Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **19.3.2013**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{n+1}{3n+4}$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|2x-1| < |x+1|$ erfüllen.

Lösung. a) Für $n = 0$ sind beide Seiten gleich $\frac{1}{4}$. Angenommen, die Formel gelte für n.

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} + \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} \\
&= \frac{n+1}{3n+4} + \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} \\
&= \frac{1}{3n+4}\left(n+1+\frac{1}{3n+7}\right) \\
&= \frac{(n+1)(3n+7)+1}{(3n+4)(3n+7)} = \frac{3n^2+10n+8}{(3n+4)(3n+7)}
\end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass dies $= \frac{n+2}{3n+7}$ ist. Dazu beachten wir, dass $3n^2+10n+8 = (3n+4)(n+2)$ und kürzen in $\frac{3n^2+10n+8}{(3n+4)(3n+7)}$ durch $3n+4$.

b) Die Ungleichung ist zu jeder der folgenden Ungleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned}
(2x-1)^2 &< (x+1)^2 \\
4x^2-4x+1 &< x^2+2x+1 \\
3x^2-6x &< 0 \\
x^2-2x &< 0 \\
(x-1)^2 &< 1 \\
|x-1| &< 1
\end{aligned}$$

Das bedeutet $M = (0,2)$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei ein Viereck, dessen Ecken A, B, C und D durch die Ortsvektoren $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{C} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben sind.

a) Welchen Abstand hat $\vec{C}$ von der Seite durch A und B? (8 Punkte)

b) Bedeutet $\vec{M}_1$ den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$, $\vec{M}_2$ den Mittelpunkt von $\overline{BC}$, $\vec{M}_3$ den Mittelpunkt von $\overline{CD}$ und $\vec{M}_4$ den Mittelpunkt von $\overline{DA}$, so bilden Wie wir gehört haben, die Punkte $\vec{M}_1, ..., \vec{M}_4$ ein Parallelogramm. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt. (12 Punkte)

Lösung. a) Der gesuchte Abstand ist

$$d = \frac{|\det(\vec{C}-\vec{A},\, \vec{B}-\vec{A})|}{\|\vec{B}-\vec{A}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{7}{2\sqrt{2}}$$

b) Die Mittelpunkte der Seiten sind

$$\vec{M}_1 = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \; \vec{M}_2 = \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 9/2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{M}_3 = \frac{\vec{C}+\vec{D}}{2} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 5 \end{pmatrix}, \; \vec{M}_4 = \frac{\vec{D}+\vec{A}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die gesuchte Parallelogrammfläche ist

$$F = \left| \det(\vec{M}_2 - \vec{M}_1 \;,\; \vec{M}_4 - \vec{M}_1) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1/4 & -3/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix} \right| = \frac{25}{8}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & -4 \\ 2 & 10 & 17 & -7 \\ -3 & -22 & -22 & 14 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$.

a) Für welches t ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ nicht-leer?

b) Berechnen Sie für dieses t Zahlen $u, v \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Berechnen Sie für dieses t den Lösungsraum $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ (10+5+5 Pkte)

Lösung. a) In der erweiterten Matrix $(\mathcal{A}\,|\,\vec{b})$ subtrahieren wir von der 2. Zeile des 2-fache des 1. Zeile und zur 3. Zeile addieren wir 3 $\times$ die 1. Zeile. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 8 & -4 & t \\ 2 & 10 & 17 & -7 & 11 \\ -3 & -22 & -22 & 14 & -13 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 8 & -4 & t \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 11-2t \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -13+3t \end{array}\right)$$

Von der 3. Zeile subtrahieren wir das 2-fache der 2. Zeile und finden

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 8 & -4 & t \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 11-2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -35+7t \end{array}\right)$$

Somit ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ genau dann nicht-leer, wenn $t = 5$ gewählt wird.

b) Die gesuchten u, v müssen

$$u + 8v = 5, \quad v = 1$$

lösen, also ist $u = -3, v = 1$.

c) Wir müssen nur noch $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ berechnen. Genau dann ist $\vec{x} \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$, wenn

$$x_1 + 6x_2 = -8x_3 + 4x_4, \; -2x_2 = -x_3 - x_4$$

Das führt auf

$$x_2 = \frac{x_3 + x_4}{2}, \quad x_1 = -3(x_3 + x_4) - 8x_3 + 4x_4 = -11x_3 + x_4$$

Damit ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

und damit

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -11 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Gegeben sei die Folge

$$x_n = \frac{2n^3 + n^2 - n + 3}{n^2 - 1} - \frac{2n^2 + 2n - 2}{n + 2}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_n mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$. Klären Sie folgende Fragen:

(i) Welche Periode hat f?

