Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **20.3.2012**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass folgendes für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{n}{5(3n+5)}$$

(10 Pkte)

b) Berechnen Sie die Menge M aller Zahlen x, die die Ungleichung

$$|x^2 + x - 2| < \frac{7}{4}$$

erfüllen.

(10 Pkte)

Lösung. I.A.: $n = 1$. Beide Seiten haben den Wert $\frac{1}{40}$.

I.S. $n \longmapsto n+1$: Wir müssen zeigen, dass $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{n+1}{5(3n+8)}$ gilt. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} + \frac{1}{(3n+5)(3n+8)} \\
&= \frac{n}{5(3n+5)} + \frac{1}{(3n+5)(3n+8)} \\
&= \frac{1}{5(3n+5)}(n + \frac{5}{3n+8}) \\
&= \frac{1}{5(3n+5)} \frac{3n^2+8n+5}{3n+8} \\
&= \frac{n+1}{5(3n+8)}
\end{aligned}$$

denn $3n^2 + 8n + 5 = (n+1)(3n+5)$.

Zu b) Folgende Zeilen sind äquivalent

(1) $x \in M$

(2) $-\frac{7}{4} < (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 < \frac{7}{4}$

(3) $\frac{1}{2} < (x + \frac{1}{2})^2 < 4$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}} < |x + \frac{1}{2}| < 2$

(5) $x \in \Big((\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \infty) \cup (-\infty, -\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \Big) \cap (-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) = (-\frac{5}{2}, -\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2})$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
a) Gegeben seien die Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{D} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Gibt es eine Ebene E, die alle 4 Punkte enthält? Wenn ja, geben Sie diese Ebene an.

b) Die Gerade G gehe durch die beiden Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$. Welchen Abstand d hat dann der Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ von G? (10 +10 Pkte)

Lösung. a) Wir bestimmen die Ebene E durch $\vec{A}, \vec{B}$ und $\vec{C}$. Es gilt

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Frage ist nun: Liegt $\vec{D} \in E$? Dazu suchen wir nach Parametern t, s, so dass

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \vec{D} - \vec{A} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dazu muss $t = 2$ sein und $10 + s = -2$, also $s = -12$. Dann stimmt die Vektorgleichung in den Komponenten 2 und 3. Auch in Komponente 1 gilt sie, denn $2t + s = 4 - 12 = -8$. Somit liegt $\vec{D}$ in E.

b) Es gilt

$$G = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Abstand ist nun

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left\| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\|} \\ &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|}{9} = \frac{1}{3}\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{29}}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung, wobei

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 8 & -3 \\ -6 & 9 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}$$

(Zur Orientierung: $t = 2$)

b) Wieviele Elemente hat der Lösungsraum für dieses lineare Gleichungssystem ?

☐ Genau ein Element

☐ Endlich viele Elemente

☐ Unendlich viele Elemente

Kreuzen Sie eine Antwort an und begründen Sie sie. (15+5 Pkte)

Lösung. a) In der erweiterten Matrix $(\mathscr{A} \,|\, \vec{b})$ wird die 1. Zeile mit der 2. Zeile vertauscht.Es entsteht

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 8 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 1 & 2 & 1 \\ -6 & 9 & 6 & -7 & t \end{array}\right)$$

Anschließend subtrahieren wir das 2-fache der Zeile 1 von Zeile 2 und addieren das 3-fache der Zeile 1 zu Zeile 3. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 8 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -15 & 8 & -7 \\ 0 & 6 & 30 & -16 & t+12 \end{array}\right)$$

Dann addieren wir das 2-fache der Zeile 2 zu Zeile 3 und finden die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 8 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -15 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2 \end{array}\right)$$

So finden wir den Wert $t = 2$.

b) Der Lösungsraum hat die Form $\mathscr{L} = \vec{x}_0 + \mathscr{N}_{\mathscr{A}}$, wobei $\mathscr{N}_{\mathscr{A}}$ der Nullraum von $\mathscr{A}$ ist. Er hat in unserem Fall die Dimension $4 - \mathrm{Rang}(\mathscr{A}) = 2$. Daher hat $\mathscr{L}$ unendlich viele Elemente.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n := \frac{4n^3 + 8n + 1}{2(n+1)(n+2)} - 2n$$

Konvergiert die Folge $(x_n)_n$, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}\ln\left(2 + e^x\right), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie eine Menge $W \subset \mathbb{R}$, so dass $f : \mathbb{R} \longrightarrow W$ invertierbar ist und berechnen Sie ihre Umkehrfunktion.

