Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **15.3.2016**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{3} + 4\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(-1)^n}{2n+3}$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|3x+1| < |7x-1|$ erfüllen.

Lösung. a) Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich $-\frac{1}{5}$.

Gilt die Summenformel für n, so auch für $n+1$, denn es ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + 4\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{1}{3} + 4\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)} + 4(-1)^{n+1}\frac{n+2}{(2n+3)(2n+5)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2n+3} + 4(-1)^{n+1}\frac{n+2}{(2n+3)(2n+5)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2n+3}\left(1 - 4\frac{n+2}{2n+5}\right) = \frac{(-1)^n}{2n+3}\,\frac{2n+5-4n-8}{2n+5} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+5}
\end{aligned}$$

b) Die folgenden Zeilen sind äquivalent:

$x \in M$

$(3x+1)^2 < (7x-1)^2$

$9x^2 + 6x < 49x^2 - 14x$

$40x^2 - 20x > 0$

$x(2x-1) = 2x^2 - x > 0$

$x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$

Somit wird $M = (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck $\mathcal{D}$ mit Ecken bei $\vec{A} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $\vec{D}$ teile die Seite $\overline{AC}$ von $\vec{A}$ aus im Verhältnis $3:2$. Weiter sei $\vec{M}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.

a) Berechnen Sie $\vec{M}$ und $\vec{D}$ (3+5 Punkte)

b) Welchen Abstand d hat $\vec{C}$ von der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$? (8 Punkte)

c) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck $\mathcal{D}$? (4 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$\vec{D} = \frac{1}{5}(2\vec{A} + 3\vec{C}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 39 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Der gesuchte Abstand ist

$$d = \frac{|\det(\vec{C} - \vec{A}, \vec{B} - \vec{A})|}{\|\vec{B} - \vec{A}\|} = \frac{\left|\det\begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\right|}{4\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

c) Der Flächeninhalt von $\mathcal{D}$ ist $F = |\det(\vec{C} - \vec{A}, \vec{B} - \vec{A})| = 20.$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & s & 6 \\ 1 & 17 & 9 & 14 \end{pmatrix}$ mit einer Zahl $s \in \mathbb{R}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 30 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Rang von $\mathcal{A}$ und die Dimension des Nullraumes $N_{\mathcal{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von s.

b) Berechnen Sie für $s = -1$ Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Es sei $s = -1$ und V der durch $V := \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ 29 \\ 2 \end{pmatrix}$ definierte Unterraum.

Berechnen Sie $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ 29 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gilt sogar $N_{\mathcal{A}} = V$? (Antwort begründen)

(10+4+6 Pkte)

Lösung. a) In der erweiterten Matrix $(\mathcal{A} \,|\, \vec{b}\,)$ subtrahieren von der 2. Zeile das 3-fache der 1. Zeile und von der 3. Zeile die 1. Zeile. So entsteht

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -13 & s-6 & -9 & -24 \\ 0 & 13 & 7 & 9 & 24 \end{array}\right)$$

Zur 3. Zeile addieren wir die 2. Zeile und erhalten die Matrix

$$\mathcal{A}_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -13 & s-6 & -9 & -24 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für $s = -1$ ist $\text{Rang}\,(\mathcal{A}) = 2, \dim N_{\mathcal{A}} = 2$. Für $s \neq -1$ gilt $\text{Rang}\,(\mathcal{A}) = 3, \dim N_{\mathcal{A}} = 1$.

b) Für $s = -1$ suchen wir eine Lösung der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ zu $\mathcal{A}_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Das heißt:

$$9 + 2a + 5b = 6, \qquad -26 - 7a - 9b = -24$$

oder

$$2a + 5b = -3, \qquad 7a + 9b = -2$$

Also $a = 1, b = -1$.

c) Es gilt $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ 29 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}$, also $V \subset N_{\mathcal{A}}$. Da $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ 29 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, ist $\dim V = 2 = \dim N_{\mathcal{A}}$. Damit ist $N_{\mathcal{A}} = V$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\geq 3}$ mit

$$x_n = \frac{4n^3 - 6n + 5}{2(n+1)(n-2)} - \frac{16n^2 + 2n + 1}{8n + 5}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_n mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$, für $x \geq 1$.

(i) Berechnen Sie $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ für $x > y \geq 1$. Ist f monoton?

(ii) Bestimmen Sie die Wertemenge $W := \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \geq 1\}$.

(iii) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \longrightarrow [1, \infty)$ zu f.

(10+5+2+3 Pkte)

Lösung. a) Es gilt $\dfrac{4n^3 - 6n + 5}{2(n+1)(n-2)} = 2n + \dfrac{2n^2 + 2n + 5}{2n^2 - 2n - 4}$ und $\dfrac{16n^2 + 2n + 1}{8n + 5} = 2n - \dfrac{8n - 1}{8n + 5}$, also

$$x_n = \frac{2n^2 + 2n + 5}{2n^2 - 2n - 4} + \frac{8n - 1}{8n + 5} \longrightarrow 2, \qquad n \to \infty$$

b) (i) Es gilt $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = 4 - \dfrac{1}{xy} \geq 3$, wenn $x > y$, also wächst f streng monoton.