(ii) Welche Nullstellen hat f innerhalb einer Periode?

(iii) Wo hat f innerhalb einer Periode seinen größten, wo seinen kleinsten Wert?

(iv) Skizzieren Sie den Graphen von f über einer Periode. (10+1+2+3+4 Pkte)

Lösung. a) Es gilt

$$2n^3 + n^2 - n + 3 = 2n(n^2 - 1) + n + n^2 + 3 = (2n + 1)(n^2 - 1) + n + 4$$

also

$$\frac{2n^3 + n^2 - n + 3}{n^2 - 1} = 2n + 1 + \frac{n + 4}{n^2 - 1}$$

Weiter ist

$$2n^2 + 2n - 2 = 2n(n + 2) - 2n - 2 = (2n - 2)(n + 2) + 2$$

und damit

$$\frac{2n^2 + 2n - 2}{n + 2} = 2n - 2 + \frac{2}{n + 2}$$

Also wird

$$x_n = 3 + \frac{n + 4}{n^2 - 1} - \frac{2}{n + 2} \longrightarrow 3$$

mit $n \to \infty$.

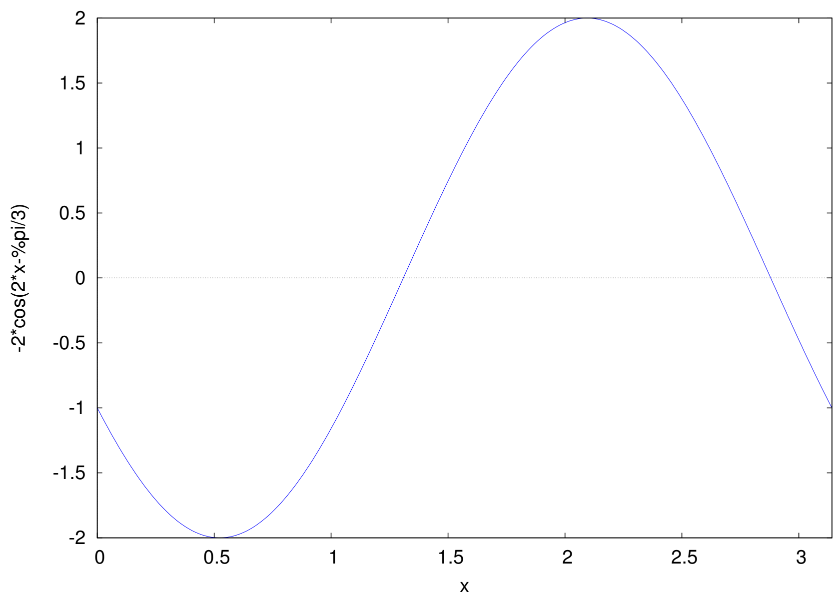
b) Zu (i) f hat die Periode π.

Zu (ii) $f(x) = 0$ genau dort, wo $2x - \pi/3 \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, also bei $x = \frac{5\pi}{12}$ und bei $x = \frac{11\pi}{12}$.

Zu (iii) Dort hat f seinen größten Wert, wo $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -1$, also $2x - \frac{\pi}{3} = \pi$ und damit $x = \frac{2}{3}\pi$. Der größte Wert von f ist dann $f(2\pi/3) = 2$.

Seinen kleinsten Wert nimmt f dort an, wo $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$, also $2x - \frac{\pi}{3} = 0$, d.h. bei $x = \frac{\pi}{6}$, also $f(\pi/6) = -2$.

Zu (iv) Der Graph von f:



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x+3} \cdot e^{-x/3}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? (6 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (6 Pkte)

d) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(5 Pkte)

Lösung. a) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

b) Es gilt

$$f'(x) = \frac{(x+3)(-\frac{1}{3}) - 1}{(x+3)^2} \cdot e^{-x/3} = -\frac{x+6}{3(x+3)^2} \cdot e^{-x/3}$$

c) Es gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -6$. Links von -6 ist $f'(x) > 0$ und rechts davon ist $f'(x) < 0$, also liegt ein lokales Maximum vor. Weitere lokale Extrema sind nicht vorhanden.

d) Es gilt

$$T_{2,0}f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{5}{54}x^2$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral

$$I := \int_0^2 \frac{e^{-x}dx}{2e^{-x}+1}$$

(6 Pkte)

b) Sei $R(x) = \dfrac{4x^2-x-6}{(x-2)(x^2+4)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von R?

