Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **22.3.2011**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)
a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass folgendes für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k k = \frac{3}{4}(3^n(2n-1)+1)$$

(10 Pkte)

b) Berechnen Sie die Menge M aller Zahlen $x \in (-2, \infty)$, die die Ungleichung

$$\sqrt{x+2} < |x+1|$$

erfüllen. (10 Pkte)

Lösung. a) Induktion nach n. Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich 3.

Angenommen, die Summenformel gelte für n, also

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k k = \frac{3}{4}(3^n(2n-1)+1)$$

Dann gilt sie auch für $n+1$, also

$$\sum_{k=1}^{n+1} 3^k k = \frac{3}{4}\left(3^{n+1}(2(n+1)-1)+1\right)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist gerade $\frac{3}{4}(3^{n+1}(2n+1)+1)$.

Die linke Seite dieser letzten Gleichung ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 3^k k &= \sum_{k=1}^{n} 3^k k + (n+1)\cdot 3^{n+1} \\
&= \frac{3}{4}(3^n(2n-1)+1) + (n+1)\cdot 3^{n+1} \\
&= \frac{3}{4}\Big(3^n(2n-1)+1 + \frac{4}{3}(n+1)\cdot 3^{n+1}\Big) \\
&= \frac{3}{4}(3^n(2n-1)+1+3^n(4n+4)\Big) \\
&= \frac{3}{4}\Big(3^n(6n+3)+1) \\
&= \frac{3}{4}(3^{n+1}(2n+1)+1)
\end{aligned}$$

Es besteht Übereinstimmung.

b) Folgende Umformungen sind äquivalent:

$x \in M$

$x + 2 < (x+1)^2$ und $x > -2$

$x^2 + x > 1$ und $x > -2$

$(x + \frac{1}{2})^2 > \frac{5}{4}$ und $x > -2$

$|x + \frac{1}{2}| > \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $x > -2$

Das ergibt

$$M = (-2, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$$

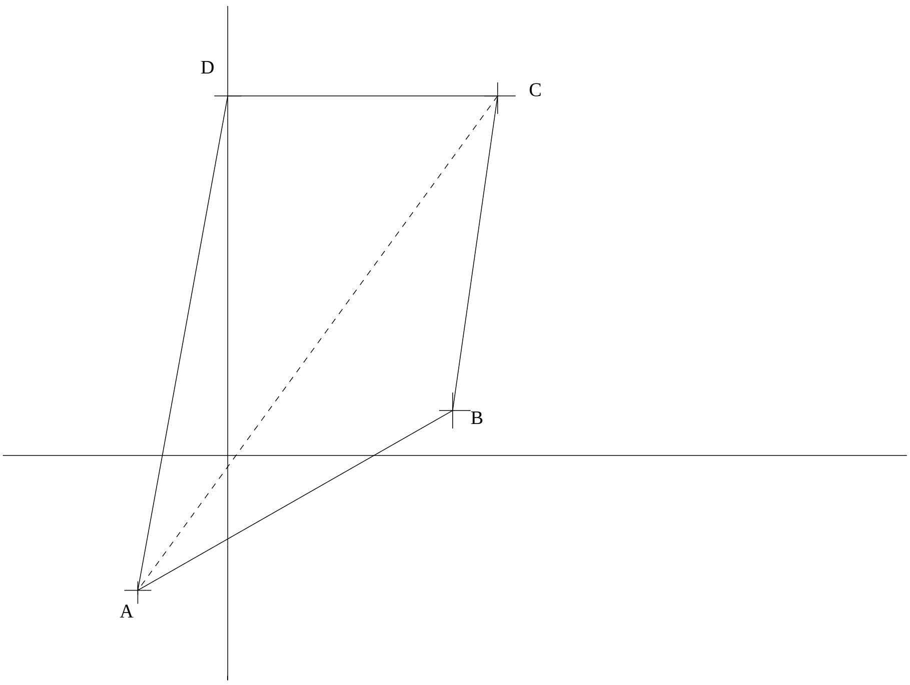
Aufgabe 2 (20 Punkte)
a) Welchen Flächeninhalt hat das Viereck mit den Ecken $A(-2,-3), B(5,1), C(6,8)$ und $D(0,8)$?

