Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **11.8.2014**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{81k}{10^k} = 10 - \frac{9n+10}{10^n}$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|2x+3| < |x+4|$ erfüllen.

(10+10 Punkte)

Lösung. a) Induktionsanfang $n = 1$. Beide Seiten sind gleich $\frac{81}{10}$.

Angenommen, die Gleichung gelte für n. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{81k}{10^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{81k}{10^k} + \frac{81(n+1)}{10^{n+1}} \\
&= 10 - \frac{9n+10}{10^n} + \frac{81(n+1)}{10^{n+1}} \\
&= 10 - \frac{90n+100-81(n+1)}{10^{n+1}} = 10 - \frac{9n+19}{10^{n+1}} = 10 - \frac{9(n+1)+10}{10^{n+1}}
\end{aligned}$$

b) Genau dann ist $x \in M$, wenn $(2x+3)^2 < (x+4)^2$, also $3x^2 + 4x - 7 < 0$. Sind x_1 und x_2 die Lösungen zur Gleichung $3x^2 + 4x - 7 = 0$ und $x_1 < x_2$, so wird $M = (x_1, x_2)$. Aber die Lösungen der genannten quadratischen Gleichung lauten $x_1 = -7/3$ und $x_2 = 1$. Also ist $M = (-7/3,\ 1)$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck $\mathcal{D}$ mit Ecken bei $\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $\vec{D}$ teile die Seite $\overline{BC}$ von $\vec{B}$ aus im Verhältnis $3 : 1$. Weiter sei $\vec{M}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$.

a) Berechnen Sie $\vec{M}$ und $\vec{D}$ (3+5 Punkte)

b) Welchen Abstand hat $\vec{C}$ von der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$? (8 Punkte)

c) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck? (4 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{C}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$ und $\vec{M} = \vec{B} + \frac{3}{4}(\vec{C} - \vec{B}) = \frac{1}{4}(\vec{B} + 3\vec{C}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 23 \\ 11 \end{pmatrix}$.

b) Der gesuchte Abstand ist

$$d = \frac{\left|\det(\vec{C} - \vec{A},\, \vec{B} - \vec{A})\right|}{\|\vec{B} - \vec{A}\|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\right|}{\|\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}\|} = \frac{39}{\sqrt{65}} = 3\sqrt{\frac{13}{5}}$$

c) Der Flächeninhalt von $\mathcal{D}$ ist $F = \dfrac{1}{2}\|\vec{B} - \vec{A}\| \cdot d = \dfrac{39}{2}$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 28 & 28 & 24 & -8 \\ -3 & -5 & -2 & 1 \\ -5 & -13 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -16 \\ t \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Welchen Rang hat $\mathcal{A}$? Für welches t ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ nicht-leer? (zur Orientierung $t = 0$).

b) Berechnen Sie für $t = 0$ Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Welche Dimension hat der Nullraum $N_{\mathcal{A}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$? Weisen Sie nach, dass

$$N_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(10+4+1+5 Pkte)

Lösung. a) In der erweiterten Matrix $(\mathcal{A}\,|\,\vec{b})$ addieren wir zur 1. Zeile das 9-fache der 2. Zeile und finden die neue Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -17 & 6 & 1 & -16+9t \\ -3 & -5 & -2 & 1 & t \\ -5 & -13 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Dann addieren wir zur 2. das 3-fache und zur 3. das 5-fach der 1. Zeile. Es entsteht die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -17 & 6 & 1 & -16+9t \\ 0 & -56 & 16 & 4 & 28t-48 \\ 0 & -98 & -28 & 7 & 45t-84 \end{array}\right)$$

Nun subtrahieren wir noch das 7/4-fache der 2. Zeile von der 3. Zeile und gelangen zu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -17 & 6 & 1 & -16+9t \\ 0 & -56 & 16 & 4 & 28t-48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4t \end{array}\right)$$

So folgt: Genau dann ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) \neq \emptyset$, wenn $t = 0$.

