Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Pawlaschyk Wuppertal, 13.03.2018

Grundlagen der Mathematik (BSc Maschinenbau)

Aufgabe 1. *(5+7+8 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^3 = -1 \quad \Leftarrow \quad x = -1$.

(2) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|1-x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $x = 2$.

(3) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$ gilt: $\dfrac{x}{1+x} \leq x$

(4) W ☐ F ☐ Für drei Mengen A, B, C gilt:

$$x \in A \cap (B \cup C) \;\Leftrightarrow\; x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(5) W ☐ F ☐ $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller Dezimalzahlen, die nur endlich viele Nachkommastellen haben.

b) Zeigen Sie durch Induktion: $5^n + 7$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar.

c) Stellen Sie die folgenden Mengen als Intervalle dar und zeichnen Sie sie jeweils in eine reellen Achse im Bereich $-4 \leq x \leq 4$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 2\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 3\}.$$

Bestimmen Sie das Intervall $C = A \cap B$.

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	■	F	☐
(2)	W	■	F	☐
(3)	W	☐	F	■
(4)	W	■	F	☐
(5)	W	☐	F	■

(1) ist WAHR, denn für $x = -1$ ist $x^3 = (-1)^3 = -1$.

(2) ist WAHR, nach Fallunterscheidungen $x \geq 1$ und $x \leq 1$.

(3) ist FALSCH, denn für $x = -2$ steht dort $2 = \frac{-2}{1-2} \leq -2$.

(4) ist WAHR. Das ist das Distributivgesetz für Mengen.

(5) ist FALSCH, denn z.B. ist $1/3 = 0,3333\ldots$ in $\mathbb{Q}$ enthalten und hat unendlich viele Nachkommastellen.

b) **Induktionsanfang** $(n = 1)$: $5^1 + 7 = 12 = 3 \cdot 4$ ist durch 3 teilbar.

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$: Nach Voraussetzung ist $5^n + 7 = 4m$ durch 4 teilbar, wobei $m \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass auch $5^{n+1} + 7$ durch 4 teilbar ist. Wir berechnen:

$$5^{n+1} + 7 = 5 \cdot 5^n + 7 = 5 \cdot (5^n + 7 - 7) + 7$$
$$= 5 \cdot (5^n + 7) - 5 \cdot 7 + 7 = 5 \cdot (5^n + 7) - 28$$
$$= 5 \cdot 4m - 7 \cdot 4 = 4(5m - 7)$$

Damit ist auch $5^{n+1} + 7$ durch 4 teilbar.

c) Es ist $A = [1 - 2, 1 + 2] = [-1, 3]$ und $B = (-2, 2)$, also $C = A \cap B = [-1, 2)$.

Aufgabe 2. *(5+7+8 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\langle a\vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, a\vec{w}\rangle = a\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$.

(2) W ☐ F ☐ Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.

(3) W ☐ F ☐ Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$. Sind jeweils $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{y}$, $\vec{z}$ linear abhängig, so sind auch $\vec{x}$ und $\vec{z}$ linear abhängig.

(4) W ☐ F ☐ Die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

(5) W ☐ F ☐ Der Durchschnitt zweier Geraden im $\mathbb{R}^4$ ist ein Punkt.

b) Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ x \end{pmatrix} \quad ,$$

Für welches x sind die beiden Vektoren senkrecht zueinander? Berechnen Sie für dieses x den Abstand zwischen den beiden Punkten, auf die die Vektoren zeigen.

c) Die Ebene E in $\mathbb{R}^3$ verlaufe durch die Punkte

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} . \quad ,$$

Stellen Sie E in Parameterform $E = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ und in der Form

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = c\}$$

dar.

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	■	F	☐
(2)	W	■	F	☐
(3)	W	■	F	☐
(4)	W	☐	F	■
(5)	W	☐	F	■

(1) ist WAHR nach den Regeln für das Skalarprodukt.

(2) ist WAHR. Siehe Satz in der Vorlesung.

(3) ist WAHR. Ist etwa $\vec{x} = a\vec{y}$ und $\vec{y} = b\vec{z}$, so ist $\vec{x} = a\vec{y} = a(b\vec{z}) = ab\vec{z}$.

(4) ist FALSCH, da die Menge den Nullvektor nicht enthält.