(8 Pkte)

b) Gegeben seien die Punkte $P(6,-2,2)$ und $Q(7,-4,0)$ im Raum $\mathbb{R}^3$. Welchen Abstand hat der Punkt $S(1,-1,9)$ von der Geraden G durch P und Q?

(12 Pkte)

Lösung. a) Das Bild sieht so aus:



Wir addieren die Flächeninhalte der Dreiecke F_1 mit Ecken A, C, D und F_2 mit Ecken A, B, C.

Der Flächeninhalt von F_1 ist

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} A-C, A-D \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -11 & -11 \end{pmatrix}\right| = 33$$

Der Flächeninhalt von F_2 ist

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{array}{c} A-C, A-B \end{array}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -8 & -7 \\ -11 & -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{45}{2}$$

Das Dreieck hat also die Fläche $F = 33 + 22,5 = 55,5$.

b) Wir schreiben $G = \vec{P} + \mathbb{R}\vec{v}$ mit $\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Der gesuchte Abstand ist dann

$$d = \frac{\|(\vec{P} - \vec{S}) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{3}\|(\vec{P} - \vec{S}) \times \vec{v}\|$$

Nun ist

$$\vec{P} - \vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad (\vec{P} - \vec{S}) \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Somit $d = \sqrt{26}$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-2t \\ -82-2t \\ -36 \\ t \end{pmatrix}$ mit der Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -11 & -1 \\ 5 & 45 & 55 & 5 \\ -2 & 29 & 18 & 4 \\ 5 & -2 & 15 & -1 \end{pmatrix}$$

lösbar? (Zur Orientierung: $t = -6$).

(9 Pkte)

b) Berechnen Sie zwei Zahlen $c, d \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung zu obigem linearen Gleichungssystem mit $t = -6$ ist.

(8 Pkte)

c) Wieviel Lösungen hat das in a) gegebene lineare Gleichungssystem zu $t = -6$. (ankreuzen) ? (3 Pkte)

☐ genau eine Lösung, ☐ endlich viele Lösungen, ☐ unendlich viele Lösungen

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung.

Zu a) In der Matrix

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -9 & -11 & -1 & 2-2t \\ 5 & 45 & 55 & 5 & -82-2t \\ -2 & 29 & 18 & 4 & -36 \\ 5 & -2 & 15 & -1 & t \end{array}\right)$$

addieren wir zur 2. Zeile und 4. Zeile das 5-fache der 1. Zeile, zur 3. Zeile das (-2)-fache der 1.Zeile . Es entsteht

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -9 & -11 & -1 & 2-2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -72-12t \\ 0 & 47 & 40 & 6 & -40+4t \\ 0 & -47 & -40 & -6 & 10-9t \end{array}\right)$$

Wir addieren die 3. Zeile zur 4. Zeile und erhalten

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -9 & -11 & -1 & 2-2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -72-12t \\ 0 & 47 & 40 & 6 & -40+4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30-5t \end{array}\right)$$

Dann vertauschen wir Zeile 2 und 3. Es entsteht

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -9 & -11 & -1 & 2-2t \\ 0 & 47 & 40 & 6 & -40+4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -72-12t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30-5t \end{array}\right)$$

Das zeigt: Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist genau dann nicht-leer, wenn $t = -6$ gewählt wird.

Zu b) Wir lösen

$$\mathcal{A}^{ZSF} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -64 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix

$$\mathcal{A}^{ZSF} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -11 & -1 \\ 0 & 47 & 40 & 6 \end{pmatrix}$$

Das ist mit

$$\begin{array}{rcl} -c-9d & = & 14 \\ 47d & = & -64 \end{array}$$

äquivalent.

Es wird dann $c = -\frac{82}{47},\ d = -\frac{64}{47}$.

c) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, denn

$$\mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) = \vec{x}_0 + \mathcal{N}$$

mit $\vec{x}_0$ wie unter b), und die Menge $\mathcal{N} = \{\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ ist ein 2-dimensionaler Unterraum.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Sei

$$a_n := \frac{n^3+1}{n^2+5n} - \frac{n^4+4}{n^3+2n^2}$$

Ist die Folge $(a_n)_n$ konvergent? (Antwort begründen)

(8 Pkte)

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{3}{2}\sin(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6})$$

Welche Periode hat f? Was ist die Amplitude von f? (2 Pkte)

Welche Nullstellen hat f innerhalb eines Periodenintervalls? (2 Pkte)