(5 Pkte)

c) Berechnen Sie eine Stammfunktion für R auf $(-\infty, 2)$.

(10 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Es ist

$$I = \int_0^2 \frac{e^{-x}dx}{2e^{-x}+1} = \int_{e^{-2}}^1 \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{2}\ln(2t+1)\Big|_{e^{-2}}^1 = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{1+2e^{-2}})$$

b) Wir versuchen

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(x-2)(Bx+D)}{(x-2)(x^2+4)} \\ &= \frac{Ax^2+4A+Bx^2+(D-2B)x-2D}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+(D-2B)x+4A-2D}{(x-2)(x^2+4)} \end{aligned}$$

Somit ist

$$4x^2-x-6 = (A+B)x^2+(D-2B)x+4A-2D$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$A+B=4, \qquad D-2B=-1, \qquad 4A-2D=-6$$

Das ergibt $B = 4-A$ und weiter $-1 = D-2(4-A) = D+2A-8, \quad 2A-D=-3$. Das führt auf

$$\begin{aligned} D+2A &= 7 \\ 2A-D &= -3 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A=1, D=5, B=3$. Also

$$R(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{3x+5}{x^2+4}$$

c) Es folgt

$$\begin{aligned} \int R(x)dx &= \ln(2-x) + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 5\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln(2-x) + \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \frac{5}{2}\text{arctg}(\frac{x}{2}) \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)

Gegeben sei die auf $[0, 2\pi)$ definierte Kurve $\alpha(t) = r(t)\vec{e}(t)$, wobei $\vec{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ in Polarkoordinaten, wobei $r(t) = e^{-\sin^2 t}$.

a) Berechnen Sie α'. (8 Punkte)

b) In welchen Punkten verläuft die Tangente an α senkrecht?

c) Berechnen Sie die Normale an α im Punkte $\alpha(\pi/6)$. (6+6 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$\alpha'(t) = r(t)\vec{e_\perp}(t) + r'(t)\vec{e}(t) = r(t)\Big(\vec{e_\perp}(t) - 2\sin t\,\cos t\,\cdot\vec{e}(t)\Big)$$

b) Es folgt aus a)

$$x'(t) = r(t)\Big(-\sin t - 2\sin t\,\cos t\,\cdot\cos t\Big) = -r(t)\,\sin t\Big(1 + 2\cos^2 t\Big)$$

und damit ist $x'(t) = 0$ genau dann, wenn $\sin t = 0$, also $t \in \{0, \pi\}$.

c) Es gilt $r(\pi/6) = e^{-1/4}$ und $\vec{e}(\pi/6) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$. Das ergibt $\alpha(\pi/6) = \frac{1}{2}e^{-1/4}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$.

Weiter ist

$$\alpha'(\pi/6) = \frac{1}{2}e^{-1/4}\Bigg(\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\Bigg) = \frac{1}{4}\,e^{-1/4}\begin{pmatrix}-5\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Die gesuchte Normale ist dann

$$N := \frac{1}{2}e^{-1/4}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big(3t - 2ts + s^2,\ 5t - 2s^2\Big)$ und $f(x,y) := y\ln(1 + x^2 + xy)$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) = f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $h_s(3,2)$. (10 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$f_x = \frac{y(2x+y)}{1+x^2+xy}$$
$$f_y = \ln(1+x^2+xy) + \frac{xy}{1+x^2+xy}$$

b)

$$J_{\vec{g}} = \begin{pmatrix}3-2s & -2t+2s\\5 & -4s\end{pmatrix}$$

c) Es gilt nach der Kettenregel, wenn wir $\vec{x}_0 := \vec{g}(3,2)$ setzen:

$$h_s(3,2) = f_x(\vec{x}_0)(g_1)_s(3,2) + f_y(\vec{x}_0)(g_2)_s(3,2)$$

Nun ist aber $\vec{x}_0 = (1,\,7)$ und weiter

$$f_x(1,\,7) = \frac{63}{9} = 7, \qquad f_y(1,\,7) = \ln 9 + \frac{7}{9}$$

und

$$(g_1)_s(3,2) = -2, \qquad (g_2)_s(3,2) = -8$$

Also erhalten wir

$$h_s(3,2) = 7\cdot(-2) + (\ln 9 + \frac{7}{9})\cdot(-8) = -\frac{126+56}{9} - 8\cdot\ln 9 = -\frac{182}{9} - 8\cdot\ln 9$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei

$$f(x) := \begin{cases} x(4-x) & \text{, wenn} \quad 0 \le x \le 2 \\ 6-x & \text{, wenn} \quad 2 \le x \le 6 \end{cases}$$

und G das Gebiet, das zwischen $x = 2$ und $x = 6$ von unten durch die x-Achse und von oben durch den Graphen von f berandet ist.