(ii) $f \geq f(1) = 5$, also ist $W \subset [5, \infty)$. Da $f(x) \longrightarrow \infty$ mit $x \to \infty$, ist sogar (Zwischenwertsatz) $W = [5, \infty)$.

(iii) Wir lösen die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf und finden $x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 16}}{8}$, soll $x \geq 1$ werden, müssen wir das Pluszeichen wählen, also

$$f^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 16}}{8}, \qquad y \geq 5$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2+6x+13}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? $\left(\text{Zur Orientierung: } f'(x) = -\frac{x^2+8x+11}{(x^2+6x+13)^2} \right)$ (8 Pkte)

c) Untersuchen Sie lokale Extrema für f (5 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f bei $x_0 = -2$.

(4 Pkte)

Lösung. a) Da $x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 4 \geq 4$, ist f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Es gilt mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2+6x+13-(x+4)(2x+6)}{(x^2+6x+13)^2} \\ &= -\frac{x^2+8x+11}{(x^2+6x+13)^2} \end{aligned}$$

c) Es gilt $x^2+8x+11 = (x+4)^2 - 5 = (x-x_1)(x-x_2)$, mit $x_1 = -4-\sqrt{5}$ und $x_2 = -4+\sqrt{5}$. Also

$$f'(x) = -\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2+6x+13)^2}$$

Das zeigt, dass $f'(x) < 0$ auf $(-\infty, x_1)$ und $f'(x) > 0$ auf (x_1, x_2). Auf (x_2, ∞) ist wieder $f' < 0$. Somit liegt bei x_1 ein lokales Minimum und bei x_2 ein lokales Maximum vor.

d) Die Gleichung der gesuchten Tangente ist

$$y = f(-2) + f'(-2)(x+2) = \frac{2}{5} + \frac{1}{25}(x+2) = \frac{x}{25} + \frac{12}{25}$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx$ mit der Substitutionsregel.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \dfrac{x^3 - 4x + 24}{(x-1)^2(x^2+6)}$. Wie lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von R? (3 Pkte)

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von R. (6 Pkte)

d) Berechnen Sie das Integral $I = \displaystyle\int_2^3 \left(\frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+6} \right) dx.$

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Wir substituieren $y := \dfrac{1}{2} \sin x$. Da $y'(x) = \frac{1}{2} \cos x$, folgt

$$I = 2 \int_0^{1/2} \frac{dy}{4 + 4y^2} = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (\frac{1}{2})$$

b) Der benötigte Ansatz muss lauten:

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 6}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A(x-1)(x^2+6) + B(x^2+6) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+6)} \\ &= \frac{A(x^3 - x^2 + 6x - 6) + B(x^2+6) + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D}{(x-1)^2(x^2+6)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (6A+C-2D)x - 6A + 6B + D}{(x-1)^2(x^2+6)} \end{aligned}$$

Es soll also

$$(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (6A+C-2D)x - 6A + 6B + D = x^3 - 4x + 24$$

werden. Das bedeutet aber

$$A + C = 1, \qquad -A + B - 2C + D = 0, \qquad 6A + C - 2D = -4, \qquad -6A + 6B + D = 24$$

Das Gleichungssystem wird durch $A = -1, B = 3, C = 2, D = 0$ gelöst. So finden wir

$$R(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x}{x^2+6}$$

d) Die Funktion $F(x) = -\ln(x-1) - \dfrac{3}{x-1} + \ln(x^2+6)$ ist eine Stammfunktion zu R, also

$$\int_2^3 R(x) dx = -\ln 2 - \frac{3}{2} + 3 + \ln 15 - \ln 10 = \frac{3}{2} + \ln(\frac{3}{4})$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[0,2]$ definierte Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t) = t^2(2-t)$ und $y(t) = (t+2)x(t)$.

a) Berechnen Sie α'. (Zur Orientierung $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 4t - 3t^2 \\ -4t^3 + 8t \end{pmatrix}$) (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale N an α im Punkte $\alpha(1/2)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt A der von α umschlossenen Fläche. (6 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $x'(t) = 4t - 3t^2$ und $y'(t) = x(t) + (t+2)x'(t) = 2t^2 - t^3 + (t+2)(4t - 3t^2) = 2t^2 - t^3 + 4t^2 - 3t^3 + 8t - 6t^2 = -4t^3 + 8t$

b) α ist genau bei $t = 0$ nicht regulär. $\alpha'(0) = \vec{0}$. Die einzige weitere Nullstelle von x' ist $t = 4/3$, wo aber y' keine Nullstelle hat, also ist α bei allen anderen Stellen regulär.

c) Es gilt $\alpha(1/2) = (\frac{3}{8}, \frac{15}{16})$. Ferner ist $\alpha'(1/2) = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 7/2 \end{pmatrix}$. Als Richtungsvektor der Normalen ist also $\begin{pmatrix} -14 \\ 5 \end{pmatrix}$ geeignet. So finden wir

$$N_{\alpha,1/2} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d) Die Sektorformel ergibt

$$\begin{aligned}
2A &= \int_0^2 \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ y(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt \\
&= \int_0^2 \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ (t+2)x(t) & x(t) + (t+2)x'(t) \end{vmatrix} dt \\
&= \int_0^2 x(t)^2 dt = \int_0^2 t^4(t-2)^2 dt = \int_0^2 (t^6 - 4t^5 + 4t^4) dt \\
&= \frac{2^7}{7} - \frac{2^7}{3} + \frac{2^7}{5} = \frac{2^7}{105}
\end{aligned}$$

Damit wird $A = \dfrac{64}{105}$.

