**Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal** **21.3.2017**
**Bergische Universität Wuppertal**

## Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

**Aufgabe 1** (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

(10 Pkte)

b) Bestimmen Sie die Menge $M$ aller $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Ungleichung erfüllen. Schreiben Sie die Menge mit Hilfe von Intervallen.

$$|3x+5| \geq |2x-1|$$

(10 Pkte)

*Lösung.* a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1$ und $\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) = 1$.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Nach Voraussetzung ist

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) + (2n+1)^2$$

Wir rechnen weiter:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) + (2n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{3}(2n+1)\big[n(2n-1) + 3(2n+1)\big] = \frac{1}{3}(2n+1)\big[n(2n-1) + 4n + (2n+3)\big] \\
&= \frac{1}{3}(2n+1)\big[n(2n-1+4) + (2n+3)\big] \\
&= \frac{1}{3}(2n+1)\big[n(2n+3) + (2n+3)\big] = \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

b) Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
x \in M \quad &\Leftrightarrow \quad |3x+5| \geq |2x-1| \Leftrightarrow (3x+5)^2 \geq (2x-1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 9x^2 + 30x + 25 \geq 4x^2 - 4x + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 5x^2 + 34x \geq -24 \Leftrightarrow x^2 + \frac{34}{5}x \geq -\frac{24}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{17}{5}\right)^2 \geq -\frac{24}{5} + \left(\frac{17}{5}\right)^2 = \frac{289-120}{25} = \frac{169}{25} = \left(\frac{13}{5}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left|x - (-\frac{17}{5})\right| \geq \frac{13}{5}
\end{aligned}$$

Also ist

$$M \quad = \quad \mathbb{R} \setminus \big(-6, -\frac{4}{5}\big) = \big(-\infty, -6\big] \cup \big[-\frac{4}{5}, +\infty\big).$$

**Aufgabe 2** (20 Punkte)

a) Wir betrachten die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass sich $v_3$ als Linearkombination von $v_1$ und $v_2$ schreiben lässt. Sind die drei Vektoren $v_1, v_2$ und $v_3$ linear abhängig oder linear unabhängig? (8 Pkte)

b) Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \cdot y = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $M$ kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist. (6 Pkte)

c) Stellen Sie die Ebene

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \langle \vec{x}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 4\}$$

in Parameterform dar. (6 Pkte)

*Lösung.* a) Wir müssen die Gleichung $a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = v_3$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ lösen. Das führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2a + b &= -5 \\ a - 2b &= 4 \\ 3a + 5b &= 1 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit 2 und addieren sie zur ersten und erhalten

$$-3b = 3 \quad \Leftrightarrow \quad b = -1$$

als notwendige Bedingung. Mit der zweiten Gleichung folgt

$$a = 4 + 2b = 4 - 2 = 2.$$

Durch nachrechnen zeigt sich, dass tatsächlich gilt:

$$v_3 \quad = \quad 2 \cdot v_1 - v_2.$$

Daher sind die drei Vektoren linear abhängig.

b) Für einen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^2$ muss gelten: $v, w \in V \Rightarrow v + w \in V$, d.h. $V$ muss additiv sein. Betrachten wir also zum Beispiel

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,,\, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M \;, \quad \text{so ist} \;\; v + w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin M,$$

denn $1 \cdot 1 \neq 0$. Also ist $M$ nicht additiv, also kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

c) Wir erhalten

$$\vec{x} \in E \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \;\; \Leftrightarrow \;\; x_1 = 4 + x_2 - 2x_3$$

Damit sind zum Beispiel

$$P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in E,$$

und daher hat $E$ etwa die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot (P_2 - P_1) + \mathbb{R} \cdot (P_3 - P_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3** (20 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & t \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$.

a) Welches Gleichungssystem wird durch

$$A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

für $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^4$ beschrieben? (3 Pkte)