Für das Weitere teilen wir die 2. Zeile durch 4 und erhalten die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -17 & 6 & 1 & -16+9t \\ 0 & -14 & 4 & 1 & 7t-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4t \end{array}\right)$$

b) Sei jetzt $t = 0$. Dann muss das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -17 & 6 & 1 \\ 0 & -14 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

gelöst werden. Das führt auf die Gleichungen

$$a - 17b + 2 = -16, \qquad -14b + 2 = -12,$$

also $b = 1, a = -1$.

c) Der Rang der Matrix $\mathcal{A}$ ist 2, also die Dimension von $N_{\mathcal{A}} = 4 - 2 = 2$. Der Unterraum $V := \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat die Dimension 2, da $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Nun sind aber $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in N_{\mathcal{A}}$, also auch $V \subset N_{\mathcal{A}}$. Da beide dieselbe Dimension haben, ist $V = N_{\mathcal{A}}$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die Folge $(x_n)_n$ mit

$$x_n = \frac{25n^2 - 15n - 1}{5n + 7} - \frac{5n^4 + 15n^3 + 5n + 5}{n^3 + 5n^2}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_n mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2\sin(\frac{1}{3}x + \frac{2\pi}{3})$. Klären Sie folgende Fragen:

(i) Welche Periode hat f?

(ii) Welche Nullstellen hat f innerhalb einer Periode?

(iii) Wo hat f innerhalb einer Periode seinen größten, wo seinen kleinsten Wert?

(iv) Skizzieren Sie den Graphen von f über einer Periode. (10+1+2+3+4 Pkte)

Lösung. a) Es gilt

$$\frac{25n^2 - 15n - 1}{5n + 7} = 5n - 10 + \frac{69}{5n + 7}, \qquad \frac{5n^4 + 15n^3 + 5n + 5}{n^3 + 5n^2} = 5n - 10 + \frac{50n^2 + 5n + 5}{n^3 + 5n^2}$$

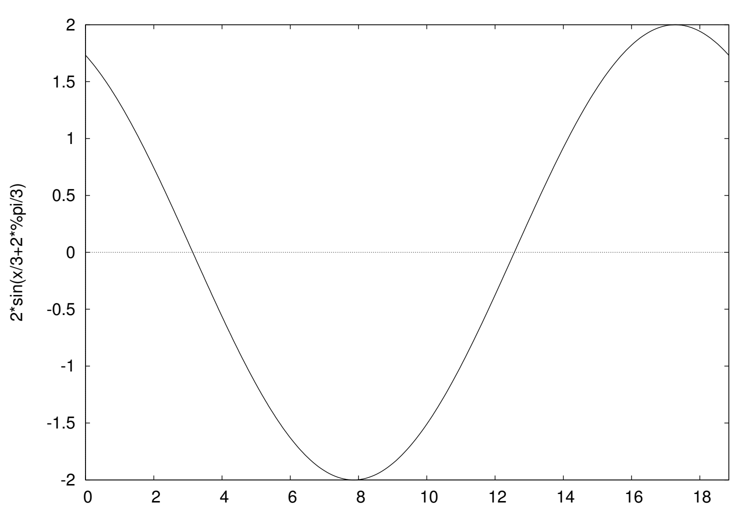
Also folgt $x_n = \dfrac{69}{5n + 7} - \dfrac{50n^2 + 5n + 5}{n^3 + 5n^2} \longrightarrow 0$, wenn $n \to \infty$.

b) (i) Die Funktion $f(x) = 2\sin(\frac{1}{3}x + \frac{2\pi}{3})$ hat die Periode 6π.

(ii) Ihre Nullstellen liegen dort, wo $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2\pi}{3} \in \{\pi, 2\pi\}$, also bei $x_1 = \pi$ und $x_2 = 4\pi$.

(iii) Der größte Wert wird von f dort angenommen, wo $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5}{2}\pi$, also bei $x_3 = \frac{11}{2}\pi$ und der kleinste Wert dort, wo $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3}{2}\pi$, also bei $x_4 = \frac{5}{2}\pi$.

(iv) Der Graph von f sieht so aus:



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{xe^{6x}}{x+2}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? (8 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (5 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 2$. (4 Pkte)

Lösung. a) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(e^{6x} + 6xe^{6x})(x+2) - xe^{6x}}{(x+2)^2} \\
&= e^{6x}\frac{(6x+1)(x+2) - x}{(x+2)^2} \\
&= 6e^{6x}\frac{x^2 + 2x + \frac{1}{3}}{(x+2)^2}
\end{aligned}$$

c) Genau dann ist $f'(x) = 0$, wenn $x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$, also $x = x_1 = -1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$ oder $x = x_2 = -1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$ gilt. Links von x_1 und rechts von x_2 ist $f' > 0$, zwischen x_1 und x_2 gilt $f' < 0$. Also hat f bei x_1 ein lokales Maximum und bei x_2 ein lokales Minimum.

d) Die Funktionsgleichung für Tangente lautet

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = \frac{1}{4}e^{12}\left(\frac{25}{2}x - 23\right)$$