(12+8 Pkte)

Lösung. a) Es gilt

$$x_n = \frac{4n^3 + 8n + 1 - 4n(n+1)(n+2)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4n^3 + 8n + 1 - 4n^3 - 12n^2 - 8n}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{-12n^2 + 1}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

Mit den Regeln aus der Vorlesung folgt $x_n \longrightarrow -6$.

b) Die Funktionen $t \longmapsto e^t + 2$ und $x \longmapsto \frac{1}{3}\ln x,\ x \geq 2$ wachsen monoton. Damit wächst auch f als Hintereinanderschaltung dieser 2 Funktionen monoton, und $f : \mathbb{R} \longrightarrow W := (\frac{1}{3}\ln 2, \infty)$ ist invertierbar. Lösen wir die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf, so erhalten wir

$$f^{-1}(y) = \ln\left(e^{3y} - 2\right)$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x+2}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? (6 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (6 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an Graph (f) im Punkt $(3|f(3)\,)$. (5 Pkte)

Lösung. Mit der Quotientenregel finden wir

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3(x^2+x+2) - (3x+1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} \\
&= \frac{3x^2 + 3x + 6 - 6x^2 - 5x - 1}{(x^2+x+2)^2} = \frac{-3x^2 - 2x + 5}{(x^2+x+2)^2}
\end{aligned}
$$

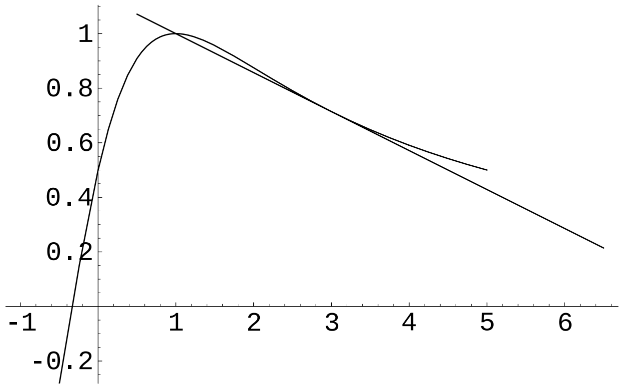
b) Wir formen um:

$$-3x^2 - 2x + 5 = -(x-1)(3x+5)$$

Auf $(-\infty, -\frac{5}{3})$ gilt $f' < 0$ und auf $(-\frac{5}{3},\, 1)$ ist $f' > 0$. Auf $(1, \infty)$ haben wir $f' < 0$. Daraus folgt, dass f bei $-\frac{5}{3}$ ein lokales Minimum und bei 1 ein lokales Maximum annimmt.

c) Die Gleichung der gesuchten Tangenten lautet $y = f(3) + f'(3)(x-3)$. Nun ist $f(3) = \frac{5}{7}$ und $f'(3) = -\frac{28}{14^2} = -\frac{1}{7}$. Also lautet die gesuchte Tangentengleichung

$$y = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}(x-3) = \frac{-x+8}{7}$$



Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral $A := \int_1^2 xe^{-2x}dx$. (5 Pkte)

b) Bestimmen Sie zu

$$R(x) = \frac{2x^3 - 13x^2 + 28x - 19}{x^2 - 5x + 6}$$

die Asymptote, wenn $|x| \to \infty$.

(5 Pkte)

c) Berechnen Sie zu R eine Stammfunktion.

