Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **24.3.2015**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} 5^k \, \frac{4k-1}{k(k+1)} = 5 \cdot \left(\frac{5^n}{n+1} - 1 \right)$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|5x+1| < |2x+5|$ erfüllen.

Lösung. a) Induktionsbeginn $n = 1$: Beide Seiten sind gleich $\frac{15}{2}$.

Induktionsschritt: Gilt die Formel für n, so auch für $n+1$, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 5^k \, \frac{4k-1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} 5^k \, \frac{4k-1}{k(k+1)} + \frac{5^{n+1}(4n+3)}{(n+1)(n+2)} \\
&= 5 \cdot \left(\frac{5^n}{n+1} - 1 \right) + \frac{5^{n+1}(4n+3)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{5^{n+1}(n+2+4n+3)}{(n+1)(n+2)} - 5 \\
&= \frac{5^{n+2}(n+1)}{(n+1)(n+2)} - 5 = 5 \cdot \left(\frac{5^{n+1}}{n+2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$\begin{aligned}
x \in M \quad &\Leftrightarrow \quad 25x^2 + 10x + 1 < 4x^2 + 20x + 25 \\
&\Leftrightarrow \quad 21x^2 - 10x < 24 \Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{21}x < \frac{8}{7} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{5}{21} \right)^2 < \frac{8}{7} + (\frac{5}{21})^2 = \frac{8 \cdot 63 + 25}{21^2} = (\frac{23}{21})^2 \\
&\Leftrightarrow \quad |x - \frac{5}{21}| < \frac{23}{21}
\end{aligned}$$

Es folgt $M = (-\frac{6}{7}, \frac{4}{3})$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

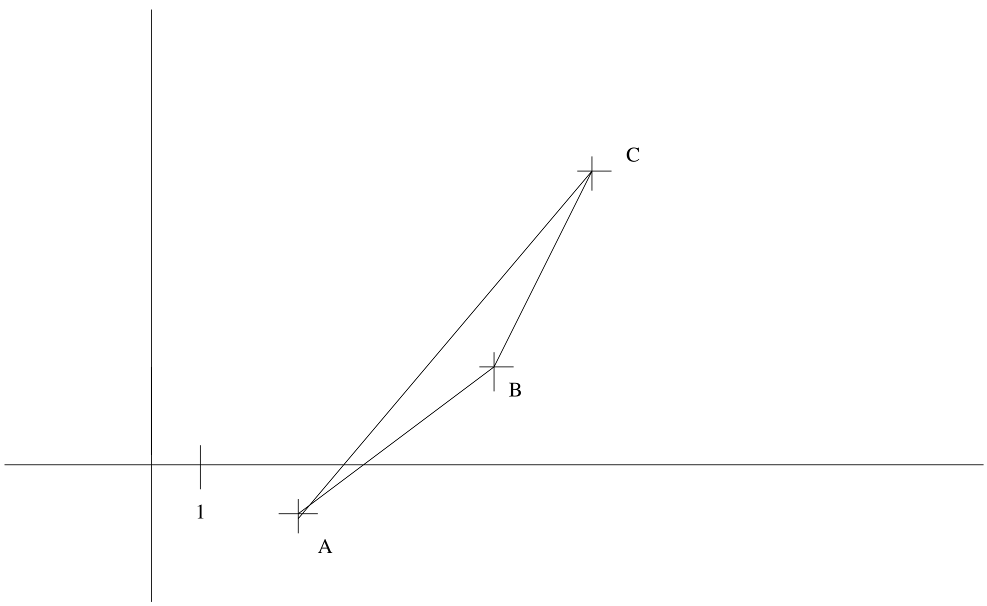
Gegeben sei ein Dreieck $\mathcal{D}$ mit Ecken bei $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $\vec{D}$ teile die Seite $\overline{BC}$ von $\vec{B}$ aus im Verhältnis 2 : 1. Weiter sei $\vec{M}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$.

a) Berechnen Sie $\vec{M}$ und $\vec{D}$ (3+5 Punkte)

b) Welchen Abstand d hat $\vec{C}$ von der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$? (8 Punkte)

c) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck $\mathcal{D}$? (4 Punkte)

Lösung. Das Dreieck sieht so aus:



smallskip

a) Es gilt $\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{C}}{2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \vec{B} + \frac{2}{3}(\vec{C} - \vec{B}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 25 \\ 14 \end{pmatrix}$

b) Die Gerade durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ist durch $G = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben, also haben wir

$$d = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \right|}{\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \|} = \frac{10}{5} = 2$$

c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $F = \dfrac{1}{2} \cdot \| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \| \cdot d = 5.$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -6 & -15 & 4 & -20 \\ -5 & -4 & 9 & -11 \\ t & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ mit einer Zahl $t \in \mathbb{R}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Rang von $\mathcal{A}$ und die Dimension des Nullraumes $N_{\mathcal{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von t.