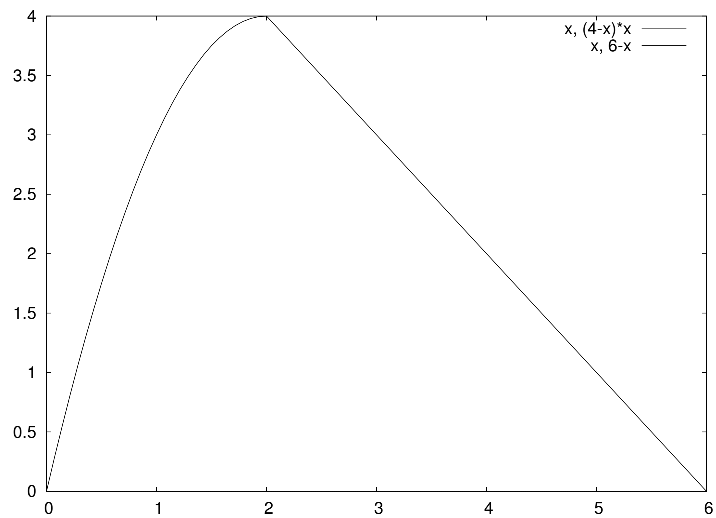
a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Pkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint_G \frac{1}{x+y} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges. (15 Pkte)

Lösung. a) Das Gebiet G hat die folgende Gestalt:



b) Wir schreiben $I = I_1 + I_2$ mit

$$I_1 := \iint_{G_1} \frac{1}{x+y} dG_1, \quad I_2 := \iint_{G_2} \frac{1}{x+y} dG_2\,,$$

wobei $G_1 := G \cap \{0 \le x \le 2\},\ G_2 = G \cap \{2 \le x \le 6\}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \left(\int_0^{x(4-x)} \frac{dy}{x+y} \right) dx = \int_0^2 \ln\left(\frac{x + x(4-x)}{x} \right) dx = \int_0^2 \ln(5-x) dx \\ &= -\left((5-x)\ln(5-x) - (5-x)\right)\Big|_0^2 \\ &= -\left(3\ln 3 - 3 - (5\ln 5 - 5)\right) = 5\ln 5 - 3\ln 3 - 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_2^6 \left(\int_0^{6-x} \frac{dy}{x+y} \right) dx = \int_2^6 \ln\left(\frac{x+6-x}{x} \right) dx \\ &= \int_2^6 \ln\left(\frac{6}{x}\right) dx = 4\ln 6 - (x\ln x - x)\Big|_2^6 \\ &= 4\ln 6 - (6\ln 6 - 6) + 2\ln 2 - 2 = -2\ln 6 + 4 + 2\ln 2 = 4 - 2\ln 3 \end{aligned}$$

Somit ist

$$I = 5\ln 5 - 3\ln 3 - 2 + 4 - 2\ln 3 = 2 + 5\ln\frac{5}{3}$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$3y''' + 10y'' + 4y' - 8y = e^{2t/3}$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei -2.

Lösung. Mit dem Hornerschema erhalten wir wir das charakteristische Polynom P, die Zerlegung

$$P = (3X - 2)(X + 2)^2$$

Somit werden die Lösungen der homogenen DGL durch

$$y_{\text{hom}}(t) = Ae^{2t/3} + (B + Ct)e^{-2t}$$

gegeben, wobei A, B und C beliebige reelle Koeffizienten sind.

Für die partikuläre Lösung versuchen wir

$$u_{\text{part}}(t) = ate^{2t/3}$$

Da $2/3$ eine einfache Nullstelle für P ist, können wir $a = \frac{1}{P'(2/3)} = \frac{3}{64}$ nehmen. Also ist die allgemeineLösung der Differenzialgleichung

$$y(t) = \frac{3}{64}te^{2t/3} + Ae^{2t/3} + (B + Ct)e^{-2t}$$