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung

$$A_t \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösbar? Wie verhält sich der Rang von $A_t$ in Abhängigkeit von $t$? (11 Pkte)

c) Lösen Sie die Gleichung aus Teil b) für $t = -12$. (6 Pkte)

*Lösung.* a) Die Gleichung $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}$ beschreibt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & = & b_1 \\ & 3x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & b_2 \\ 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & b_3 \\ 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & +t \cdot x_4 & = & b_4 \end{array}$$

b) Wir betrachten direkt die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$A_t = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 3 & t & 0 \end{array}\right)$$

Durch elementare Zeilen–Operationen erhalten wir die Zeilenstufenform:

$$A_t = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+15 & -15 \end{array}\right) \tag{0.1}$$

Daher ist die Gleichung für $t \neq -15$ lösbar (und der Rang von $A_t$ ist 4). Für $t = -15$ ist der Rang gleich 3 und die Gleichung nicht lösbar.

c) Für $t = -12$ entspricht die Gleichung dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & = & 5 \\ & x_2 & +x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & & -5x_3 & -11x_4 & = & 0 \\ & & & 3x_4 & = & -15 \end{array}$$

Durch Rückwärtssubstitution erhalten wir also die Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -28 \\ 9 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4** (20 Punkte)

a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion an, die nicht stetig ist. (3 Pkte)

b) Wir betrachten die Folgen:

$$a_n := \frac{3n^5 - 11n^4 + n^3 + 2n - 100}{4 + (n^2 - 3)^2} \quad , \quad b_n := \frac{1 + n + 8n^2}{2 + 3n^2 + (-1)^n \cdot n^2}$$

Beantworten Sie für beide Folgen die folgenden Fragen: Konvergiert die Folge, wenn ja, gegen welchen Grenzwert? Gibt es Häufungspunkte, wenn ja, welche? (10 Pkte)

c) Auf welchen Intervallen ist die Funktion

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

umkehrbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie für jedes dieser Intervalle die Umkehrfunktion an.

(7 Pkte)

*Lösung.* a) Ein klassisches Beispiel wäre etwa:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0, \\ 1 & , \ x > 0. \end{cases}$$

b) Für die Folge $a_n$ kürzen wir Zähler und Nenner mit $n^4$:

$$a_n = \frac{3n - 11 + n^{-1} + 2n^{-3} - 100n^{-4}}{4n^{-4} + (n^{-2})^2(n^2 - 3)^2} = \frac{3n - 11 + n^{-1} + 2n^{-3} - 100n^{-4}}{4n^{-4} + (1 - 3n^{-2})^2}$$

Wegen $n^{-k} \to 0$ für $n \to \infty$ (falls $k \geq 1$), folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte nun, dass (auf der rechten Seite) der Zähler für $n \to \infty$ gegen $+\infty$ läuft, während der Nenner gegen 1 konvergiert. Damit erhalten wir

$$a_n \to +\infty \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Für die Folge $b_n$ kürzen wir Zähler und Nenner mit $n^2$:

$$b_n = \frac{n^{-2} + n^{-1} + 8}{2n^{-2} + 3 + (-1)^n}$$

Damit verhält sich die Folge wegen $n^{-2} \to 0$ für $n \to \infty$ wie die Folge $\frac{8}{3+(-1)^n}$. Sie konvergiert also nicht, sondern hat die beiden Häufungspunkte 2 und 4.

c) Folgende Überlegungen sind hilfreich, aber nicht zwingend notwendig: Wegen $f'(x) = 2x - 4$ ist

$$f'(x) \left\{ \begin{array}{c} < 0 \\ > 0 \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{c} x < 2 \\ 2 < x \end{array} \right.$$

Folglich ist das Polynom $f$ auf $[2, +\infty)$ streng monoton wachsend und stetig. Daher ist

$$f : [2, +\infty) \to [-1, +\infty)$$

stetig umkehrbar. Analog ist $f$ auf $(-\infty, 2]$ streng monoton fallend und stetig. Daher ist $f$ auch

$$f : (-\infty, 2] \to [-1, +\infty)$$

stetig umkehrbar.