Welche Extremalstellen hat f innerhalb eines Periodenintervalls? (4 Pkte)

Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von f innerhalb eines Periodenintervalls. (4 Pkte)

Lösung. a) Wir rechnen aus, dass

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^3+1}{n^2+5n} - \frac{n^4+4}{n^3+2n^2} \\
&= \frac{(n^3+1)(n^3+2n^2) - (n^2+5n)(n^4+4)}{(n^2+5n)(n^3+2n^2)} \\
&= \frac{n^6+2n^5+n^3+2n^2-(n^6+4n^2+5n^5+20n)}{(n^2+5n)(n^3+2n^2)} \\
&= \frac{-3n^5+n^3-2n^2-20n}{(n^2+5n)(n^3+2n^2)} \\
&= \frac{p(n)}{q(n)}
\end{aligned}$$

mit $p(x) = -3x^5 + x^3 - 2x^2 - 20x$ und $q(x) = (x^2+5x)(x^3+2x^2)$. Beide Polynome haben den Grad 5, der Quotient aus ihren Leitkoeffizienten ist -3. Daher ist $\lim_{n\to\infty} a_n = -3$.

Zu b) Die Periode von f ist $\frac{3}{2} \cdot (2\pi) = 3\pi$. Ihre Amplitude ist $A = \frac{3}{2}$.

Genau dann ist $f(x) = 0$, wenn $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} = k\pi$ mit einer ganzen Zahl k gilt. Das heißt

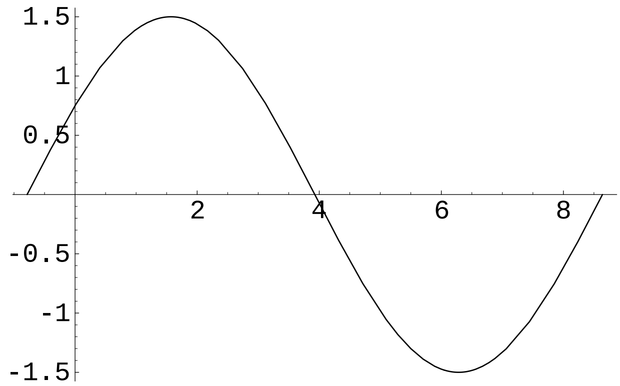
$$x = \frac{3}{2}(k\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}k\pi - \frac{\pi}{4}$$

Innerhalb des Intervalls $[-\pi/4, 11\pi/4)$ sind das die Stellen $-\pi/4$ und $5\pi/4$.

Genau dann ist $f(x) = \frac{3}{2}$, wenn $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ gilt, also für $x = \pi/2$.

Genau dann ist $f(x) = -\frac{3}{2}$, wenn $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ gilt, also für $x = 2\pi$.

Der Graph von f sieht so aus:



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} \sin x$$

auf dem Intervall $[0, 2]$.

a) Berechnen Sie die erste Ableitung f'. (7 Pkte)

b) Wo hat f lokale Extrema ? (7 Pkte)

c) Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen von f bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$? (6 Pkte)

Lösung. a) Wir rechnen aus:

$$f'(x) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x) + \cos(x)\ )e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}$$

b) Wo $\cos x = 0$, muss $\sin x \neq 0$ sein. Ist $f'(x) = 0$, so ist $\cos x \neq 0$. Dann muss aber $\mathrm{tg}(x) = \sqrt{3}$ werden. Es folgt dann $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Da nun weiter

$$f''(x) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) - \sin x\ )e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} - \frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x) + \cos x\ )e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}$$

wird

$$f''(\frac{\pi}{3} + k\pi) = -(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\frac{\pi}{3} + k\pi) + \sin(\frac{\pi}{3} + k\pi)\ )e^{-\frac{\frac{\pi}{3}+k\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\frac{\pi}{3})\cos(k\pi)+\sin(\frac{\pi}{3})\cos(k\pi)\ \right)e^{-\frac{\frac{\pi}{3}+k\pi}{\sqrt{3}}} \\
&= -\cos(k\pi)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\frac{\pi}{3})+\sin(\frac{\pi}{3})\ \right)e^{-\frac{\frac{\pi}{3}+k\pi}{\sqrt{3}}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(k\pi)e^{-\frac{\frac{\pi}{3}+k\pi}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{2(-1)^{k-1}}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\frac{\pi}{3}+k\pi}{\sqrt{3}}}
\end{aligned}
$$