(5) ist FALSCH. Zwei Geraden können auch windschief sein oder identisch.

b) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann senkrecht zueinander, falls $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ ist. Letzteres liefert die Gleichung

$$-8 + 2 - 3x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2.$$

Somit sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

senkrecht zueinander. Der Abstand zwischen den Punkten ist

$$\|\vec{b} - \vec{a}\| = \| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{6^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{38}$$

c) Die Parameterform lautet

$$E = \vec{v}_1 + \mathbb{R}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \mathbb{R}(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] + \mathbb{R}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\vec{n} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 4 \\ (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ferner ist $c = \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = 39 + 5 - 14 = 30.$

Es ist also

$$E \;=\; \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle = 30\}.$$

Aufgabe 3. *(8+5+7 Punkte)*

Wir betrachten die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ bzw. berechnen Sie den inhomogenen Lösungsraum $L_I = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{b}\}$.

b) Geben Sie die Zeilenstufenform von A, den Rang von A und die Dimension des homogenen Lösungsraums $L_H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}\}$ an.

c) Wie hängen L_H und L_I zusammen? Geben Sie eine Basis für L_H an.

Lösung:

a) Naheliegende Schritte liefern die Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die zweite Zeile liefert

$$x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 1 - x_3 + 3x_4$$

Das setzen wir in die erste Zeile ein:

$$x_1 + 3(1 - x_3 + 3x_4) + 4x_3 - 7x_4 = 1$$

$$\Leftrightarrow \; x_1 + 3 - 3x_3 + 9x_4 + 4x_3 - 7x_4 = 1$$

$$\Leftrightarrow \; x_1 + x_3 + 2x_4 = -2$$

$$\Leftrightarrow \; x_1 = -2 - x_3 - 2x_4$$

Das setzen wir in $\vec{x}$ und erhalten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - x_3 - 2x_4 \\ 1 - x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also $L_I = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Der Zeilenrang der Matrix ist gleich 2. Daher ist die Dimension von L_H gleich $4 - 2 = 2$ nach der Dimensionsformel.

c) Nach einem Satz aus der Vorlesung gilt $L_I = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L_H$, wobei

$$L_H = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bereits oben ausgerechnet wurde.

Aufgabe 4. *(5+4+7+4 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Ist $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

(2) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(3) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x) = |x|$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

(4) W ☐ F ☐ Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Maximum.

(5) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ ist ungerade.

b) Geben Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, für die $\lim\limits_{x\to\pm+\infty} f(x) = 0$ und $f(0) = 1$ und gilt.

c) Begründen Sie, weshalb die Folgen

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+2+1} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{3^n + 2^n}{3^{2n}}$$

für $n \to \infty$ gegen Null konvergieren.

d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $f : [-1, +\infty) \to [0, +\infty)$ mit

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	■	F	☐
(1)	W	■	F	☐
(2)	W	☐	F	■
(2)	W	☐	F	■
(1)	W	■	F	☐

(1) ist WAHR nach einem Satz aus der Vorlesung.

(2) ist WAHR, da die Betragsfunktion $f(x) = -x$ für $x < 0$, $f(x) = x$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$ ist. Dadurch ist stets $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ gesichert.

(3) ist FALSCH, da f an der Stelle $x = 0$ keine Ableitung hat.

(4) ist FALSCH. Die Funktion $f(x) = x^2$ erfüllt alle Kriterien, hat einer kein lokales Maximum.

(5) ist WAHR, denn $f(-x) = (-x)^3 e^{-(-x)^2} = -x^3 e^{-x^2} = -f(x)$.

b) Ein Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

c) Die Folge

$$a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$$

kann von unten durch 0 und von oben durch $\frac{1}{n}$ abgeschätzt werden. Nach dem Sandwichlemma ist a_n eine Nullfolge.

Alternativ: Der Zählergrad ist echt kleiner als der Nennergrad. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist die Folge eine Nullfolge.

Die Folge

$$b_n = \frac{3^n + 2^n}{3^{2n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

konvergiert wegen $1/3 < 1$ und $2/9 < 1$ und den Rechenregeln gegen 0.

Alternativ: b_n kann von unten durch 0 und von oben durch $2 \cdot 3^{-n}$ abgeschätzt werden. Nach dem Sandwichlemma ist b_n eine Nullfolge.

d) Wir setzen $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ und lösen auf zur Umkehrfunktion

$$x = g(y) = \sqrt{y} - 1.$$

Aufgabe 5. *(6+6+8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$g(x) = \frac{x}{1+\ln x} \quad , \quad h(x) = \tan(\sqrt{x})$$

b) Begründen Sie, weshalb der Satz von l'Hospital angewendet werden kann, um

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$$

zu bestimmen. Berechnen Sie den Grenzwert.

c) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von $f(x) = x^2e^x$. Untersuchen Sie f auf lokale Extrempunkte, d.h. bestimmen Sie alle lokalen Extrema und begründen Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt. Zeichen Sie den Graphen von f. Respektieren Sie hierbei Nullstellen und asymptotisches Verhalten von f.