Um Umkehrfunktionen zu finden beachten wir (quadratische Ergänzung):

$$f(x) = (x-2)^2 - 1$$

Setzen wir also $y = (x-2)^2 - 1$ und lösen nach $x$ auf, so ergibt sich:

$$x = 2 \pm \sqrt{y+1}$$

Das liefert die beiden Umkehrfunktionen:

$$f|_{[2,+\infty)}^{-1} : [-1, +\infty) \to [2, +\infty)\ ,\ y \mapsto 2 + \sqrt{y+1},$$
$$f|_{(-\infty,2]}^{-1} : [-1, +\infty) \to (-\infty, 2]\ ,\ y \mapsto 2 - \sqrt{y+1}$$

Hieraus folgt die Umkehrbarkeit auf den beiden Intervallen, auch ohne die obigen Überlegungen zur Monotonie.

**Aufgabe 5** (20 Punkte)

a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to (1, +\infty)$ zwei differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\ln\big(f(x) \cdot \ln\big(g(x)\big) \quad , \quad \exp^{\ln(1+\sqrt{x})}$$

(5 Pkte)

b) Wir betrachten von nun an die Funktion

$$h(x) = (x^3 + x)\big(e^x\big)^2$$

Bestimmen Sie die Nullstellen von $h$. (1 Pkt)

c) Wie verhält sich $h(x)$ asymptotisch für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$? (3 Pkte)

d) Untersuchen Sie $h$ auf Symmetrie, d.h. bestimmen Sie, ob $h$ eine gerade oder ungerade Funktion ist. (Hinweis: Bedenken Sie Teil c)) (3 Pkte)

e) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von $h$ und untersuchen Sie $h$ auf lokale Extremstellen, d.h. bestimmen Sie alle lokalen Extrema und geben Sie an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(6 Pkte)

f) Wo ist $h$ monoton wachsend und wo monoton fallend? (2 Pkte)

*Lösung.* a)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln\big(f(x)\cdot\ln\big(g(x)\big)\big) &= \frac{1}{f(x)\cdot\ln\big(g(x)\big)}\cdot\left(f'(x)\cdot\ln\big(g(x)\big)+f(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}\right)\\
\frac{d}{dx}\exp^{\ln(1+\sqrt{x})} &= \frac{d}{dx}\big(1+\sqrt{x}\big)=\frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

b) Da $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, stimmen die Nullstellen von $h$ mit den Nullstellen von $x^3+x = x(x^2+1)$ überein. Wir erhalten die einzige Nullstelle 0.

c)

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$$

Dabei ist der erste Grenzwert klar, den zweiten erhält man mit der Regel von l'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} h(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{-2e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{4e^{-2x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{-8e^{-2x}} = -\frac{3}{4}\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0
\end{aligned}$$

d) Wegen der Grenzwerte in Teil c) ist $h$ weder gerade noch ungerade, denn für gerade Funktionen ist

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x),$$

und für ungerade Funktionen ist

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\lim_{x\to-\infty} h(x).$$

Alternativ könnte man auch folgendermaßen vorgehen: Wäre $h$ gerade, so wäre $h(x)/h(-x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wäre $h$ ungerade, so wäre $h(x)/h(-x) = -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist aber

$$\frac{h(x)}{h(-x)} = \frac{(x^3+x)e^{2x}}{(-x^3-x)e^{-2x}} = -e^{2x}e^{2x} = -e^{4x}.$$

Also ist $h$ weder gerade noch ungerade.

e) Wir berechnen mit der Produktregel unter Beachtung von $(e^x)^2 = e^{2x}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{2x}\big(3x^2+1+(x^3+x)\cdot 2\big) = e^{2x}\big(2x^3+3x^2+2x+1\big), \\ h''(x) &= e^{2x}\big(6x^2+6x+2+(2x^3+3x^2+2x+1)\cdot 2\big) \\ &= e^{2x}\big(4x^3+12x^2+10x+4\big) \end{aligned}$$

