sein, wenn der Ausschuss nicht mehr als 3 % betragen soll?

Lösung. a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$$1-P(|X-800| \leq 7) = 1-P(793 \leq X \leq 807) = 1-P(-\frac{7}{5} \leq \frac{X-800}{5} \leq \frac{7}{5}) = 1-(\mathrm{Erf}\,(1,4)-\mathrm{Erf}\,(-1,4)) = 2(1-\mathrm{Erf}\,(1,4)) = 2\cdot($$

Das sind 18 % .

b) Die Streuung σ muss $P(|X-800| \geq 7) \leq 0,03$ erfüllen. Es gilt

$$0,97 \leq 1 - P(|X-800| \geq 7) = P(|X-800| \leq 7) = P(\frac{|X-800|}{\sigma} \leq \frac{7}{\sigma}) = 2\mathrm{Erf}\,(7/\sigma) - 1$$

Das führt auf $\mathrm{Erf}\,(7/\sigma) \geq 1,97/2 = 0,985 = \mathrm{Erf}\,(2,17)$, also auf $7/\sigma = 2,17$, somit $\sigma = 3,22mm$