Lösung:

a) Nach der Quotienten- und Kettenregel gilt:

$$g'(x) = \frac{1+\ln x - 1}{(1+\ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2} \qquad h'(x) = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) Die Regel kann man anwenden, da der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ vorliegt (und Nenner und Zähler für $x > 0$ unendlich differenzierbar sind):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

c) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+2x)e^x = x(x+2)e^x \\ f''(x) &= (x^2+2x+2x+2)e^x = (x^2+4x+2)e^x \end{aligned}$$

Extrema können also bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ liegen. Wegen $f''(x_1) = 2 > 0$ und $f''(-2) = -2e^{-2} < 0$ besitzt f im Punkt $(0, f(0)) = (0, 0)$ ein lokales Minimum und im Punkt $(-2, f(-2)) = (-2, 4e^{-2})$ ein lokales Maximum.

Für den Graphen: Die einzige Nullstelle liegt bei $x = 0$ vor. Es ist $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. (Beides muss nicht explizit berechnet werden, sondern dient nur als Orientierung für die Skizze.)

Aufgabe 6. *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $\int_a^b f(x)dx$.

(2) W ☐ F ☐ Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion zu f.

(3) W ☐ F ☐ Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist x^k eine Stammfunktion zu kx^{k-1}.

(4) W ☐ F ☐ Für alle $k \in \mathbb{Z}$ besitzt x^k die Stammfunktion $\frac{1}{k+1}x^{k+1}$.

(5) W ☐ F ☐ Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ gilt, so existiert das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}dx$.

b) Verwenden Sie partielle Integration, um folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx$$

c) Berechnen Sie das folgende Integral (vereinfachen Sie das Resultat weitest möglich):

$$\int_1^4 \frac{3x + 2}{x^2(x + 2)}dx$$

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	■	F	☐
(2)	W	■	F	☐
(3)	W	■	F	☐
(4)	W	☐	F	■
(5)	W	■	F	☐

(1) ist WAHR nach einem Satz der Vorlesung.

(2) ist WAHR nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(3) ist WAHR, denn $(x^k)' = kx^{k-1}$.

(4) ist FALSCH wegen das Falles $k = -1$.

(5) ist WAHR, da $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ existiert und $|f(x)| \leq 1$ für große x.

b) Mit partieller Integration und $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-3x} = 0$ ist:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx &= \left[x\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3x}}{-3}dx = -\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} xe^{-3x} + 0 - \frac{1}{9}\left[e^{-3x}\right]_0^{+\infty} \\ &= 0 - \lim_{x\to+\infty} e^{-3x} + \frac{1}{9} = 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

c) Partialbruchzerlegung liefert:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{3x+2}{x^2(x+2)}dx &= \int_1^4 \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \left[\ln(x)-\frac{1}{x}-\ln(x+2)\right]_1^4 \\ &= \ln 4-\frac{1}{4}-\ln 6-\ln 1+1+\ln 3 = \frac{3}{4}+\ln\frac{4\cdot 3}{6} = \frac{3}{4}+\ln 2\end{aligned}$$

Aufgabe 7. *(13+7 Punkte)*

a) Gegeben sei die Kurve $\gamma : [-4, \pi] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma(t) \quad := \quad \begin{cases} (t+2, 0) & , \text{ für } -4 \le t \le 0, \\ (2\cos t, 2\sin t) & , \text{ für } 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

i. Stellen Sie den Graphen von γ in $\mathbb{R}^2$ zeichnerisch dar.

ii. Für welche $t \in [-4, \pi]$ ist γ eine reguläre parametrisierte Kurve?

iii. Bestimmen Sie die Tangente an γ im Punkt $\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

iv. Berechnen Sie die Bogenlänge von γ.

b) Berechnen Sie den von der parametrisierten Kurve $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(t) = r(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

mit $r(t) = \sqrt{7\pi^4 - 5t^4}$, umfahrenen Flächeninhalt.