Für die notwendige Bedingung $h'(x) = 0$ suchen wir die Nullstellen von $h'$. Analog zu Aufgabe b) stimmen diese mit den Nullstellen von $2x^3+3x^2+2x+1$ überein. Wir erraten als erste Nullstelle $x_0 = -1$. Polynomdivision liefert nun:

$$\big(2x^3+3x^2+2x+1\big) : (x+1) = 2x^2+x+1$$

Die Diskriminante der Gleichung $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ist aber

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} < 0$$

Daher ist $x_0 = -1$ die einzige Nullstelle von $h'$. Wegen

$$h''(-1) = e^{-2}(-4+12-10+4) = 2e^{-2} > 0$$

handelt es sich bei $x_0$ um ein lokales Minimum.

f) Wir untersuchen das Vorzeichen der Ableitung

$$h'(x) = e^{2x}\big(2x^3+3x^2+2x+1\big)$$

und finden, da $2x^3+3x^2+2x+1$ nur bei $x_0 = -1$ verschwindet:

$$h'(x)\left\{\begin{array}{c} <0 \\ >0 \end{array}\right\} \text{ für } \left\{\begin{array}{c} x<-1 \\ -1<x \end{array}\right.$$

Daher ist $h$ auf $(-\infty,-1]$ streng monoton fallend, und auf $[-1,+\infty)$ streng monoton wachsend.

**Aufgabe 6** (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2+\sqrt{x}}dx$ mit der Substitutionsregel.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \dfrac{5x^3-3x^2+12x-16}{x^2(x^2+4)}$. Wie lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $R$? (3 Pkte )

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $R$. (6 Pkte )

d) Berechnen Sie das Integral $I = \displaystyle\int_1^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+4}\right) dx$.

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

*Lösung.* a) Sei $h(x) := \sqrt{x}$. Dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2+\sqrt{x}} = 2h'(x)f(h(x))\,,$$

mit $f(y) := \frac{1}{2+y}$. Die Substitutionsregel gibt uns

$$I = 2\int_1^2 f(y)dy = 2\ln(2+y)\Big|_1^2 = 2\ln(4/3)$$

b) Der Ansatz lautet

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

c) Wir multiplizieren dies aus und finden

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 4Ax + 4B}{x^2(x^2+4)} \end{aligned}$$

Es folgt

$$A + C = 5, \qquad B + D = -3, \qquad 4A = 12, \qquad 4B = -16$$

mit der Lösung

$$A = 3, \qquad B = -4, \qquad C = 2, \qquad D = 1$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+4}\right) dx \\ &= \left(3\ln x + \frac{4}{x} + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(\frac{x}{2})\right)\Big|_1^4 \\ &= 6\ln(2) - 3 + \ln(20/5) + \frac{1}{2}\Big(\mathrm{arctg}\,(2) - \mathrm{arctg}\,(\frac{1}{2})\Big) \\ &= 8\ln(2) - 3 + \frac{1}{2}\Big(\mathrm{arctg}\,(2) - \mathrm{arctg}\,(\frac{1}{2})\Big) \end{aligned}$$

**Aufgabe 7** (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[0, 2\pi]$ definierte Kurve $\alpha(t) = \Big(r(t)\,\cos(t),\, r(t)\,\sin(t)\,\Big)$, wobei $r(t) = 3/2 - \cos(2t)$.

a) Berechnen Sie $\alpha'$. (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale $N$ an $\alpha$ im Punkte $\alpha(\pi/6)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt $A$ der von $\alpha$ umschlossenen Fläche. (6 Punkte)

*Lösung.* a) Schreiben wir $e(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $e_\perp(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, so wird

$$\alpha'(t) = r'(t)e(t) + r(t)e_\perp(t) = 2\sin(2t)\cdot e(t) + (\frac{3}{2} - \cos(2t))e_\perp(t)$$

b) Da $e(t)$ und $e_\perp(t)$ für jedes $t$ linear unabhängig sind, ist $\alpha'(t) = 0$ genau dann, wenn $2\sin(2t) = 0$ und zugleich $\frac{3}{2} - \cos(2t) = 0$ ist, was für kein $t$ erfüllt wird. Somit ist $\alpha$ überall regulär.