Damit liegt an der Stelle $\frac{\pi}{3}+k\pi$ ein lokales Maximum für f, wenn k gerade ist und ein lokales Minimum für f, wenn k ungerade ist.

c) Die gesuchte Gleichung lautet

$$y = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2})$$

Daher berechnen wir

$$f(\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2\sqrt{3}}, \qquad f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

Es folgt für die Tangentengleichung

$$y = e^{-\pi/2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\pi/2\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{2})$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)
a) Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 := \int_0^{\pi/2} x\sin(2x+\frac{\pi}{4})dx$$

und

$$I_2 := \int_2^3 \frac{dx}{e^x+1}$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(je 6 Pkte)

b) Gegeben sei die rationale Funktion

$$R(x) := \frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x+2)^2(x^2+9)}$$

Geben Sie den geeigneten Ansatz für die Partialbruchzerlegung für R an. (8 Pkte)

Lösung. Zu a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{x}{2}\cos(2x+\ \pi/4)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2x+\ \pi/4)dx \\
&= -\frac{x}{2}\cos(2x+\ \pi/4)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4}(\sin(5\pi/4)-\sin(\pi/4)\,) \\
&= \frac{\pi-2}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_2^3 \frac{1}{e^x+1}dx \\ &= \int_{e^2}^{e^3} \frac{du}{u(u+1)} \\ &= \int_{e^2}^{e^3} \frac{du}{u} - \int_{e^2}^{e^3} \frac{du}{u+1} \\ &= 1 - \ln \frac{1+e^3}{1+e^2} \end{aligned}$$

b) Da

$$R(x) := \frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x+2)^2(x^2+9)}$$

einen doppelten Pol bei -2 hat, ist der Ansatz

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+9}$$

zu machen.

Aufgabe 7 (20 Punkte)
a) Es sei α die in Polarkoordinaten gegebene Kurve

$$\alpha(\phi) = r(\phi) \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

mit $r(\phi) = \cos(2\phi),\ 0 \le \phi < \pi$. (10 Pkte)

Bestimmen Sie die Tangente an diese Kurve im Punkte $\alpha(\pi/3)$.

b) Die Fläche zwischen der Kurve $y = \frac{1}{3}x^3$ und der y-Achse rotiere um die y-Achse, wobei $0 \le x \le 1$. Welche Mantelfläche hat die entstehende Drehfigur?

Hinweis: Die Stammfunktion zu $x\sqrt{1+x^4}$ ist gegeben durch $F(x) := \frac{1}{4}(x^2\sqrt{1+x^4} + \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}))$. (10 Pkte)

Lösung. a) Es gilt, wenn wir $e(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, und $e_\perp(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ und $r(\varphi) = \cos(2\varphi)$ setzen

$$\alpha(\varphi) = r(\varphi)e(\varphi)$$

also

$$\begin{aligned} \alpha'(\varphi) &= r'(\varphi)e(\varphi) + r(\varphi)e_\perp(\varphi) \\ &= -2\sin(2\varphi)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \cos(2\varphi)\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

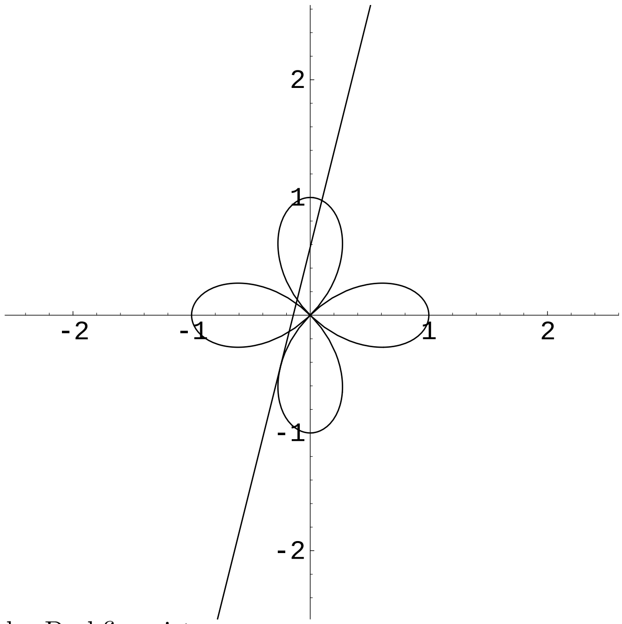
Nun ist aber $\alpha(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und

$$\alpha'(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 7 \end{pmatrix}$$