Lösung:

a) Der Graph Γ ist der Rand des oberen Halbkreises mit Radius 2 um den Ursprung:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2],\ y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\ ,\ y \ge 0\}$$

Wegen

$$\gamma'(t) \quad := \quad \begin{cases} (1, 0) & , \text{ für } -4 \le t < 0, \\ (-2\sin t, 2\cos t) & , \text{ für } 0 < t \le \pi, \end{cases}$$

ist γ regulär für $t \ne 0$. Aber γ' besitzt keine stetige Fortsetzung nach $t = 0$, daher ist γ im Punkt $t = 0$ keine reguläre parametrisierte Kurve.

Wegen $\gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \big(-2\sin(\pi/4), 2\cos(\pi/4)\big) = \big(-2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}\big) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ist die Tangente:

$$T_{\gamma, \frac{\pi}{4}} \quad = \quad \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathbb{R} \cdot \gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Ableitungsvektor γ' und hat die Länge

$$\|\gamma'(t)\| \quad = \quad \begin{cases} \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 & , \text{ für } -4 \le t < 0, \\ \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2 & , \text{ für } 0 < t \le \pi, \end{cases}$$

Somit berechnen wir für die Bogenlänge:

$$L(\gamma) \quad = \quad \int_{-4}^{\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{-4}^{0} 1 \cdot dt + \int_{0}^{\pi} 2 \cdot dt = 4 + 2\pi$$

b) Der Flächeninhalt ist:

$$\begin{aligned} F_\varphi &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (7\pi^4 - 5t^4) dt = \frac{1}{2} \big[7\pi^4 t - t^5\big]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \big(7\pi^5 - \pi^5 + 7\pi^5 - \pi^5\big) = 6\pi^5 \end{aligned}$$

Aufgabe 8. *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen $\boxed{\times}$. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Es gibt partiell differenzierbare Funktionen, die nicht total differenzierbar sind.

(2) W ☐ F ☐ Jede total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(3) W ☐ F ☐ Der Gradient einer total differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liegt tangential an ihren Niveaumengen.

(4) W ☐ F ☐ Verschwindet der Gradient einer differenzierbaren Funktion in einem Punkt, so liegt dort ein lokales Extremum vor.

(5) W ☐ F ☐ Der Gradient differenzierbarer Funktionen verschwindet in lokalen Extrema.

b) Wir betrachten die beiden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$f(x, y) = x^2 e^{\sqrt{3+y^2}-2} \quad , \quad g(t) = \big(\ln(1 + t^2)\ ,\ \sin(\pi t)\big)$$

Ermitteln Sie den Gradienten von f und die Jacobi-Matrix von g.

c) Wir betrachten wieder die beiden Abbildungen f und g aus Teil b). Berechen Sie nun den Gradienten von f im Punkt $(x, y) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$, die Jacobi-Matrix von g im Punkt $t = 1 \in \mathbb{R}$ und die Jacobi-Matrix der Komposition $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x, y) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Lösung:

a) Lösungsmatrix:

(1)	W	■	F	☐
(2)	W	■	F	☐
(3)	W	☐	F	■
(4)	W	☐	F	■
(5)	W	■	F	☐

(1) ist WAHR nach einem Beispiel aus der Vorlesung.

(2) ist WAHR nach einem Satz aus der Vorlesung.

(3) ist FALSCH, der Gradient steht senkrecht auf den Niveaumengen.

(4) ist FALSCH. Ein Gegenbeispiel ist $x \mapsto x^3$.

(5) ist WAHR. Das ist das notwendige Kriterium.

b) Unter Verwendung der Produkt- und der Kettenregel berechnen wir:

$$\nabla f(x,y) = \big(2xe^{\sqrt{3+y^2}-2}\ ,\ x^2 e^{\sqrt{3+y^2}-2}\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}\big) \quad , \quad \text{Jac } g(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ \pi\cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

c) Wegen $f(1,1) = 1$ ist

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1) &= \big(2, \frac{1}{2}\big) \quad , \quad \text{Jac } g(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi \end{pmatrix} \ , \\ \text{Jac } (g \circ f)(1,1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi \end{pmatrix} \cdot \big(2, \frac{1}{2}\big) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -2\pi & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 9. *(3+7+10 Punkte)*

Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ das Gebiet

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -2 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 8 - 2x^2\},$$

das von der x-Achse und der Parabel $y = 8 - 2x^2$ eingeschlossen wird.

a) Stellen Sie das Gebiet G graphisch dar.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von G.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von G.