c) Wegen

$$\sin(\pi/6) = 1/2 \quad , \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad , \quad \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \quad , \quad \cos(\pi/3) = 1/2$$

haben wir zunächst:

$$\begin{aligned}
\alpha'(\pi/6) &= 2\sin(\pi/3)e(\pi/6) + (\frac{3}{2} - \cos(\pi/3))e_\perp(\pi/6) \\
&= \sqrt{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Normale an $\alpha$ in

$$\alpha(\pi/6) = (3/2 - \cos(\pi/3)\begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

ist dann

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

d) Die Sektorformel in Polarform ergibt für die gesuchte Fläche $A$

$$\begin{aligned}
2A &= \int_{-\pi}^{\pi} r(t)^2 dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (3/2 - \cos(2t))^2 dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{9}{4} - 3\cos(2t) + \cos^2(2t))dt \\
&= \frac{9}{2}\pi + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2t))dt \\
&= \frac{11}{2}\pi
\end{aligned}$$

Also wird $A = \frac{11}{4}\pi$.

**Aufgabe 8** (20 Punkte)

Es sei $\vec{g}(t,s) := \left(\frac{t}{1+s^2}, \frac{ts}{1+t^2}\right)$ und $f(x,y) := \dfrac{x}{1+x^2+y^2+xy}$.

a) Berechnen Sie $\nabla f$. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $\nabla h(-1,1)$. (10 Punkte)

*Lösung.* a) Es gilt

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{1+x^2+y^2+xy} - \frac{x(2x+y)}{(1+x^2+y^2+xy)^2} \\
&= \frac{1+x^2+y^2+xy - x(2x+y)}{(1+x^2+y^2+xy)^2} = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2+xy)^2}
\end{aligned}$$

und

$$f_y = -\frac{x(2y+x)}{(1+x^2+y^2+xy)^2}$$

b) Es gilt

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+s^2} & -\dfrac{2st}{(1+s^2)^2} \\ s\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} & \dfrac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $(x^0, y^0) := \vec{g}(-1,1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und damit $\nabla f(x^0, y^0) = (\frac{16}{49}, -\frac{12}{49})$. Da weiter $J_{\vec{g}}(-1,1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \nabla h(-1,1) &= \nabla f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \cdot J_{\vec{g}}(-1,1) \\ &= (\frac{16}{49}, -\frac{12}{49}) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= (\frac{8}{49}, \frac{2}{7}) \end{aligned}$$

**Aufgabe 9** (20 Punkte)

Es sei $G_1$ das von der Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 4$ berandete Gebiet und

$$G := G_1 \cap \{(x,y) \mid y \geq 1 - \frac{x}{2}\}.$$

a) Skizzieren Sie das Gebiet $G$. ( 5 Punkte)

b) Berechnen Sie für $x \in [0,2]$ das Integral

$$J(x) := \int_{G_x} \frac{dy}{y^{3/2}}$$

wobei $G_x = \{(t,s) \in G \mid t = x\}$ für $0 \leq x \leq 2$.

(7 Punkte)

