Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **25.3.2014**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{10}{(3k+7)(3k+10)} = \frac{n}{3n+10}$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|7x-1| < |x-2|$ erfüllen.

Lösung. a) Für $n = 1$ sind beide Seiten der behaupteten Gleichung gleich $\frac{1}{13}$.

Angenommen, die Summenformel gelte für n. Dann gilt sie auch für $n+1$, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{10}{(3k+7)(3k+10)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{10}{(3k+7)(3k+10)} + \frac{10}{(3(n+1)+7)(3(n+1)+10)} \\
&= \frac{n}{3n+10} + \frac{10}{(3n+10)(3n+13)} \\
&= \frac{1}{3n+10}\left(n + \frac{10}{3n+13}\right) = \frac{3n^2+13n+10}{(3n+10)(3n+13)} \\
&= \frac{n+1}{3(n+1)+10}\,,
\end{aligned}$$

denn $3n^2 + 13n + 10 = (n+1)(3n+10)$.

b) Genau dann gehört x zu M, wenn $(7x-1)^2 < (x-2)^2$, oder äquivalent, wenn $49x^2 - 14x + 1 < x^2 - 4x + 4$, also $48x^2 - 10x - 3 < 0$. Es genügt nun, die Gleichung $48x^2 - 10x - 3 = 0$ zu lösen. Sind $x_1 < x_2$ die Lösungen, so ist $M = (x_1, x_2)$ da der Leitkoeefizient gleich 48, also positiv ist. Aber die $48x^2 - 10x - 3 = 0$ ist mit $x^2 - \frac{5}{24}x = \frac{1}{16}$ äquivalent. Wir finden die Lösungen

$$x_1 = \frac{5}{48} - \sqrt{(\frac{5}{48})^2 + \frac{1}{16}} = \frac{5 - \sqrt{25+144}}{48} = -\frac{1}{6}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{25+144}}{48} = \frac{3}{8}$$

Somit ist $M = (-\frac{1}{6}, \frac{3}{8})$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck mit Ecken bei $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $\vec{D}$ teile die Seite $\overline{BC}$ von $\vec{B}$ aus im Verhältnis $4:1$. Weiter sei $\vec{M}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$.

a) Berechnen Sie $\vec{M}$ und $\vec{D}$ (2+3 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $\vec{S}$ der Geraden G_1 durch $\vec{A}$ und $\vec{D}$ und G_2 durch $\vec{B}$ und $\vec{M}$.

(10 Punkte)

c) In welchem Verhältnis wird die Strecke $\overline{AD}$ durch $\vec{S}$ von $\vec{A}$ aus geteilt?

(5 Punkte)

Lösung. a) $\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{C}}{2} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \vec{B} + \frac{4}{5}(\vec{C} - \vec{B}) = \frac{\vec{B}+4\vec{C}}{5} = \frac{8}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Es gilt $G_1 = \vec{A} + \mathbb{R}(\vec{D} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $G_2 = \vec{B} + \mathbb{R}(\vec{M} - \vec{B}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wir suchen Parameter $t, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir bilden das Skalarprodukt mit $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und finden $5 + 63t = 12$ und damit $t = \frac{1}{9}$. So finden wir, das $\vec{S} = \vec{A} + t\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Schnittpunkt zwischen G_1 und G_2 ist.

c) Es gilt $\|\vec{S} - \vec{A}\| = \frac{1}{9}\|\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}\|$ und $\|\vec{S} - \vec{D}\| = \|\frac{4}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{8}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\| = \frac{4}{45}\|\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}\|$. Das gesuchte Teilungsverhältnis ist damit $\frac{1}{9} : \frac{4}{45} = 5 : 4$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 8 \\ -7 & -6 & -4 & -5 \\ 11 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ t \end{pmatrix}$.

a) Für welches t ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ nicht-leer?

b) Berechnen Sie für dieses t Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Berechnen Sie für dieses t den Lösungsraum $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ (10+5+5 Pkte)

Lösung. a) In der erweiterten Matrix $(\mathcal{A}|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 18 & 12 & 11 & 8 & -9 \\ -7 & -6 & -4 & -5 & 7 \\ 11 & 6 & 7 & 3 & t \end{array}\right)$ subtrahieren wir die 1. von der 3. Zeile und erhalten die Matrix $\left(\begin{array}{cccc|c} 18 & 12 & 11 & 8 & -9 \\ -7 & -6 & -4 & -5 & 7 \\ -7 & -6 & -4 & -5 & t+9 \end{array}\right)$. Hierin subtrahieren wir die 2. von der 3. Zeile und finden $\left(\begin{array}{cccc|c} 18 & 12 & 11 & 8 & -9 \\ -7 & -6 & -4 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}\right)$. Dann addieren wir zur 2. Zeile die $\frac{7}{18}$-Fache der