Aufgabe 8 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big(e^s(t-1),\, e^t(s^2-t)\Big)$ und $f(x,y) := (x^3-3xy)y$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $\nabla h(2,1)$. (10 Punkte)

Lösung. a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2y - 3y^2 \\ x^3 - 6xy \end{pmatrix}$

b) $J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} e^s & e^s(t-1) \\ e^t(s^2-t) - e^t & 2se^t \end{pmatrix}$

c) Es gilt $\vec{g}(2,1) = (e, -e^2)$ und $\nabla f(e,-e^2) = \begin{pmatrix} -6e^4 \\ 7e^3 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned} (\,h_t(2,1),\, h_s(2,1)\,) &= (\,f_x(e,-e^2),\, f_y(e,-e^2)\,)\begin{pmatrix} e & e \\ -2e^2 & 2se^2 \end{pmatrix} \\ &= (\,-6e^4,\, 7e^3\,)\begin{pmatrix} e & e \\ -2e^2 & 2se^2 \end{pmatrix} = (\,-20e^5\,,\ 8e^5\,) \end{aligned}$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = 0$ und $x = 2$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := x(3-x)$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x$ berandet wird .

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie für $x \in [0, 2]$ das Integral

$$J(x) := \int_x^{x(3-x)} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

(5 Punkte)

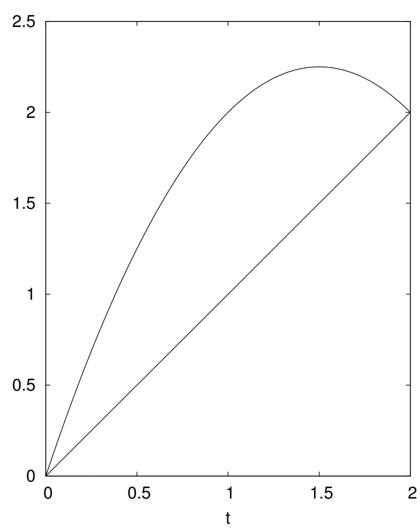
c) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_G \sqrt{\frac{x}{y}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(10 Punkte)

Lösung. a) Hier ist die Skizze:



b) Es gilt

$$J(x) = \int_x^{x(3-x)} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{x(3-x)} - 2\sqrt{x}$$

c)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^2 \sqrt{x}\, J(x) dx \\
&= 2\int_0^2 x\sqrt{3-x} dx - 2\int_0^2 x dx = 2\int_0^2 x\sqrt{3-x} dx - 4 \\
&= 2\int_1^3 (3-u)\sqrt{u} du - 4 = 6\int_1^3 \sqrt{u} du - 2\int_1^3 u^{3/2} du - 4 \quad \text{mit der Substitution } u = 3-x \\
&= \left(4u^{3/2} - \frac{4}{5}u^{5/2}\right)\Big|_1^3 - 4 = 12 \cdot \sqrt{3} - \frac{36}{5}\sqrt{3} - 4 + \frac{4}{5} - 4 = \frac{24\sqrt{3} - 36}{5} = \frac{12}{5}(2\sqrt{3} - 3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)

Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' - 12y' + 16y = 25te^t$$

a) Was ist das charakteristische Polynom P dieser DGL? (3 Punkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei 2.) (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Punkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung u_p ? (4 Punkte)

e) Berechnen Sie u_p mit diesem Ansatz. (6 Punkte)

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. a) Es gilt $P(X) = X^3 - 12X + 16 = (X + 4)(X - 2)^2$

b) Die Nullstellen von P sind -4 und 2 (2-fach)

c) Basislösungen sind nun e^{-4t}, e^{2t}, te^{2t}

d) Der Ansatz $u_p(t) = (at + b)e^t$ ist tauglich.

e) Wir rechnen aus:

$$u_p'(t) = (at + a + b)e^t, \qquad u_p''(t) = (at + 2a + b)e^t, \qquad u_p'''(t) = (at + 3a + b)e^t$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} u_p''' - 12u_p' + 16u_p &= (at + 3a + b - 12(at + a + b) + 16(at + b)\,)e^t \\ &= (5at - 9a + 5b)e^t \end{aligned}$$

Wählen wir $a = 5, b = 9$, also $u_p(t) = (5t + 9)e^t$, so wird $u_p''' - 12u_p' + 16u_p = 25te^t$.