Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **23.10.2010**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)
a) Zeigen Sie durch Induktion nach n, dass folgendes für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(k^2 - 3k\right) = 2n(n-1)$$

12 Pkte

b) Berechnen Sie die Menge M aller Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung

$$|2x + 13| < -x + 1$$

erfüllen.

8 Pkte

Lösung. a) Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich 0. Angenommen, die Formel gelte für n. Dann haben wir aber

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k \left(k^2 - 3k\right) &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(k^2 - 3k\right) - ((2n+1)^2 - 3(2n+1)) + (2n+2)^2 - 3(2n+2) \\
&= 2n(n-1) - (2n+1)(2n-2) + (2n+2)(2n-1) \\
&= 2n(n-1) - 4n^2 + 2n + 2 + 4n^2 + 2n - 2 \\
&= 2n(n-1) + 4n = 2(n+1)n
\end{aligned}$$

b) Es gilt $x \in M$ genau dann, wenn

$$-(-x+1) < 2x + 13 < -x + 1$$

Das ist mit

$$x - 1 < 2x + 13, \qquad 3x + 13 < 1$$

gleichwertig. Dies wieder ist äquivalent zu $x > -14$, $x < -4$. Es folgt

$$M = (-14, -4)$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche der Vektor $\vec{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1+x \\ x \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ einen Winkel von $60°(\approx \frac{\pi}{3})$ bildet.

12 Pkte

b) Welches Volumen hat das Tetraeder mit den Eckpunkten $A(2,3,-4), B(5,6,-2), C(5,3,5)$ und $D(2,0,-4)$?

8 Pkte

Lösung. a) Es gilt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3 + 2 + 2x - 2x = 5$, also muss die Gleichung

$$5 = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(60°) = \frac{3}{2}\sqrt{9 + (1+x)^2 + x^2} = \frac{3}{2}\sqrt{10 + 2x + 2x^2}$$

bestehen. Das führt auf die Gleichung

$$10 + 2x + 2x^2 = \frac{100}{9}$$

und dmaint auf

$$x^2 + x = \frac{5}{9}$$

Die Lösungen hierzu lauten

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{29}, \qquad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{29}$$

b) Das gesuchte Volumen ist

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\left|\det(\vec{D} - \vec{A}, \vec{D} - \vec{B}, \vec{D} - \vec{C})\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 0 & -2 & -9 \end{pmatrix}\right| = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Für welches $s \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$ mit Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

lösbar?

10 Pkte

b) Berechnen Sie den Nullraum von $\mathcal{A}$, also den Unterraum

$$\mathcal{N} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$$

10 Pkte

Lösung. a) Wir formen die erweiterte Matrix um: In $(\mathcal{A}, \vec{b})$

Von den Zeilen 2 und 3 subtrahieren wir das 2-fache der Zeile 1 und von Zeile 4 das 3-fache von Zeile 1. Es entsteht

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 9 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & -8 & -7 \\ 0 & -1 & 11 & 9 & -11 & s - 12 \end{array}\right)$$

Wir subtrahieren Zeile 2 von Zeile 4 und finden

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 9 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s - 5 \end{array}\right)$$

Genau dann ist also das Gleichungssystem lösbar, wenn $s = 5$ ist.

b) Es gilt $\vec{x} \in \mathcal{L}$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Das führt auf

$$x_3 = -\frac{5}{8}x_4 + x_5$$

$$x_2 = 11x_3 + 9x_4 - 11x_5 = \frac{17}{8}x_4$$

$$x_1 = -x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = -x_5$$

Somit wird

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_5 \\ \frac{17}{8}x_4 \\ -\frac{5}{8}x_4 + x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_1} + x_5 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_2}$$

und damit

$$\mathcal{L} = \operatorname{Lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$9^x - 12 \cdot 3^x = -27$$

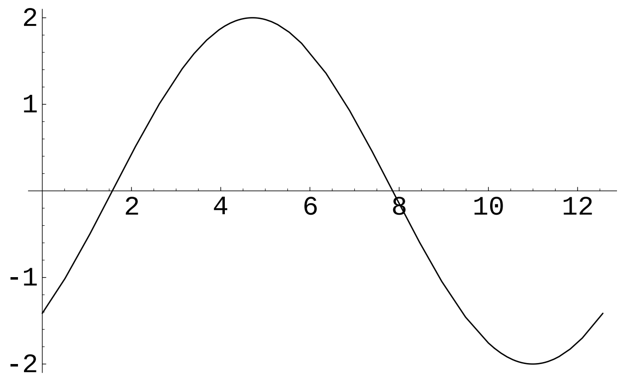
8 Pkte

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$

12 Pkte

Lösung. a) Die Zahl $y := 3^x$ löst die Gleichung $y^2 - 12y = -27$. Also ist $y = 3$ oder $y = 9$, was auf die Lösungen $x = 1, x = 2$ führt.

b) Hier ist der Graph der Funktion f:



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{4x+1}\,.$$

a) Was ist der Definitionsbereich von f ? 2 Pkte

b) Wo ist f monoton wachsend, wo monoton fallend ? 4+2 Pkte

c) Wo hat f lokale oder absolute Extrema ? 4 Pkte

d) Was ist das Taylorpolynom 2. Grades um $x_0 = -1/2$? 8 Pkte

Lösung. a) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-1/4\}$ definiert und hat eine Unstetigkeitsstelle bei $-1/4$.

b) Wir errechnen mit der Quotientenregel

$$f'(x) \quad = \quad \frac{-e^{-x}(4x+1) - 4e^{-x}}{(4x+1)^2} = -e^{-x}\,\frac{4x+5}{(4x+1)^2}$$

Das ergibt: $f'(x) > 0$ auf $(-\infty, -5/4)$ und $f'(x) < 0$ auf $(-5/4, \infty) \setminus \{-1/4\}$.

c) Ein lokales Maximum liegt bei $-5/4$. Wegen $f(-\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) = \frac{n}{4} e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{n}} \longrightarrow \infty$ mit $n \to \infty$ existiert kein absolutes Maximum.

d) Es gilt $f(-1/2) = -e^{1/2}, \quad f'(-1/2) = -3e^{1/2}$ und

$$f''(x) = e^{-x}\,\frac{4x+5}{(4x+1)^2} - e^{-x}\,\frac{4(4x+1) - 2 \cdot 4 \cdot (4x+5)}{(4x+1)^3}$$

also

$$f''(-1/2) = e^{1/2}\,(3 - 28) = -25e^{1/2}$$

Damit wird das 2. Taylorpolynom von f um $-1/2$:

$$T_{2,-\frac{1}{2}}f(x) = -e^{1/2} - 3e^{1/2}(x+\frac{1}{2}) - \frac{25}{2}e^{1/2}(x+\frac{1}{2})^2$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)
Gegeben sei die rationale Funktion

$$R(x) := \frac{2x^3+3}{x^3-x}$$

a) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung für R.

12 Pkte

b) Berechnen Sie das Integral

$$I := \int_2^4 R(x)dx$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

8 Pkte

Lösung. a) Es gilt

$$R(x) = \frac{2x^3-2x+2x+3}{x^3-x} = 2 + \frac{2x+3}{x^3-x}$$

Für den Term $\frac{2x+3}{x^3-x}$ wird der Ansatz

$$\frac{2x+3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x^3-x}$$

gemacht. Aus

$$2x+3 = A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

ergibt sich

$$A=-3, \qquad 2B=5, \qquad 2C=1$$

also

$$R(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

b) Es folgt

$$\int_2^4 R(x)dx = 4 - 3\ln 2 + \frac{5}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln(5/3) = 4 - 3\ln 2 + 2\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 5$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Gegeben sei die in Polarkoordinaten beschriebene ebene Kurve $\alpha(\varphi) = r(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$, für $\varphi \in [0, 2\pi]$, wobei

$$r(\varphi) = 1 + \cos(2\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

a) Wo ist α regulär? Zeigen Sie dazu, dass $\|\alpha'\|^2 = (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2$.

10 Pkte

b) Berechnen Sie die Normale an α in $\alpha(\pi/6)$. (Wie lautet die vektorielle Gleichung der Normalen?)

10 Pkte

Lösung. a) Es gilt

$$\alpha'(\varphi) = r'(\varphi)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + r(\varphi)\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$\|\alpha'(t)\|^2 = (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2\,,$$

da $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ aufeinander senkrecht stehen und der Pythagorassatz greift.

Nun ist aber $\alpha'(\varphi) = 0$ genau dann, wenn $r(\varphi) = r'(\varphi) = 0$, also, wenn

$$\cos(2\varphi) = -1, \qquad 2\sin(2\varphi) = 0$$

Es bleiben nur $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Außerhalb $M := \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ ist α regulär.

b) Es gilt $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(\pi/3) = 1/2$, also

$$\alpha(\pi/6) = r(\pi/6)\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+\cos(\pi/3))\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