1. Zeile und erhalten die Zeilenstufenform $\left(\begin{array}{cccc|c} 18 & 12 & 11 & 8 & -9 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{18} & -\frac{17}{9} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}\right)$. Das zeigt, dass genau dann $\mathcal{L}(\mathcal{A},\vec{b}) \neq \emptyset$ ist, wenn $t = -2$.

b) Wir lösen das vereinfachte Gleichungssystem $18a + 11b - 16 = -9, \qquad \frac{5b}{18} + \frac{34}{9} = \frac{7}{2}$ und finden $b = -1$ und $a = 1$.

c) Wir müssen nur das homogene System $18x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 8x_4 = 0, \qquad -\frac{4}{3}x_2 + \frac{5}{18}x_3 - \frac{17}{9}x_4 = 0$ lösen. Aus der 2. Gleichung folgt, dass $x_2 = \frac{5}{24}x_3 - \frac{17}{12}x_4$ und somit ist $x_1 = -\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4$ und damit $\mathscr{L}(\mathcal{A},\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathcal{N}_\mathcal{A}$ mit dem Nullraum

$$\mathcal{N}_\mathcal{A} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{24} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{17}{12} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die Folge $(x_k)_k$ mit

$$x_k = \frac{2k^2 - k + 1}{k+4} - \frac{12k^3 - 20k^2 - 23k + 1}{(2k+1)(3k+1)}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_k mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2\cos(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3})$. Klären Sie folgende Fragen:

(i) Welche Periode hat f?

(ii) Welche Nullstellen hat f innerhalb einer Periode?

(iii) Wo hat f innerhalb einer Periode seinen größten, wo seinen kleinsten Wert?

(iv) Skizzieren Sie den Graphen von f über einer Periode. (10+1+2+3+4 Pkte)

Lösung. a) Mit Polynomdivision finden wir

$$\frac{2k^2 - k + 1}{k+4} = 2k - 9 + \frac{37}{k+4}, \qquad \frac{12k^3 - 20k^2 - 23k + 1}{(2k+1)(3k+1)} = \frac{12k^3 - 20k^2 - 23k + 1}{6k^2 + 5k + 1} = 2k - 5 + \frac{-15k + 6}{6k^2 + 5k + 1}$$

Das ergibt

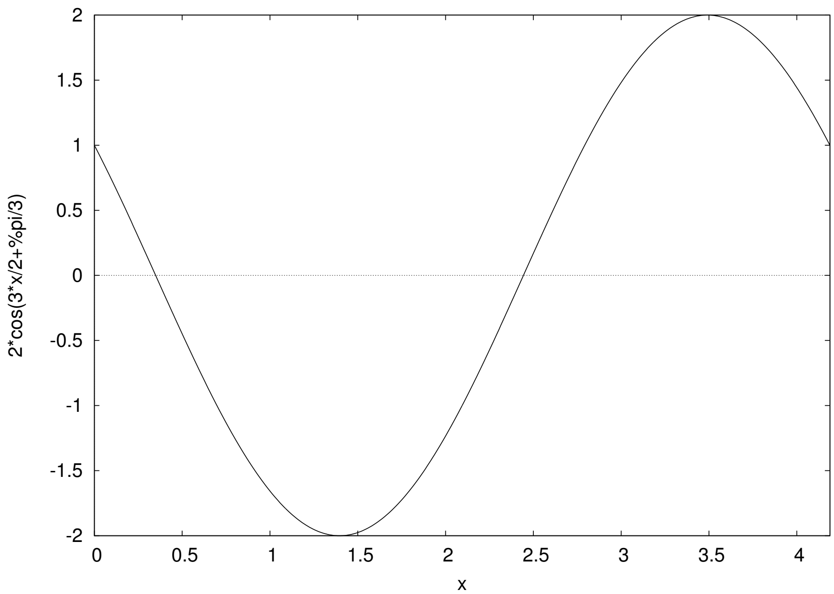
$$x_k = -4 + \frac{37}{k+4} + \frac{15k - 6}{6k^2 + 5k + 1} \longrightarrow -4$$

b) (i) Die Periode von f ist $\omega = \frac{4\pi}{3}$.

(ii) Es gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3} \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, also $x \in \{\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\}$.

