Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **28.8.2012**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik 1b für Ingenieure, Bachelor Sicherheitstechnik (PO 2011)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral $A := \int_0^2 x\sqrt{2x+1}dx$. (5 Pkte)

b) Bestimmen Sie zu

$$R(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2(1+x^2)}$$

die Partialbruchzerlegung.

(10 Pkte)

c) Berechnen Sie zu R eine Stammfunktion.

(5 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x\sqrt{2x+1}dx \\ &= x \cdot \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 (2x+1)^{\frac{3}{2}}dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}\left(5^{\frac{5}{2}} - 1\right) = \frac{1}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{15} \end{aligned}$$

b) Der geeignete Ansatz lautet

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

Ausmultiplizieren liefert

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2(1+x^2)} &= \frac{Ax(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)x^2}{x^2(1+x^2)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B}{x^2(1+x^2)} \end{aligned}$$

So erhalten wir

$$B = -2, \quad A = 1, \quad C = D = 1$$

und

$$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

c) Daraus folgt sogleich

$$\int R(x)dx = \ln|x| + \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x)$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei die Kurve $\alpha(t) := r(t)\vec{e}(t)$, mit $r(t) = 2 + \sin(4t)$ und $\vec{e}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi)$.

a) Wo ist α regulär, also $\alpha'(t) \neq \vec{0}$?

b) Berechnen Sie die Tangente an diese Kurve an der Stelle $\alpha(\pi/8)$.

(Hinweis: Die Werte von cos und sin an der Stelle $\pi/8$ müssen nicht berechnet werden).

c) Welche Fläche wird von der Kurve umschlossen?

(Dazu überlegen Sie zuerst, dass $\det(\alpha(t),\ \alpha'(t)) = r(t)^2$.

(4 + 7 + 9 Pkte)

Lösung. a) Es gilt $\alpha' = r'\vec{e} + r \cdot \vec{e}_\perp = \vec{0}$ genau dann, wo $r = r' = 0$. Da $r \geq 1$ überall, tritt das nie auf. Also ist α überall regulär.

b) Es gilt $r(\pi/8) = 2 + \sin(\pi/2) = 3$ und $r'(\pi/8) = 4\cos(\pi/2) = 0$. Damit wird

$$\alpha'(\pi/8) \quad = \quad r(\pi/8) \cdot \vec{e}_\perp(\pi/8) = 3 \begin{pmatrix} -\sin(\pi/8) \\ \cos(\pi/8) \end{pmatrix}$$

Also folgt

$$T_{\alpha,\pi/8} = 3 \begin{pmatrix} \cos(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\sin(\pi/8) \\ \cos(\pi/8) \end{pmatrix}$$

c) Es gilt

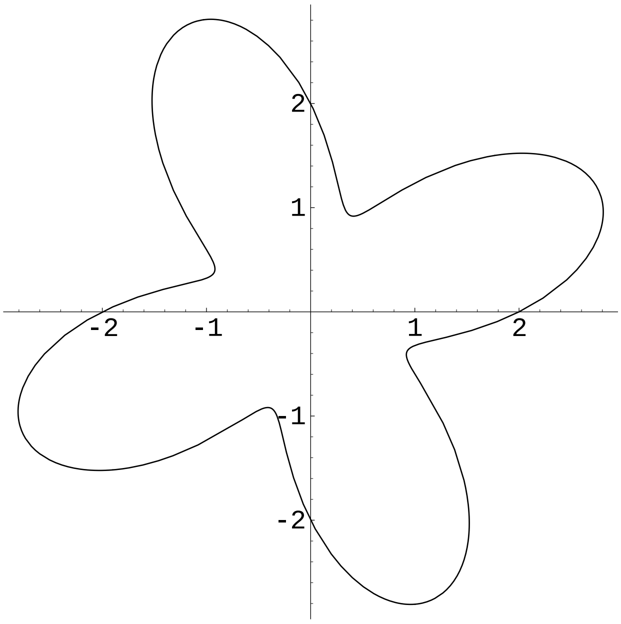
$$\det(\alpha(t),\ \alpha'(t)) = \det\Big(r\vec{e}, r\vec{e}_\perp + r'\vec{e}\Big) = r^2$$

Also schließt die Kurve die Fläche

$$\begin{aligned}
A &:= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(t)^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(4 + 4\sin(4t) + \sin^2(4t)\Big)dt \\
&= 4\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(4t)dt \\
&= 4\pi + \frac{1}{16}\Big(4t - \sin 4t \cos 4t\Big)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

ein.

Hier ist das Bild



Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_2 e^{-2x_1}}{1 + x_1}$$

auf $U := \{x_1 > -1/2\}$.