Lösung:

b) Der Flächeninhalt ist

$$\begin{aligned} A := \int_G dG &= \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{8-2x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^{2} \big[y\big]_0^{8-2x^2} dx = \int_{-2}^{2} (8-2x^2) dx \\ &= \big[8x - \frac{2}{3}x^3\big]_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

c) Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate des Schwerpunktes $x_0 = 0$. Man kann das aber auch nachrechnen:

$$\begin{aligned} A \cdot x_0 = \int_G x\ dG &= \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{8-2x^2} x dy \right) dx = \int_{-2}^{2} \big[xy\big]_{y=0}^{y=8-2x^2} dx \\ &= \int_{-2}^{2} \big(8x - 2x^3\big) dx = \big[4x^2 - \frac{1}{2}x^4\big]_{x=-2}^{x=2} = 0. \end{aligned}$$

Für die y-Koordinate y_0 des Schwerpunktes berechnen wir:

$$\begin{aligned} A \cdot y_0 = \int_G y\ dG &= \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{8-2x^2} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \big[y^2\big]_{y=0}^{y=8-2x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \big(8 - 2x^2\big)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \big(4x^4 - 32x^2 + 64\big) dx \\ &= \int_{-2}^{2} \big(2x^4 - 16x^2 + 32\big) dx = \big[\frac{2}{5}x^5 - \frac{16}{3}x^3 + 32x\big]_{x=-2}^{x=2} \\ &= 2\left(\frac{64}{5} - \frac{128}{3} + 64\right) \end{aligned}$$

Wegen $A = \frac{64}{3}$ ist also

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{3}{64} \cdot 2 \left(\frac{64}{5} - \frac{128}{3} + 64\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = 6 \cdot \frac{3 - 10 + 15}{15} \\ &= 6 \cdot \frac{8}{15} = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt ist also $P = (x_0, y_0) = \big(0, \frac{16}{5}\big)$.

Aufgabe 10. *(4+8+8 Punkte)*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{11i-3}{3-i} \quad , \quad e^{-i\pi/2}$$

b) Bestimmen Sie den Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung:

$$u''' - u'' + 4u' - 4u \;=\; 0$$

c) Bestimmen Sie durch einen geeigneten Ansatz mit Koeffizientenvergleich eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$u'''(t) - u''(t) + 4u'(t) - 4u(t) \;=\; -4t^2 + 8t + 2$$

Geben Sie nun noch den gesamten Lösungsraum dieser Gleichung an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{11i-3}{3-i} &= (11i-3)\cdot\frac{\overline{3-i}}{|3-i|^2} = (11i-3)\cdot\frac{3+i}{3^2+(-1)^2} \\
&= \frac{1}{10}(33i - 11 - 9 - 3i) = \frac{1}{10}(-20+30i) = -2+3i \\
e^{-i\pi/2} &= \big(\cos(-\pi/2) + i\cdot\sin(-\pi/2)\big) = \big(\cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2)\big) = -i
\end{aligned}$$

b) Das charakteristische Polynom der DGL ist $P(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$. Wir erraten die Nullstelle $z_0 = 1$. Polynomdivision liefert nun:

$$(z^3 - z^2 + 4z - 4) : (z-1) \;=\; z^2 + 4$$

Mit der dritten binomischen Formel oder der pq-Formel ergeben sich die weiteren Nullstellen $z_1 = 2i$ und $z_2 = -2i$. Der Lösungsraum ist

$$L \;=\; \{ae^t + be^{2it} + ce^{-2it} \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

c) Der geeignete Ansatz ist

$$v(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0.$$

$v'(t) = 2a_2t + a_1$, $v''(t) = 2a_2$ und $v'''(t) = 0$ in die DGL einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
v'''(t) - v''(t) + 4v'(t) - 4v(t) &= -4t^2 + 8t + 2 \\
\Leftrightarrow \quad -2a_2 + 8a_2t + 4a_1 - 4a_2t^2 - 4a_1t - 4a_0 &= -4t^2 + 8t + 2 \\
\Leftrightarrow \quad -4a_2t^2 + (8a_2 - 4a_1)t + (-2a_2 + 4a_1 - 4a_0) &= -4t^2 + 8t + 2
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ und $a_0 = -1$. Eine partikuläre Lösung ist also:

$$v(t) = t^2 - 1.$$

Der Lösungsraum der inhomogenen Gleichung ist mit Teil (b) also:

$$v(t) + L = \{t^2 - 1 + ae^t + be^{2it} + ce^{-2it} \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$