(iii) Der größte Wert, nämlich 2, wird angenommmen, wo $\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3} = 2\pi$, also $x = \frac{10\pi}{9}$, der kleinste Wert wird von f dort angenommen, wo $\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3} = \pi$, also bei $x = \frac{4\pi}{9}$.

(iv) Hier ist der Graph von f:



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x/2}}{x^2 + 4x + 6}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? (8 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (5 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f bei $x_0 = 1$.

(4 Pkte)

Lösung. a) Wegen $x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2 > 0$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Wir rechnen mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\frac{1}{2}e^{-x/2}(x^2 + 4x + 6) - e^{-x/2}(2x + 4)}{(x^2 + 4x + 6)^2} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x/2}\,\frac{x^2 + 8x + 14}{(x^2 + 4x + 6)^2} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x/2}\,\frac{(x+4)^2 - 2}{(x^2 + 4x + 6)^2} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x/2}\,\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x^2 + 4x + 6)^2}, \quad x_1 = -4 - \sqrt{2},\, x_2 = -4 + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

c) So sehen wir, dass $f'(x) < 0$ auf $(-\infty, x_1)$, weiter ist $f'(x) > 0$ auf (x_1, x_2) und schließlich $f'(x) < 0$ auf (x_2, ∞).

Bei x_1 hat f ein lokales Minimum, bei x_2 ein lokales Maximum.

d) Es gilt $T_1 f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{1}{11\sqrt{e}} - \frac{23}{242\sqrt{e}}(x-1)$.

Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \displaystyle\int_1^2 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5e^2} dx$.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \dfrac{4x^2+17x+5}{x^2(2x+5)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von R?

(9 Pkte)

c) Berechnen Sie das Integral $I = \int_2^8 R(x)dx$.

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Mit der Substitutionsregel finden wir

$$I = \int_1^2 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5e^2} dx = \int_e^{e^2} \frac{2tdt}{t^2+5e^2} = \ln(t^2+5e^2)\Big|_e^{e^2} = \ln\frac{e^2+5}{6}$$

b) Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung für R lautet

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{2x+5} \\ &= \frac{Ax(2x+5)+B(2x+5)+Cx^2}{x^2(2x+5)} = \frac{(2A+C)x^2+(2B+5A)x+5B}{x^2(2x+5)} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $B=1, A=3, C=-2$, also

$$R(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{2x+5}$$

c) Es folgt aus b)

$$I = 3\ln x - \frac{1}{x} - \ln(2x+5)\Bigg|_2^8 = 3\ln 4 + \frac{3}{8} - \ln(7/3)$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[-1,1]$ definierte Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t) = t^2-1$ und $y(t) = (t-1)^2(t+1)$.

a) Berechnen Sie α'. (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale an α im Punkte $\alpha(3/4)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt der von α umschlossenen Fläche.

Lösung. a) Wir haben $x'(t) = 2t$ und $y(t) = (t-1)x(t)$, also $y'(t) = x(t) + (t-1)x'(t) = t^2-1+2t(t-1) = 3t^2-2t-1$, also

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-2t-1 \end{pmatrix}.$$

b) Wo α nicht regulär wäre, müsste $t = 0$ und gleichzeitig $3t^2 - 2t - 1 = 0$ sein, was unmöglich ist.

c) Es gilt $\alpha(3/4) = (-7/16,\, 7/64)$ und $\alpha\,'(3/4) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -13/16 \end{pmatrix}$, also weist die Normale an α bei $\alpha(3/4)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 13/16 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 13 \\ 24 \end{pmatrix}$. Die gesuchte Normale ist nun

$$N = \begin{pmatrix} -7/16 \\ 7/64 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 13 \\ 24 \end{pmatrix}$$

d) Mit der Sektorformel finden wir

$$\begin{aligned} 2A &= \int_{-1}^{1} \begin{vmatrix} t^2-1 & 2t \\ ((t^2-1)(t-1) & (3t+1)(t-1) \end{vmatrix} dt \\ &= \int_{-1}^{1} (1-t^2)(1-t) \begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 1 & 3t+1 \end{vmatrix} dt \\ &= \int_{-1}^{1} (1-t^2)(1-t)(1+t)dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^2 dt = \int_{-1}^{1} (1-2t^2+t^4)dt \end{aligned}$$

Also ist $A = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-2t^2+t^4)dt = \frac{8}{15}$.