b) Berechnen Sie für $t = 2$ Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Es sei $t = 2$ und V der Unterraum $V := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Berechnen Sie $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gilt sogar $N_{\mathcal{A}} = V$? (Antwort begründen)

(10+4+6 Pkte)

Lösung. a) Wir nehmen an der erweiterten Matrix Zeilenumformungen vor. Von der 2.Zeile subtrahieren wir $\dfrac{5}{6}$ mal die 1. Zeile und addieren zur 3. Zeile das $\frac{t}{6}$-fache der 1. Zeile. So entsteht die neue Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & -15 & 4 & -20 & -5 \\ 0 & \frac{17}{2} & \frac{17}{3} & \frac{17}{3} & -\frac{17}{6} \\ 0 & 7-\frac{5t}{2} & \frac{2t}{3} & 8-\frac{10t}{3} & 1-\frac{5t}{6} \end{array}\right)$$

Multiplikation der 2. Zeile mit $\dfrac{2}{17}$ ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & -15 & 4 & -20 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 7-\frac{5t}{2} & \frac{2t}{3} & 8-\frac{10t}{3} & 1-\frac{5t}{6} \end{array}\right)$$

Wir subtrahieren das $(7 - \frac{5t}{2})$-fache der 2. Zeile von der 3. Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & -15 & 4 & -20 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7(t-2)}{3} & -\frac{5(t-2)}{3} & -\frac{5(t-2)}{3} \end{array}\right)$$

Das ergibt

$$\operatorname{Rang}(\mathcal{A}) = \begin{cases} 2 & \text{, wenn} \quad t = 2 \\ 3 & \text{, wenn} \quad t \neq 2 \end{cases}$$

und damit wegen $\dim(N_{\mathcal{A}}) = 4 - \operatorname{Rang}(\mathcal{A})$ weiter

$$\dim(N_{\mathcal{A}}) = \begin{cases} 2 & \text{, wenn} \quad t = 2 \\ 1 & \text{, wenn} \quad t \neq 2 \end{cases}$$

b) Wir lösen das Gleichungssystem

$$-6a - 15b = 35, \qquad b = -\frac{5}{3}$$

Es wird dann $a = -\frac{5}{3}$.

c) Es gilt $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Also ist V ein Unterraum von $N_{\mathcal{A}} = V$. Da aber $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, haben die Räume $N_{\mathcal{A}}$ und V die Dimension 2, sind also schon gleich.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die Folge $(x_n)_n$ mit

$$x_n = \frac{2n^3+5n+6}{(n+3)(n+4)} - \frac{16n^2+6n+7}{8n+9}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_n mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$, für $x \geq 1$.

(i) Ist f monoton?

(ii) Bestimmen Sie die Wertemenge $W := \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \geq 1\}$.

(iii) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \longrightarrow [1, \infty)$ zu f.

(10+5+2+3 Pkte)

Lösung. a) Es gilt $x_n = y_n - z_n$, wobei $y_n = \dfrac{2n^3+5n+6}{(n+3)(n+4)}$, $z_n = \dfrac{16n^2+6n+7}{8n+9}$. Mit dem Divisionsalgorithmus erhalten wir

$$y_n = 2n - 14 + \frac{91n+174}{n^2+7n+12}, \qquad z_n = 2n - \frac{3}{2} + \frac{41}{2(8n+9)}$$

Das führt auf $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{25}{2}$.

b) Zu (i): Da $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}$, muss f streng monoton fallen.

Zu (ii): Da $f(x) \to 0$ mit $x \to \infty$, muss $W = (0, f(1)] = (0, 2]$ sein.

Zu (iii): Wir lösen die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf:

$$f(x) = y \Rightarrow \sqrt{x+8} = y + \sqrt{x} \Rightarrow x + 8 = x + y^2 + 2y\sqrt{x} \Rightarrow y^2 + 2y\sqrt{x} = 8$$

So folgt $x = \left(\dfrac{8-y^2}{2y}\right)^2$. Da $f^{-1} : W \longrightarrow [0, \infty)$ existiert, folgt $f^{-1}(y) = \left(\dfrac{8-y^2}{2y}\right)^2$.

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? $\left(\text{Zur Orientierung: } f'(x) = -\frac{(x-1)(x+3)}{(x^2+2x+5)^2} \right)$ (8 Pkte)

c) Untersuchen Sie lokale Extrema für f (5 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f bei $x_0 = -2$.