Dann berechnen Sie die linearisierte Funktion zu f an der Stelle $\vec{x}^0 := (-1/2\,, 2)$.

(9 Pkte)

b) Sei $g(t, s) := (t + ts - 4s,\, 4t^2 - 2s^2)$ und $f(x, y) := x \cdot (4 + x^2 + 2y^2)$. Berechnen Sie mit der **Kettenregel** die partielle Ableitung $(f \circ g)_t$ im Punkte $(t_0, s_0) := (2, 3)$.

(11 Pkte)

Lösung. a) Es gilt $f(-1/2\,, 2) = 4e$ und

$$f_{x_1}(x) = x_2 e^{-2x_1} \frac{-2(1 + x_1) - 1}{(1 + x_1)^2}$$

und

$$f_{x_2}(x) = \frac{e^{-2x_1}}{1 + x_1}$$

Der Gradient zu f bei $\vec{x}^{\,0}$ ist daher

$$f_{x_1}(-1/2\,, 2) = -16e, \qquad f_{x_2}(-1/2\,, 2) = 2e$$

Also folgt

$$\mathscr{L}_f(\vec{x}^0, \vec{x}) = 4e - 16e(x_1 + \frac{1}{2}) + 2e(x_2 - 2)\,.$$

b) Die Kettenregel sagt, dass (mit $\vec{x}_0 := g(2,3)$)

$$(f \circ g)_t(2,3) = f_x(\vec{x}_0) \cdot (g_1)_t(2,3) + f_y(\vec{x}_0) \cdot (g_2)_t(2,3) \tag{1}$$

Nun ist aber $\vec{x}_0 = (-4,-2)$ und

$$(g_1)_t = s+1, \quad (g_1)_t(2,3) = 4\,, \qquad (g_2)_t = 8t, \quad (g_2)_t(2,3) = 16$$

Weiter ist

$$f_x = 4 + 3x^2 + 2y^2, \qquad f_x(\vec{x}_0) = 60\,, \qquad f_y = 4xy, \qquad f_y(\vec{x}_0) = 32$$

Das, in (1) eingesetzt, ergibt

$$(f \circ g)_t(2,3) = 60 \cdot 4 + 32 \cdot 16 = 752$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Es sei G der Bereich, der innerhalb $0 \leq x \leq 4$ von unten durch die x-Achse und von oben durch den Graphen von $f(x) = 2(1 - (\frac{x}{4})^2)$ berandet wird.

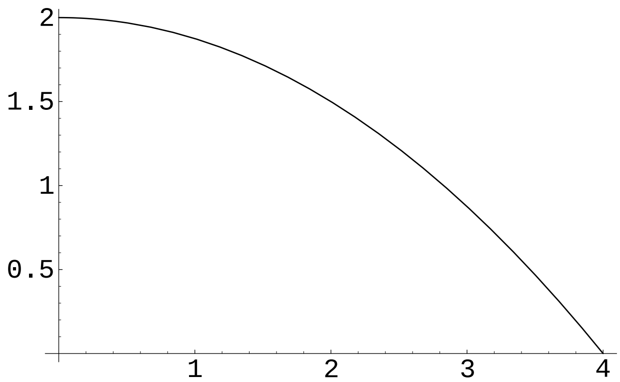
a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (4 Pkte)

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt von G, also den Punkt $\vec{S} := \frac{1}{A}(x_S, y_S)$, wobei

$$A = \iint\limits_G dG, \qquad x_S = \iint\limits_G x dG, \qquad y_S = \iint\limits_G y dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges. (1+6+9 Pkte)

Lösung. a) Das Gebiet G sieht so aus:



b) Es gilt

$$A = \int_0^4 f(x)dx = 8\int_0^1 (1-z^2)dz = 8\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}\,.$$

Weiter haben wir

$$
\begin{aligned}
x_S &= \iint\limits_G x dG = \int_0^4 \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx = \int_0^4 x f(x) dx = \int_0^4 (2x)(1-(\frac{x}{4})^2) dx \\
&= \int_0^{16} (1 - \frac{z}{16}) dz, \;\; \text{mit } z := x^2 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

also $x_S = \frac{3}{2}$. und schließlich

$$
\begin{aligned}
y_S &= \iint\limits_G y dG = \int_0^4 \left(\int_0^{f(x)} y dy \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)^2 dx = 2 \int_0^4 (1-(\frac{x}{4})^2)^2 dx \\
&= 8 \int_0^1 (1-z^2)^2 dz = 8(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{64}{15}
\end{aligned}
$$

Also ist $\vec{x}_S = (\frac{3}{2},\ \frac{4}{5})$.