Die Tangente an α bei $\alpha(\pi/3)$ ist daher

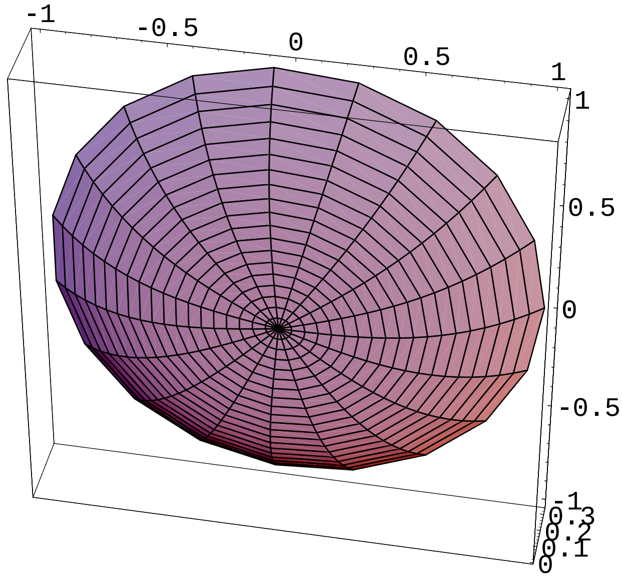
$$T = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hier ist das Bild dazu:



b) Die Mantelfläche der Drehfigur ist

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+f'(x)^2}dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x^4}dx, \quad u := x^2 \\ &= \frac{\pi}{2}F(1) = \frac{1}{2}\pi(\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}) \approx 3,6 \end{aligned}$$



-1
-0.5
0
0.5
1
1
0.5
0
-0.5
-1
0.3
0.2
0.1
0

Aufgabe 8 (20 Punkte)
a) Berechnen Sie für die folgende Funktion den Gradienten:

$$f(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_2 x_3^2}{1 + x_1^2 + x_3^2}$$

(8 Pkte)

b) Sei $g(t, s) := (2t^2 - 3ts, 5t - 7s^2)$ und $f(x, y) := \frac{x^2(1+y)}{2x+y^2}$. Berechnen Sie mit der **Kettenregel** die partielle Ableitung $(f \circ g)_t$ im Punkte $(t_0, s_0) := (1, 1)$. (12 Pkte)

Lösung. Zu a). Es gilt

$$f_{x_1}(\vec{x}) = -\frac{2x_1 x_2 x_3^2}{(1 + x_1^2 + x_3^2)^2}, \qquad f_{x_2}(\vec{x}) = \frac{x_3^2}{1 + x_1^2 + x_3^2}, \qquad f_{x_3}(\vec{x}) = \frac{2(1 + x_1^2) x_2 x_3}{(1 + x_1^2 + x_3^2)^2}$$

Zu b) Es gilt $g(1, 1) = (-1, -2)$ und für die Jacobimatrix von $f \circ g$:

$$J_{f \circ g}(1, 1) = J_f(-1, -2) \cdot J_g(1, 1)$$

Nun ist

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x, & f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2(1+y)x(x+y^2)}{(2x+y^2)^2}, & \frac{x^2(2x-2y-y^2)}{(2x+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