(4 Pkte)

Lösung. a) Da $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 > 0$, ist f überall auf $\mathbb{R}$ definiert.

b) Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$f'(x) = \frac{x^2+2x+5-(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+2x+5)^2} = -\frac{(x-1)(x+3)}{(x^2+2x+5)^2}$$

c) Es gilt $f'(x) > 0$ auf $(0,1)$ und $f'(x) < 0$, wenn $x > 1$, also hat f bei 1 ein lokales Maximum.

Weiter gilt $f'(x) < 0$ auf $(-\infty, -3)$ und $f'(x) > 0$ auf $(-3, 0)$, so dass wir erkennen können, dass f bei -3 ein lokales Minimum hat.

d) Die Gleichung der Tangente ist $T(x) = f(-2) + f'(-2)(x+2) = -\frac{1}{5} + \frac{3}{25}(x+2) = \frac{3x+1}{25}$.

Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \int_1^2 \frac{1}{e^x + 2e} dx$.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \frac{-\frac{4}{5}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{5}{4}}{x^2(x^2 + x + \frac{5}{4})}$. Wie lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von R? (3 Pkte)

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von R. (6 Pkte)

d) Berechnen Sie das Integral $I = \int_{1/2}^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{5x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + x + \frac{5}{4}} \right) dx.$

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Substituieren wir $x = \ln(t)$, so folgt

$$
\begin{aligned}
I &= \int_e^{e^2} \frac{1}{t(t+2e)} dt = \frac{1}{2e} \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2e} \right) dt \\
&= \frac{1}{2e} \left(1 - \ln \frac{e^2 + 2e}{3e} \right) = \frac{1}{2e} \left(1 - \ln \frac{e+2}{3} \right)
\end{aligned}
$$

b) Man muss

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + \frac{5}{4}}$$

probieren.

c) Es ist

$$R(x) = \frac{(A+C)x^3 + (A+B+D)x^2 + (\frac{5}{4}A + B)x + \frac{5}{4}B}{x^2(x^2 + x + \frac{5}{4}}$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich

$$B = 1, \quad A = -\frac{4}{5}B = -\frac{4}{5}, \quad C = -\frac{4}{5} - A = 0, \quad D = -\frac{4}{5} - A - B = -B = -1$$

Also wird

$$R(x) = -\frac{4}{5x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + x + \frac{5}{4}} .$$

d) Die Funktion $F(x) := -\frac{4}{5}\ln x - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg}(x + \frac{1}{2})$ ist Stammfunktion zu R, also

$$I = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = -\frac{4}{5}\ln(3) + \frac{4}{3} - \operatorname{arctg}(2) + \frac{\pi}{4}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[0,1]$ definierte Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t) = t(1-t)$ und $y(t) = (t-2)x(t)$.

a) Berechnen Sie α'. (Zur Orientierung $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ -3t^2+6t-2 \end{pmatrix}$) (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale N an α im Punkte $\alpha(1/4)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt A der von α umschlossenen Fläche. (6 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ (t-2)x'(t)+x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ (t-2)(1-2t)+t(1-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ -3t^2+6t-2 \end{pmatrix}$

b) Ist $t \neq \frac{1}{2}$, so ist $\alpha'(t) \neq \vec{0}$. Weiter ist $\alpha'(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Also ist α in jedem Punkt regulär.

c) Es gilt

$$\alpha(\frac{1}{4}) = \frac{3}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}, \qquad \alpha'(\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{16} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der gewünschten Normalen ist also $\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ und daher

$$N = \frac{3}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

d) Es gilt $2A = \int_0^1 \left| \det(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) \right| dt$. Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\det(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) &= \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ (t-2)x(t) & (t-2)x'(t)+x(t) \end{vmatrix} \\
&= (t-2)x(t)x'(t) + x(t)^2 - (t-2)x(t)x'(t) \\
&= x(t)^2 = t^2(1-t)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4
\end{aligned}$$

Somit ist

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t^2 - 2t^3 + t^4\right) dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60}$$

Aufgabe 8 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big((2s-1)\cos(\pi t),\ (t^2+2st)\sin(\pi t/2)\Big)$ und $f(x,y) := y(x^2+2xy)$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $h_s(1,1)$. (10 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $f(x,y) = (x^2y + 2xy^2)$ und damit

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 2y^2 \\ x^2 + 4xy \end{pmatrix}$$

b) Die Jacobimatrix von $\vec{g}$ ist

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} -(2s-1)\pi\sin(\pi t) & 2\cos(\pi t) \\ 2(t+s)\sin(\frac{\pi t}{2}) + \frac{\pi}{2}(t^2+2st)\cos(\pi t/2) & 2t\sin(\pi t/2) \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $\vec{g}(1,1) = (-1,3)$, also $\nabla f(\vec{g}(1,1)) = \begin{pmatrix} 12 \\ -11 \end{pmatrix}$. Weiter haben wir $J_{\vec{g}}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Mit der Kettenregel folgt nun

$$h_s(1,1) = f_x(-1,3)(g_1)_s(1,1) + f_y(-1,3)(g_2)_s(1,1) = 12\cdot(-2) + (-11)\cdot 2 = -46$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)

Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = 0$ und $x = 1$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := x(3 - 2x)$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x$ berandet wird .