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen u der Differenzialgleichung

$$2y''' - y'' + 8y' - 4y = 4\cos(2t) + 16\sin(2t)$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei $\frac{1}{2}$.

Lösung. Das charakteristische Polynom der DGL ist

$$P = 2X^3 - X^2 + 8X - 4 = X^2(2X-1) + 4(2X-1) = (2X-1)(X^2+4)\,.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_{\text{hom}}(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t) + c\,e^{t/2}$$

Für die noch benötigte partikuläre Lösung probieren wir

$$u_p(t) = At\sin(2t) + Bt\cos(2t)$$

Einsetzen ergibt uns

$$2u_p''' - u_p'' + 8u_p' - 4u_p = (-4A - 16B)\cos(2t) + (-16A + 4B)\sin(2t)$$

Das führt auf

$$-4A - 16B = 4, \quad -16A + 4B = 16$$

Die Lösung dazu ist $A = -1, B = 0$. Also

$$u_p(t) = -t\sin(2t)$$

Die allgemeine Lösung zur DGL ist dann $y = y_{\text{hom}} + y_{\text{p}}$.

Aufgabe 6 (20 Punkte)
Ein Würfel sei in der Weise präpariert, dass für die einzelnen Augenzahlen folgende Wahrscheinlichkeiten bestehen:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
W'keit	0.08	0.12	0.2	0.15	0.25	0.2

a) Berechnen Sie für alle $t > 0$ die Wahrscheinlichkeit $F(t) := P(\{X \leq t\})$ Unterscheiden Sie dazu die Fälle $0 < t < 1$, $1 \leq t < 2$, u.s.w.

b) Was ist der Erwartungswert von X

c) Was ist die Varianz von X?

Lösung. a) Es gilt $P(X \leq t) = 0$ für $t < 1$. Weiter ist

$F(t) = 0.08$, für $1 \leq t < 2$,

$F(t) = 0.2$, für $2 \leq t < 3$,

$F(t) = 0.4$, für $3 \leq t < 4$,

$F(t) = 0.55$, für $4 \leq t < 5$,

$F(t) = 0.8$, für $5 \leq t < 6$,

$F(t) = 1$, für $6 \leq t$.

b) Es gilt

$$\mathscr{E}(X) = 0.08 + 2 \cdot 0.12 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.15 + 5 \cdot 0.25 + 6 \cdot 0.2 = 3.97$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(X^2) &= 0.08 + 4 \cdot 0.12 + 9 \cdot 0.2 + 16 \cdot 0.15 + 25 \cdot 0.25 + 36 \cdot 0.2 \\ &= 0.08 + 0.48 + 1.8 + 2.4 + 6.25 + 7.2 \\ &= 18.21 \end{aligned}$$

Die Varianz von X ist dann

$$\mathscr{V}(X) = \mathscr{E}(X^2) - \mathscr{E}(X)^2 = 18.21 - 15.7609 = 2.4491$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Angenommen, ein elektronisches Bauteil habe einen elektrischen Widerstand X, der normalverteilt sei.

Eine Firma benötigt solche Bauteile, wobei ein Bauteil als Ausschuss gilt, wenn $X \notin [73\Omega, 85\Omega]$ (Ω steht für Ohm).

Es stehen 2 Zulieferfirmen A und B zur Auswahl. Bei A ist der Erwartungswert $\mu = 80\Omega$ und die Streuung $\sigma = 5\Omega$. Bei der Firma B ist der Erwartungswert 77Ω und die Streuung $\sigma = 6\Omega$.

Wird man bei A oder bei B die Bauteile bestellen?

Lösung. Die Zufallsgrößen $Y_A := \frac{X-80}{5}$ und $Y_B := \frac{X-77}{6}$ sind normalverteilt mit Parameter 0 und 1. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten P_A, dass $X_A \in [73\Omega, 85\Omega]$ und P_B, dass $X_B \in [73\Omega, 85\Omega]$. Damit ist äquivalent, dass $Y_A \in [\frac{73-80}{5}\Omega, \frac{85-80}{5}\Omega]$, bzw., dass $Y_B \in [\frac{73-77}{6}\Omega, \frac{85-77}{5}\Omega]$. Es gilt

$$P_A = \text{Erf}\,(1) - \text{Erf}\,(-1.4) = \text{Erf}\,(1) + \text{Erf}\,(1.4) - 1 = 0.76$$

$$P_B = \mathrm{Erf}\,(1.6) - \mathrm{Erf}\,(-0.66) = \mathrm{Erf}\,(1.6) + \mathrm{Erf}\,(0.66) - 1 = 0.69 < P_A$$

Also erhält A den Zuschlag.