also

$$J_f(-1, -2) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

und

$$J_g(t, s) = \begin{pmatrix} 4t - 3s & -3t \\ 5 & -14s \end{pmatrix}$$

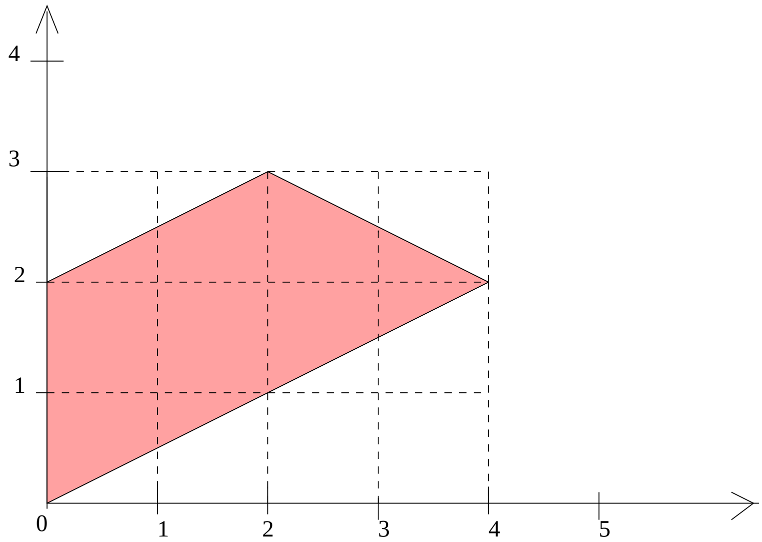
also

$$J_g(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Setzen wir das in die Kettenregel ein, so finden wir

$$(f \circ g)_t(1, 1) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -1$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei G das folgende Gebiet



Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint\limits_G \frac{1}{(1+x+y)^2} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

Lösung. Zwischen $x = 0$ und $x = 2$ wird G nach oben durch den Graphen von $y = \frac{x}{2} + 2$ und zwischen $x = 2$ und $x = 4$ durch den Graphen von $y = 4 - \frac{x}{2}$ begrenzt. Nach unten ist G durch den Graphen von $y = \frac{x}{2}$ begrenzt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}+2} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{4-\frac{x}{2}} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \right) dx \\
&= -\int_0^2 \left(\frac{1}{1+x+y} \Big|_{y=\frac{x}{2}}^{y=\frac{x}{2}+2} \right) dx - \int_2^4 \left(\frac{1}{1+x+y} \Big|_{y=\frac{x}{2}}^{y=4-\frac{x}{2}} \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(-\frac{1}{3+\frac{3x}{2}} + \frac{1}{1+\frac{3x}{2}} \right) dx + \int_2^4 \left(-\frac{1}{5+\frac{x}{2}} + \frac{1}{1+\frac{3x}{2}} \right) dx \\
&= -\int_0^2 \frac{1}{3+\frac{3x}{2}} dx - \int_2^4 \frac{1}{5+\frac{x}{2}} dx + \int_0^4 \frac{1}{1+\frac{3x}{2}} dx \\
&= -\frac{2}{3} \ln \left(3 + \frac{3x}{2} \right) \Big|_0^2 - 2 \ln \left(5 + \frac{x}{2} \right) \Big|_2^4 + \frac{2}{3} \ln \left(1 + \frac{3x}{2} \right) \Big|_0^4 \\
&= -\frac{2}{3} \ln 6 + \frac{2}{3} \ln 3 - 2 \ln 7 + 2 \ln 6 + \frac{2}{3} \ln 7 \\
&= \frac{4}{3} \ln (6/7) + \frac{2}{3} \ln 3 \approx 0.53
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$2y''' + y'' - 4y' - 3y = e^{\frac{3}{2}t} .$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. Das charakteristische Polynom ist

$$P(X) = 2X^3 + X^2 - 4X - 3 = (X+1)^2(2X-3)$$

Denn durch Raten finden wir $P(-1) = 0$ und mit dem Hornerschema

$$P(X) = (X+1)(2X^2 - X - 3) = (2X-3)(X+1)\,.$$

Die homogene DGL hat die allgemeine Lösung

$$y_h(t) = (a+bt)e^{-t} + ce^{3t/2}$$

mit beliebigen Konstanten a, b und c.

Es fehlt noch eine partikuläre Lösung y_p. Der geeignete Ansatz ist jetzt

$$y_p(t) = Ate^{\frac{3}{2}t}$$

Nun gilt

$$y_p' = A(1 + \frac{3}{2}t)e^{\frac{3}{2}t}, \qquad y_p'' = \frac{3}{2}A\left(2 + \frac{3}{2}t\right)e^{\frac{3}{2}t}, \qquad y_p''' = \frac{9}{4}A\left(3 + \frac{3}{2}t\right)e^{\frac{3}{2}t}$$

Einsetzen ergibt dann

$$2y_p''' + y_p'' - 4y_p' - 3y_p = \frac{25}{2}Ae^{\frac{3}{2}t}$$

Also muss $A = \frac{2}{25}$ gewählt werden.

Die allgemeine Lösung der DGL lautet also

$$y = (\frac{2t}{25} + c)e^{\frac{3}{2}t} + (a+bt)e^{-t}$$

mit Konstanten a, b und c.