(10 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{2}xe^{-2x}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 e^{-2x}dx \\ &= \frac{1}{2}e^{-2} - e^{-4} + \frac{1}{4}(e^{-2} - e^{-4}) \\ &= \frac{3}{4}e^{-2} - \frac{5}{4}e^{-4} \end{aligned}$$

b) Mit Polynomdivision folgt

$$R(x) = 2x - 3 + \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}$$

Die gesuchte Asymptote ist also $y = 2x - 3$.

c) Der Partialbruchansatz für $\frac{x-1}{x^2-5x+6}$ lautet

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - 3A - 2B}{(x-2)(x-3)}$$

Das erfordert $A + B = 1$, $3A + 2B = 1$, woraus $A = -1$ und $B = 2$ folgt. So erhalten wir

$$R(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3}$$

und damit

$$\int R(x)dx = x^2 - 3x - \ln|x-2| + 2\ln|x-3|$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Gegeben sei die Kurve $\alpha(t) := \sin^2(3t)\Big(\cos t,\ \sin t\Big)$ für $t \in [0, 2\pi)$.

a) Wo ist α regulär, also $\alpha'(t) \neq \vec{0}$?

b) Berechnen Sie die Normale an diese Kurve an der Stelle $\alpha(\pi/4)$.

(10+10 Pkte)

Lösung. a) Mit $\vec{e}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\perp(t) := \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ und $r(t) = \sin^2(3t)$ folgt $\alpha(t) = r(t)\vec{e}(t)$ und damit

$$\alpha'(t) = r'(t)\vec{e}(t) + r(t)\vec{e}_\perp(t)$$

Da $\vec{e}(t)$ und $\vec{e}_\perp(t)$ zueinander senkrecht stehen, folgt aus $\alpha'(t) = \vec{0}$ stets, dass $r(t) = r'(t) = 0$ sein muss. So finden wir wegen $r'(t) = 6\sin(3t)\cos(3t)$ für α' die Nullstellen $t \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$. Genau an diesen Stellen ist α nicht regulär.

b) Es gilt

$$\alpha(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} r(\pi/4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

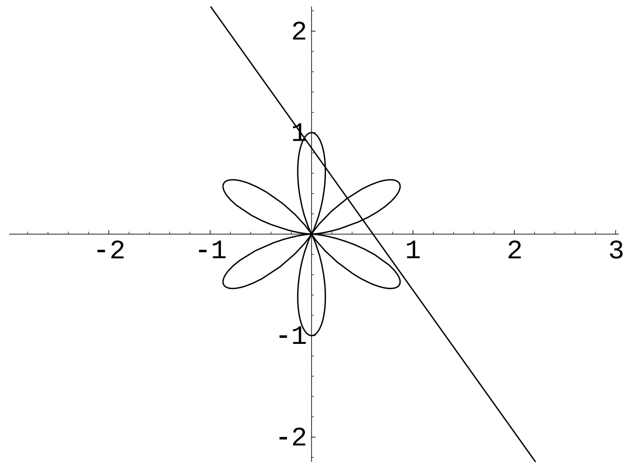
Weiter ist

$$\alpha'(\pi/4) \quad = \quad -\frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Normale ist daher

$$N = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Hier ist das Bild dazu:



Aufgabe 8 (20 Punkte)
a) Berechnen Sie für die folgende Funktion die linearisierte Funktion $\mathcal{L}_{f,\vec{x}^0}$ an der Stelle $\vec{x}^{\,0} = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$:

$$f(x_1, x_2) = e^{-2\cos(x_1+2x_2)}$$

(9 Pkte)

b) Sei $g(t,s) := (t + 2ts^2 - 3s,\, 4t^2 - 2ts - 3s^2)$ und $f(x,y) := x \cdot \ln(3 + x^2 + y^2)$. Berechnen Sie mit der **Kettenregel** die partielle Ableitung $(f \circ g)_s$ im Punkte $(t_0, s_0) := (-1, 1)$.

(11 Pkte)

Lösung. a) Es gilt

$$f_{x_1}(x) = 2e^{-2\cos(x_1+2x_2)} \sin(x_1 + 2x_2)$$

und

$$f_{x_2}(x) = 4e^{-2\cos(x_1+2x_2)} \sin(x_1 + 2x_2)$$

Die Linearisierte zu f bei $\vec{x}^{\,0}$ ist wegen

$$f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = 1, \quad f_{x_1}(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = 2, \qquad f_{x_2}(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = 4$$

also

$$\mathscr{L}_f(\vec{x}^{\,0}, \vec{x}) = 1 + 2(x_1 - \frac{\pi}{6}) + 4(x_2 - \frac{\pi}{6})$$

b) Die Kettenregel sagt, dass (mit $\vec{x}_0 := g(t_0, s_0)$)

$$(f \circ g)_s(-1,1) = f_x(\vec{x}_0) \cdot (g_1)_s(-1,1) + f_y(\vec{x}_0) \cdot (g_2)_s(-1,1) \tag{1}$$

