Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **3.9.2013**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral

$$I := \int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

(4 Pkte)

b) Sei $R(x) = \dfrac{3x^3 - x^2 + 4x - 8}{x^2(x^2+4)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von R?

(5 Pkte)

c) Berechnen Sie $\int_2^{2\sqrt{3}} R(x)dx$.

(10 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Es gilt $\Big(\arcsin(x)\Big)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, also folgt mit Substutionsregel

$$I = \int_0^{1/2} \arcsin(x) \cdot \Big(\arcsin(x)\Big)' dx = \frac{1}{2}\Big(\arcsin(x)\Big)^2\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi^2}{72}$$

b) Der Ansatz für die Partialbruchdarstellung muss lauten:

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \\
&= \frac{Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4)} \\
&= \frac{Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2+4)} \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 4Ax + 4B}{x^2(x^2+4)}
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich der Zählerpolynome folgt

$$A + C = 3, \qquad B + D = -1, \qquad 4A = 4, \qquad 4B = -8$$

Also ist $A = 1,\ B = -2,\ C = 2,\ D = 1$ und damit

$$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+4}$$

c) Gliedweise Integrieren ergibt uns

$$\begin{aligned}\int_2^{2\sqrt{3}} R(x)dx &= \Big(\ln x + \frac{2}{x} + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\frac{x}{2})\Big)\Big|_2^{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \ln 2 + \frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei die auf $[0, 2\pi)$ in Polarkoordinaten definierte Kurve $\alpha(t) = r(t)\vec{e}(t)$, wobei $\vec{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $r(t) = 1 + \sin^2 t + \cos t$.

a) Berechnen Sie α'. Wo ist α regulär? (6 +2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve α an der Stelle $\alpha(\pi/3)$.

(4 Punkte)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt A der von der Kurve α berandeten Fläche.

(8 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= r'(t)\vec{e}(t) + r(t)\vec{e}_\perp(t) \\ &= (2\sin t\, \cos t - \sin t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1 + \sin^2 t + \cos t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es gilt $r(t) = 0$ genau dann, wenn $\sin t = 0, \cos t = -1$, also genau bei $t = \pi$. Dort ist auch $r'(t) = 2\cos(\pi)\sin\pi - \sin\pi = 0$, also ist α in den Punkten $t \neq \pi$ regulär und in $t = \pi$ nicht regulär. Diepenbrock b) Es gilt

$$\alpha\,'(\pi/3) = (\sin(\frac{2\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3})\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + (1 + \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3})\begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{9}{8}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$T_{\alpha,\pi/3} = \alpha(\pi/3) + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{9}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}2A &= \int_0^{2\pi} r(t)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t + \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin^2 t + \sin^4 t + \cos^2 t + 2\cos t + 2\sin^2 t\, \cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin^2 t + \sin^4 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} \Big(2 + \sin^2 t + \sin^4 t\Big)dt\end{aligned}$$

denn $1 + 2\sin^2 t + \cos^2 t = 2 + \sin^2 t$. Nun ist aber $\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$ und $\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt = \frac{3}{4}\pi$. Somit wird $A = \frac{23}{8}\pi$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big(t\,\sin s - s\,\cos t,\ 3\sin(2t - s) - \cos t\Big)$ und $f(x,y) := ye^{5\sin(2x) - y}$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Punkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $h_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$. (10 Punkte)

Lösung. Zu a) Es gilt

$$\nabla f = e^{5\sin(2x)-y} \begin{pmatrix} 10y\cos(2x) \\ 1-y \end{pmatrix}$$

Zu b) Es gilt

$$J_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} \sin s + s \sin t & t\cos s - \cos t \\ 6\cos(2t-s) + \sin t & -3\cos(2t-s) \end{pmatrix}$$

Zu c) Die Kettenregel sagt, dass, wenn wir setzen $(x_0, y_0) := \vec{g}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$, dann

$$h_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = f_x(x_0,y_0)(g_1)_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) + f_y(x_0,y_0)(g_2)_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$$

gilt.

Nun ist aber $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{12}, \frac{5}{2})$ und somit

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{25}{2}\sqrt{3} \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Weiter ist

$$J_{\vec{g}}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Setzen wir das in die Kettenregel ein, folgt

$$h_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \left(\frac{25}{2}\sqrt{3}(\frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12}) - \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{11}{2}\sqrt{3} + \frac{25}{8}\pi$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Es sei G das Gebiet

$$G := \{(x,y) \mid x, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$$

a) Skizzieren Sie das Gebiet G.

(Hinweis: Wie verhält sich die Ableitung von $(1-\sqrt{x})^2$ bei $x=0$ und $x=1$?)

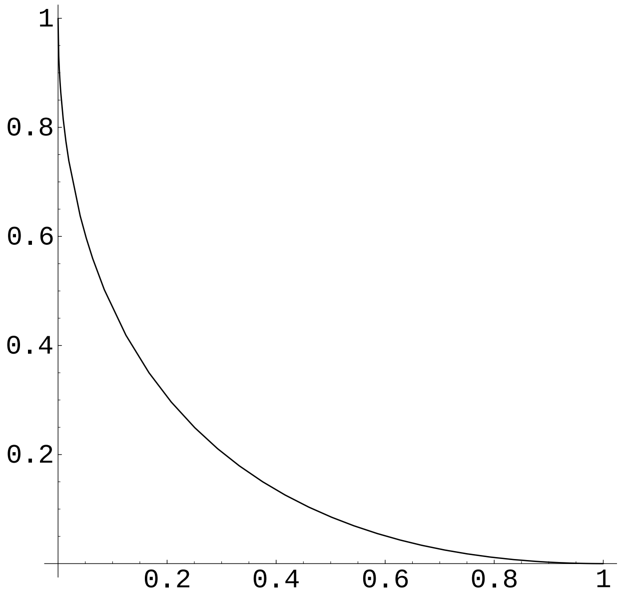
(5 Pkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint_G \frac{1}{(4\sqrt{x}+y)^2} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges. (15 Pkte)