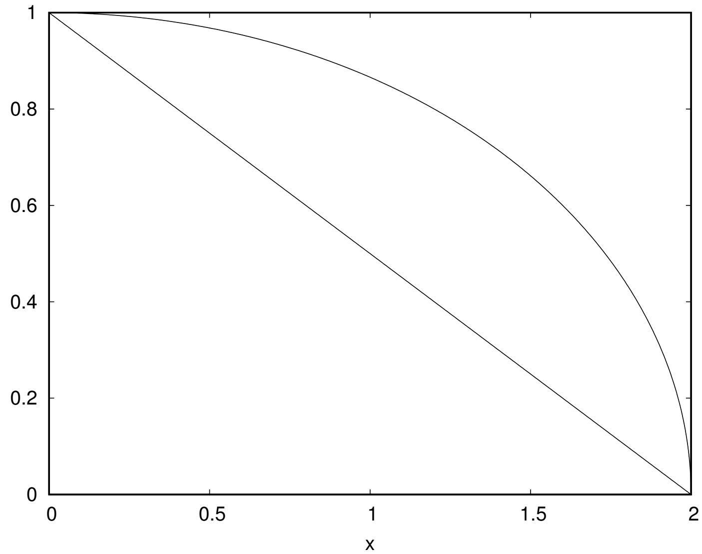
c) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \iint_G \frac{x}{y^{3/2}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(8 Punkte)

*Lösung.* a) Das Gebiet hat die folgende Gestalt:




b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
J(x) &= \int_{1-\frac{x}{2}}^{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \frac{dy}{y^{3/2}} \\
&= (-2)y^{-1/2}\Big|_{1-\frac{x}{2}}^{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} - \frac{2}{\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{1/4}}
\end{aligned}
$$

c) Mit Teil b) folgt

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^2 xJ(x)dx \\
&= 2\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} - 2\int_0^2 \frac{xdx}{\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{1/4}}
\end{aligned}
$$

Nun ist aber

$$
\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} &= 2\int \frac{\frac{x}{2}-1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}dx \\
&= -2\int \sqrt{1-\frac{x}{2}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}dx \\
&= \frac{8}{3}(1-\frac{x}{2})^{3/2} - 8\sqrt{1-\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

Also

$$2\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \frac{32}{3}$$

Ferner haben wir

$$\int \frac{xdx}{\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{1/4}} = -\frac{8}{3}\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{3/4}$$

und damit

$$\int_0^2 \frac{xdx}{\left(1-(\frac{x}{2})^2\right)^{1/4}} = \frac{8}{3}$$

Insgesamt wird dann

$$I_1 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

**Aufgabe 10** (20 Punkte)

Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' - 6y'' + 9y' - 4y = (20t-4)e^{-t}$$

a) Was ist das charakteristische Polynom $P$ dieser DGL? (3 Punkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei 1.) (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Punkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung $u_p$ ? (4 Punkte)

e) Berechnen Sie $u_p$ mit diesem Ansatz. (6 Punkte)

Beachten Sie: Die Variable ist $t$.

*Lösung.* a) Das charakteristische Polynom $P$ ist hier $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 4$.

Eine Nullstelle von $P$ liegt bei 1. Da $P' = 3X^2 - 12X + 9$, also $P'(1) = 0$, ist $P(X) = (X-1)^2(X-4)$, da $-4$ das Produkt der Nullstellen ist.

c) Die resultierenden Basislösungen sind dann $e^t, te^t$ und $e^{4t}$.

d) Der geeignete Ansatz ist hier $u_p(t) := (at+b)e^{-t}$

e) Wir berechnen die Ableitungen zu $u_p$, nämlich

$$u_p'(t) = (a - at - b)e^{-t}, \qquad u_p''(t) = (-a - (a - at - b))e^{-t} = (-2a + b + at)e^{-t}$$

und

$$u_p'''(t) = (a - (-2a + b + at))e^{-t} = (3a - b - at)e^{-t}$$

Das setzen wir in die DGL ein und finden

$$\begin{aligned} u_p'''(t) - 6u_p''(t) + 9u_p'(t) - 4u_p(t) &= e^{-t}\Big((3a - b - at - 6(-2a + b + at) + 9(a - at - b) - 4(at + b)\Big) \\ &= e^{-t}\,(24a - 20b - 20at) \end{aligned}$$

Wählen wir $a = b = -1$, wird $u_p$ eine spezielle Lösung zur DGL. Die allgemeine Lösung lautet damit

$$u(t) = u_p(t) + (At + B)e^t + Ce^{4t}$$