Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **12.8.2013**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1a für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Es sei $a_k := 1 + \frac{3}{3k+4}$ und $p_n := a_1 \cdot ... \cdot a_n$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$p_n = 1 + \frac{3n}{7}\,.$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|3x+5| < |2x-1|$ erfüllen.

(9+11 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $p_1 = a_1 = 1 + \frac{3}{7}$, wie gewünscht.

Angenommen, es gelte $p_n = 1 + \frac{3n}{7}$. Dann ist

$$p_{n+1} = p_n \cdot a_{n+1} = (1+\frac{3n}{7})(1+\frac{3}{3n+7}) = \frac{3n+7}{7}\cdot\frac{3n+10}{3n+7} = \frac{3n+10}{7} = 1 + \frac{3(n+1)}{7}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid |3x+5| < |2x-1|\} \\ &= \{x \mid (3x+5)^2 < (2x-1)^2\} \\ &= \{x \mid 9x^2+30x+25 < 4x^2-4x+1\} \\ &= \{x \mid 5x^2+34x < -24\} \\ &= \{x \mid x^2 + \frac{34}{5}x < -\frac{24}{5}\} \\ &= \{x \mid (x+\frac{17}{5})^2 < \frac{289}{25} - \frac{24}{5} = \frac{169}{25}\} \\ &= \{x \mid |x+\frac{17}{5}| < \frac{13}{5}\} \\ &= (-6,\ -\frac{4}{5}\,) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei ein Viereck, dessen Ecken durch die Ortsvektoren $\vec{A} = \vec{0}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ gegeben sind.

a) Welchen Flächeninhalt hat das Viereck?

(8 Punkte)

b) Welchen Abstand hat $\vec{C}$ von der Geraden durch $\vec{B}$ und $\vec{D}$? (8 Punkte)

c) Schneidet die Gerade $G_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gerade G_2 durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

(4 Punkte)

Lösung. a) Der gesuchte Flächeninhalt ist

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\left|\det(\vec{B}, \vec{C})\right| + \frac{1}{2}\left|\det(\vec{D}, \vec{C})\right| \\ &= 3 + \frac{33}{2} = 19,5 \end{aligned}$$

b) Die Gerade durch $\vec{B}$ und $\vec{D}$ ist $G = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also der Abstand von $\vec{C}$ zu G gerade

$$d = \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \sqrt{5}$$

c) Zunächst ist $G_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir berechnen die Determinante

$$d_1 := \begin{vmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ -1-1 & -1 & 0 \\ 0-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Da $d_1 \neq 0$, haben G_1 und G_2 keinen Schnittpunkt.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -17 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ t \end{pmatrix}$.

a) Für welches t ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ nicht-leer? (Zur Orientierung $t = 4$)

b) Berechnen Sie für dieses t Zahlen $u, v \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Berechnen Sie für dieses t den Lösungsraum $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ (8+4+8 Pkte)

Lösung. a) In der erweiterten Matrix $(\mathcal{A} \,|\, \vec{b}\,)$ vertauschenen wir die ersten beiden Zeilen. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 1 & 3 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 28 \\ 4 & -17 & -1 & 3 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 28 \\ 2 & -5 & 1 & 3 & 20 \\ 4 & -17 & -1 & 3 & t \end{array}\right)$$

Von der 2. Zeile subtrahieren wir 2-mal die 1. Zeile und von der 3. Zeile 4-mal die 1. Zeile. es entsteht

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 28 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & -36 \\ 0 & -21 & -9 & -9 & t - 112 \end{array}\right)$$

Von der 3. Zeile subtrahieren wir das 3-fache der 2. Zeile und finden

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 28 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t - 112 + 108 \end{array}\right)$$

Somit ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ genau dann nicht-leer, wenn $t = 4$ gewählt wird.

b) Die gesuchten u, v müssen

$$u + 3v = 28, \quad -3v = -36$$

lösen, also ist $u = -8, v = 12$.

c) Wir müssen nur noch $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ berechnen. Genau dann ist $\vec{x} \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$, wenn

$$x_1 + x_2 = -2x_3 - 3x_4, \;\; 7x_2 = -3x_3 - 3x_4$$

Das führt auf

$$x_2 = -\frac{1}{7}(3x_3 + 3x_4)$$

und

$$x_1 = \frac{1}{7}(3x_3 + 3x_4) - 2x_3 - 3x_4 = -\frac{11}{7}x_3 - \frac{18}{7}x_4$$

und damit

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -11/7 \\ -3/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -18/7 \\ -3/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Gegeben sei die Folge

$$x_n = \frac{4n^3+n^2+6}{2(n+1)(n+3)} - \frac{(3n^2+1)(2n-1)}{3n^2+5}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_n mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) := \frac{2x}{x^2+3}$. Finden Sie ein Intervall $I = [a,b]$, so dass $f : [0,1] \longrightarrow I$ invertierbar ist. Berechnen Sie die Umkehrfunktion. (12+ 8 Pkte)

Lösung. a)

$$\frac{4n^3+n^2+6}{2(n+1)(n+3)} = 2n - \frac{15}{2} + \frac{48n+51}{2(n+1)(n+3)}$$

Weiter ist

$$\frac{(3n^2+1)(2n-1)}{3n^2+5} = 2n-1+\frac{-8n+4}{3n^2+5}$$

Also wird

$$x_n = -\frac{13}{2} + \frac{48n+51}{2(n+1)(n+3)} - \frac{-8n+4}{3n^2+5} \longrightarrow -\frac{13}{2}$$

mit $n \to \infty$.

b) Sicherlich kann $a = 0$ gewählt werden. Soll $y \neq 0$ zum Wertebereich von f gehören, so muss die Gleichung $y = \frac{2x}{x^2+3}$ nach x auflösbar sein. Sie ist mit

$$(x - \frac{1}{y})^2 = \frac{1-3y^2}{y^2}$$

äquivalent. Also ist sie z.B. auslösbar nach x, wenn $0 < y \leq b := \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist. Dann wird

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - \frac{\sqrt{1-3y^2}}{y} = \frac{3y}{1+\sqrt{1-3y^2}}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \cdot e^{-5x}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (4 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? (6 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (4 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 2$.

(6 Pkte)

Lösung. a) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$.

b) Es gilt

$$f'(x) = \frac{-5(2x+3)e^{-5x} - 2e^{-5x}}{(3+2x)^2} = -\frac{(10x+17)e^{-5x}}{(2x+3)^2}$$

c) Es gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -\frac{17}{10}$. Links von $-\frac{17}{10}$ ist $f'(x) > 0$ und rechts davon ist $f'(x) < 0$, also liegt ein lokales Maximum vor. Weitere lokale Extrema sind nicht vorhanden.

d) Es gilt

$$T_1 f(x) \quad = \quad f(2) + f'(2)(x-2) = \frac{1}{7}e^{-10} - \frac{37}{49}e^{-10}(x-2)$$