Nun ist aber

$$\vec{x}_0 = (-6, 3)$$

und

$$(g_1)_s = 4ts - 3, \quad (g_1)_s(\vec{x}_0) = -7 \qquad (g_2)_s = -2t - 6s, \quad (g_2)_s(\vec{x}_0) = -4$$

Weiter ist

$$f_x = \ln(3 + x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{3 + x^2 + y^2}, \qquad f_x(\vec{x}_0) = \ln 48 + \frac{3}{2}$$

und

$$f_y = \frac{2xy}{3 + x^2 + y^2}, \qquad f_y(\vec{x}_0) = -\frac{3}{4}$$

Das, in (1) eingesetzt, ergibt

$$(f \circ g)_s(-1, 1) = -7(\ln 48 + \frac{3}{2}) - (-4) \cdot \frac{3}{4} = -7\ln 48 - \frac{21}{2} + 3 = -7\ln 48 - \frac{15}{2}$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei G das Gebiet, das für $0 \le x \le \frac{3}{2}$ zwischen den Graphen der Funktionen $f_o(x) = x(2 - x)$ und $f_u(x) = \frac{1}{2}x$ eingeschlossen wird.

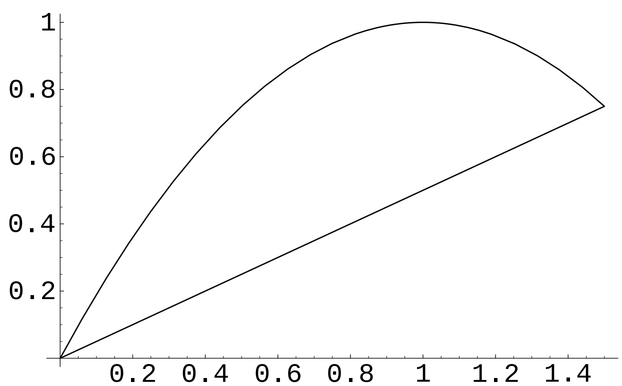
a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Pkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint\limits_G \frac{1}{x^2 + y} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges. (15 Pkte)

Lösung. a) Das Gebiet G hat die folgende Gestalt:



b)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3/2} \left(\int_{x/2}^{x(2-x)} \frac{dy}{x^2 + y} \right) dx \\ &= \int_0^{3/2} \ln \frac{x^2 + x(2 - x)}{x^2 + \frac{x}{2}} dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{3/2} \ln \frac{2x}{x^2+\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^{3/2} \ln \frac{4}{1+2x} dx = -\int_0^{3/2} \ln \frac{1+2x}{4} dx \\
&= 3\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^{3} \ln(1+t) dt \\
&= 3\ln 2 - \frac{1}{2}\Big((1+t)\ln(1+t) - 1 - t\Big)\Big|_0^3 \\
&= 3\ln 3 - 4\ln 2 + \frac{3}{2} = -\ln 2 + \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen u der Differenzialgleichung

$$2y''' + 7y'' + 8y' + 3y = 15e^{-4t} \ ,$$

für die $u(0) = 0$ gilt.

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei -1.

Lösung. Das charakteristische Polynom der DGL ist

$$P = 2X^3 + 7X^2 + 8X + 3 = (X+1)^2(2X+3)$$

wie etwa mit dem Hornerschema gefunden werden kann.

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_{\text{hom}}(t) = (a+bt)e^{-t} + ce^{-\frac{3}{2}t}$$

Für die noch benötigte partikuläre Lösung probieren wir

$$y_{\text{part}}(t) = Ae^{-4t}$$

Es folgt für A dann durch Einsetzen

$$A = \frac{15}{P(-4)} = -\frac{1}{3} \, .$$

Die allgemeine Lösung zur DGL ist dann $y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}}$. Die Bedingung $y(0) = 0$ erfordert nun $c = -a + \frac{1}{3}$, so dass die gesuchten Lösungen die Form

$$u(t) = (a+bt)e^{-t} - (a - \frac{1}{3})e^{-3t/2} - \frac{1}{3}e^{-4t}$$

haben müssen.