Lösung. a) Das Gebiet G hat die folgende Gestalt:



b) Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \frac{1}{(4\sqrt{x}+y)^2} dy \right) dx \\
&= -\int_0^1 \left(\frac{1}{4\sqrt{x}+y} \Big|_{y=0}^{(1-\sqrt{x})^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{x}+(1-\sqrt{x})^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{4\sqrt{x}(4\sqrt{x}+(1-\sqrt{x})^2)} dx = \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^2 du = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{4}{1+u} + \frac{4}{(1+u)^2} \right) du \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - 4\ln 2 - \frac{4}{1+u} \Big|_0^1 \right) = \frac{3}{2} - 2\ln 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$4y''' - 19y'' + 28y' - 12y = e^{3t/4}$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei 2.

Lösung. Mit dem Hornerschema erhalten wir wir das charakteristische Polynom P, die Zerlegung

$$P = (4X-3)(X-2)^2$$

Somit werden die Lösungen der homogenen DGL durch

$$y_{\text{hom}}(t) = Ae^{3t/4} + (B + Ct)e^{2t}$$

gegeben, wobei A, B und C beliebige reelle Koeffizienten sind.

Für die partikuläre Lösung versuchen wir

$$u_{\text{part}}(t) = ate^{3t/4}$$

Da $3/4$ eine einfache Nullstelle für P ist, können wir $a = \frac{1}{P'(3/4)} = \frac{4}{25}$ nehmen. Also ist die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y(t) = \frac{4}{25}te^{3t/4} + Ae^{3t/4} + (B + Ct)e^{2t}$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)
Die Verlustleistung an einem elektrischen Widerstand ist gegeben durch $W = cU^2$, wobei U die Spannung bedeutet und $c > 0$ eine Konstante ist. Für $r = 4$ berechnen Sie

a) den Erwartungswert $\mathscr{E}(W)$ und

b) die Wahrscheinlichkeit $P(W > 361)$,

wenn U normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu = 8$ und Streuung $\sigma = 2$.

c) Eine Abfüllmaschine füllt ein Getränk in Dosen. Die Abfüllmenge X sei normalverteilt mit Streuung $\sigma = 8$ Gramm. Wie muss der Mittelwert μ gewählt werden, wenn höchsten 5% der Dosen weniger als 250 Gramm enthalten sollen?

Lösung. a) Es gilt

$$\mathscr{E}(W) = 4\mathscr{E}(U^2) = 4(\ \mathscr{V}(U) + \mathscr{E}(U)^2\ ) = 4(\ 4 + 64\ ) = 272$$

b) Es ist

$$P(W > 361) = P(U^2 > 90.25) = P(U > 9.5) = P(\frac{U-8}{2} > 0.75) = 1 - \text{ Erf}\,(0.75) = 1 - 0,773 = 0,227$$

c) Es soll $w := P(X < 250) \leq 0.05$ werden, nun ist aber $w = P(\frac{X-\mu}{8} < \frac{250-\mu}{8}) = \text{Erf}\ (\frac{250-\mu}{8}) \leq 0.05$, somit wegen $\text{Erf}\ (-1,645) = 0.05$ weiter

$$\frac{250-\mu}{8} = -1,645$$

also $\mu = 263,16$.

Aufgabe 7 (20 Punkte)
In einer Stadt sei der jährliche Niederschlag (in ℓ/m^2) eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu = 234\,\ell/m^2$ und Standardabweichung $\sigma = 25\,\ell/m^2$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Summe der Niederschläge, welche in den beiden Jahren 2013 und 2014 niedergehen, oberhalb $500\,\ell/m^2$?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Niederschlag 2014 um $40\,\ell/m^2$ über dem des Jahres 2013?

(Dabei können die Niederschlagsmengen als stochastisch unabhängig angesehen werden).

Lösung. a) Mit X bzw. Y bezeichnen wir die Niederschlagsmengen der Jahre 2013 und 2014. Dann ist $X + Y$ normalverteilt mit Parametern $\overline{\mu} = 468$ und Streuung $\overline{\sigma} = 25\sqrt{2}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $p_0 := P(X + Y \geq 500)$. Setzen wir $Z := \frac{X+Y-468}{25\sqrt{2}}$, so ist Z nach $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt. Also

$$p_0 = P(Z \geq \frac{500-468}{25\sqrt{2}}) = P(Z \geq \frac{16}{25}\sqrt{2}) = 1 - \text{Erf}\,(\frac{16}{25}\sqrt{2}) = 0.183$$

b) Nun ist $Y - X$ normalverteilt mit Parametern $\overline{\mu} = 0$ und Streuung $\overline{\sigma} = 25\sqrt{2}$. Also berechnen wir

$$P(Y - X \geq 40) = P(\frac{Y-X}{25\sqrt{2}} \geq \frac{40}{25\sqrt{2}}) = 1 - \text{Erf}\,(0.8\sqrt{2}) = 0.129$$