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

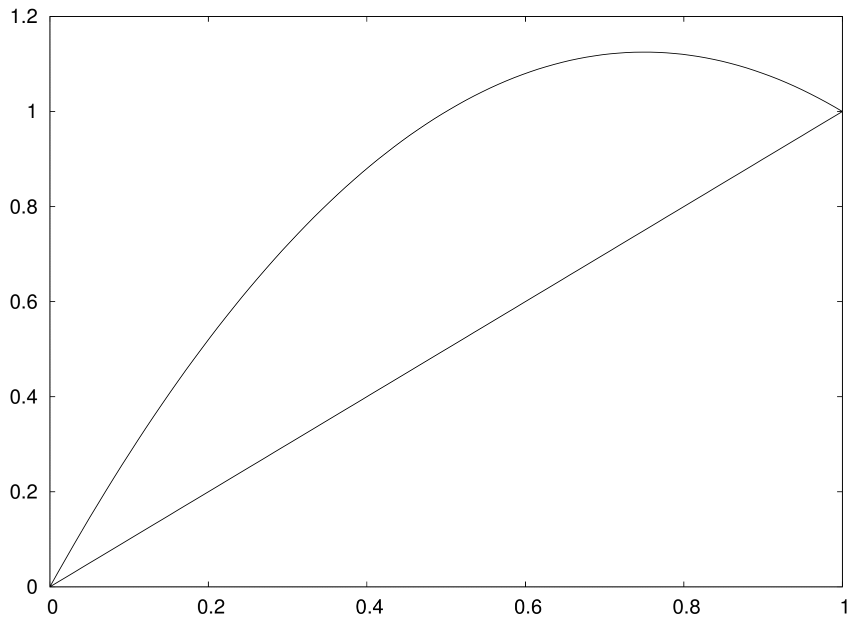
b) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_G \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+y}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(15 Punkte)

Lösung. a) Das Gebiet hat folgendes Aussehen:



b)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 x^{-1/2} \left(\int_x^{3x-2x^2} \frac{dy}{\sqrt{x+y}} \right) dx \\
&= 2 \int_0^1 x^{-1/2} \left(\sqrt{x+y} \Big|_x^{3x-2x^2} \right) dx \\
&= 2 \int_0^1 x^{-1/2} \left(\sqrt{4x - 2x^2} - \sqrt{2x} \right) dx = 2\sqrt{2} \int_0^1 \left(\sqrt{2-x} - 1 \right) dx \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{2-x}\, dx - 2\sqrt{2} \\
&= 2\sqrt{2} \left(-\frac{2}{3}(2-x)^{3/2} \Big|_0^1 - 1 \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{3} \right) \\
&= \frac{16 - 10\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)

Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' + 5y'' + 7y' + 3y = -16te^t$$

a) Was ist das charakteristische Polynom P dieser DGL? (3 Punkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei -1.) (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Punkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung u_p ? (4 Punkte)

e) Berechnen Sie u_p mit diesem Ansatz. (6 Punkte)

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. a) Es gilt $P(X) = X^3 + 5X^2 + 7X + 3$

b) Da $P(X) = (X+1)^2(X+3)$ hat P die Nullstellen -1 mit Ordnung 2 und -3 (einfach)

c) Die Basislösungen zur DGL sind $y_1(t) = e^{-t}, y_2(t) = te^{-t}$ und $y_3(t) = e^{-3t}$

d) Da $P(1) \neq 0$, muss der Ansatz lauten $y_p(t) = (at+b)e^t$.

e) Wir berechnen die Ableitungen zu y_p und finden

$$y_p'(t) = (a+b+at)e^t, \quad y_p''(t) = (2a+b+at))e^t, \quad y_p'''(t) = (3a+b+at)e^t.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$3a + b + at + 5(2a+b+at) + 7(a+b+at) + 3(at+b) = -16t$$

also

$$20a + 16b + 16at = -16t$$

Somit ist $a = -1$ und $b = \dfrac{5}{4}$. So finden wir $y_p(t) = (-t + \dfrac{5}{4})e^t$.