Aufgabe 8 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big(e^{2t}(s-1),\ e^{3s}(t^2-st)\Big)$ und $f(x,y) := y(x^2-xy+y)$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $h_s(-1,1)$. (10 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $\nabla f = \begin{pmatrix} y(2x-y) \\ x^2-2xy+2y \end{pmatrix}$

b) $J_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} 2e^{2t}(s-1) & e^{2t} \\ (2t-s)e^{3s} & e^{3s}(3t^2-3st-t) \end{pmatrix}$

c) Es gilt mit der Kettenregel

$$h_s(-1,1) = f_x(\vec{g}(-1,1))(g_1)_s(-1,1) + f_y(\vec{g}(-1,1))(g_2)_s(-1,1)$$

und weiter $\vec{g}(-1,1) = (0, 2e^3)$. Weiter ist $f_x(0,2e^3) = -4e^6$ und $f_y(0,2e^3) = 4e^3$ und weiter $(g_1)_s(-1,1) = e^{-2}, (g_2)_s(-1,1) = 7e^3$ somit

$$h_s(-1,1) = -4e^4 + 28e^6$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)

Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = 0$ und $x = 3$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := x(4-x)$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x$ berandet wird.

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

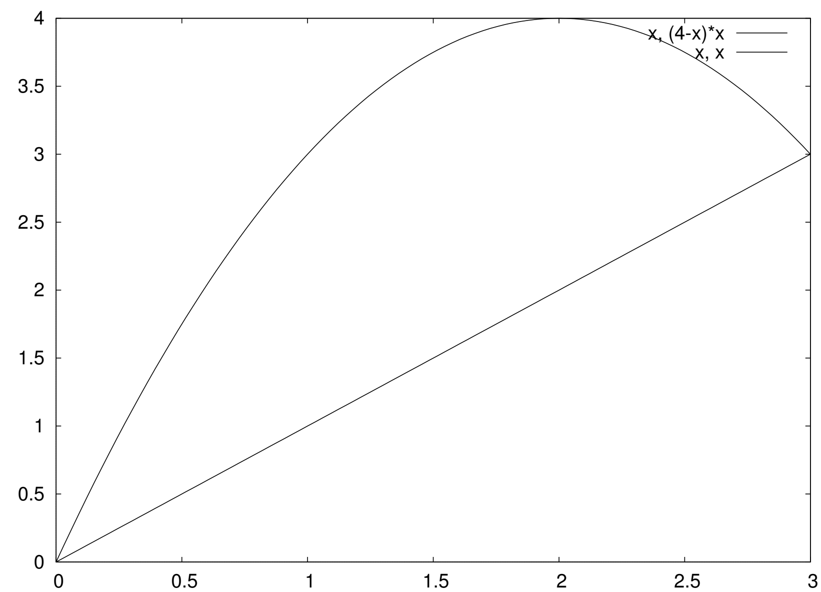
b) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_G \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}^{\,3}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(15 Punkte)

Lösung. a) Das Gebiet G sieht so aus:



b)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_G \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}^{\,3}} dG \\
&= \int_0^3 \sqrt{x} \left(\int_x^{x(4-x)} \frac{1}{\sqrt{x+y}^{\,3}} dy \right) dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{x}(-2) \frac{1}{\sqrt{x+y}} \Big|_x^{x(4-x)} dx \\
&= (-2) \int_0^3 \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{5x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) dx \\
&= (-2) \int_0^3 \left(\frac{1}{\sqrt{5-x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dx \\
&= 4\sqrt{5-x}\Big|_0^3 + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \\
&= 7\sqrt{2} - 4\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = te^t$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei -1.

Lösung. Das charakteristische Polynom P der DGL ist $P = X^3 - X^2 - 5X - 3 = (X-3)(X+1)^2$.

Für die homogene DGL ergeben sich die Fundamentallösungen e^{-t}, te^{-t}, e^{3t}, und die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet $y_h(t) = (a+bt)e^{-t} + ce^{3t}$.

Zur partikulären Lösung probieren wir $y_p(t) = (At+B)e^t$ und finden

$$y_p' = (At + A + B)e^t$$

$$y_p'' = (At + 2A + B)e^t$$

$$y_p''' = (At + 3A + B)e^t$$

Einsetzen ergibt

$$y_p''' - y_p'' - 5y_p{}' - 3y_p = (-8At - 4A - 8B)e^t$$

Soll das te^t werden, muss $A = -\frac{1}{8}$ und $B = \frac{1}{16}$ gewählt werden.

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y = (a+bt)e^{-t} + ce^{3t} + \frac{-2t+1}{16}e^t\,.$$