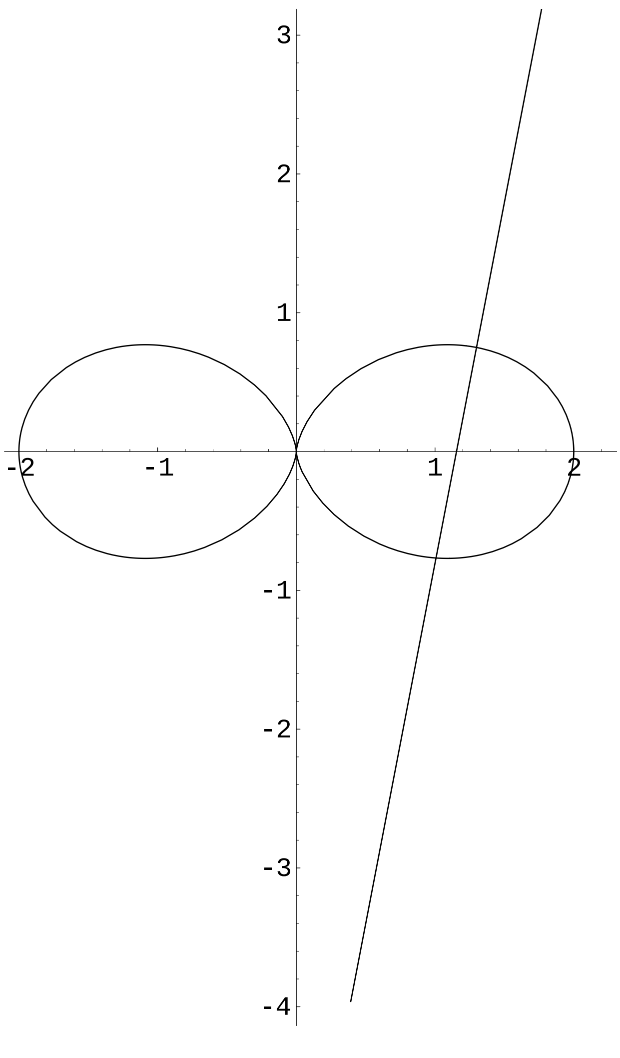
und

$$\alpha'(\pi/6) = -2\sin(\pi/3)\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -9 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Das liefert uns

$$N_{\alpha,\pi/6} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Hier ist die Kurve mit der gesuchten Normalen:



Aufgabe 8 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := y\cos(xy+2y^2)\,.$$

a) Berechnen Sie für $\vec{v} := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ die Richtungsableitung $\partial_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$, wobei $(x_0,y_0) = (\sqrt{\pi/8}, -\sqrt{\pi/2})$ sei.

6 Pkte

b) Was ist die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f an der Stelle $(0, \sqrt{\pi/4})$?

4 Pkte

c) Sei $g(t,s) := (2t-s, -t+3s)$. Berechnen Sie mit der **Kettenregel** die partielle Ableitung $(f\circ g)_s$ im Punkte $(t_0,s_0) := (\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2)$.

10 Pkte

Lösung. Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = -\sin(xy+2y^2)\begin{pmatrix}y^2\\y(x+4y)\end{pmatrix} + \cos(xy+2y^2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

a) Es gilt $x_0y_0 + 2y_0^2 = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$, und $y_0(x_0+4y_0) = x_0y_0 + 4y_0^2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = 7\pi/4$, also

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0,y_0) &= -\sin(3\pi/4)\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\ \frac{7\pi}{4}\end{pmatrix} + \cos(3\pi/4)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\ \frac{7\pi}{4}\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\ 1+\frac{7\pi}{4}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

denn $\sin(3\pi/4) = -\sin(-\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos(3\pi/4) = -\cos(-\pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ Es folgt

$$\partial_v f(x_0,y_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\vec{v}, \nabla f(x_0,y_0)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{10}}\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\ 1+\frac{7\pi}{4}\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{2+3\pi}{\sqrt{10}}$$

b) Die Richtung des stärksten Anstieges von f bei $(0, \sqrt{\pi/4})$ ist

$$\nabla f(0, \sqrt{\pi/4}) = -\pi\begin{pmatrix}1/4\\1\end{pmatrix}$$

c) Es sei $(x_0,y_0) := g(t_0,s_0)$. Dann ist $(x_0,y_0) = (\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$. und $J_g(t,s) = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Weiter ist

$$f_x(x_0,y_0) = -y_0^2 = -\pi, \qquad f_y(x_0,y_0) = -y_0(x_0+4y_0) = -\frac{9}{2}\pi$$

da $x_0y_0 + 2y_0^2 = 5\pi/2$, also $\sin(x_0y_0+2y_0^2) = 1, \cos(x_0y_0+2y_0^2) = 0$. Die Kettenregel liefert uns dann

$$(f\circ g)_s(t_0,s_0) = f_x(x_0,y_0)\cdot(-1) + f_y(x_0,y_0)\cdot 3 = \pi - \frac{27}{2}\pi = -\frac{25}{2}\pi$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei G das Gebiet, das zwischen den Werten $x = 1$ und $x = \pi$ von unten durch den Graphen von $f_1(x) := \sin x$ und von oben durch den Graphen der Funktion $f_2(x) = x \sin x$ berandet wird.

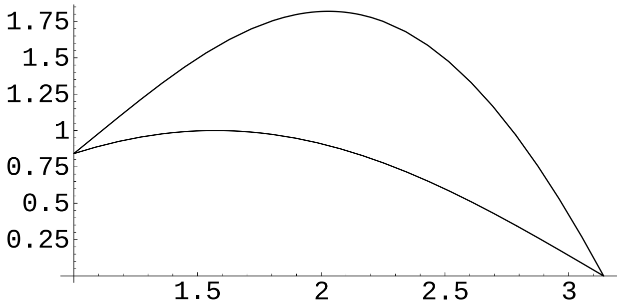
a) Skizzieren Sie das Gebiet G. 8 Pkte

b) Berechnen Sie das Integral

$$J = \iint\limits_G \frac{\sin x}{(\sin x + y)^2} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges. 12 Pkte

Lösung. a) Die Skizze ist diese



b)

$$\begin{aligned}
J &= \int_{x=1}^{\pi} \sin x \left(\int_{y=\sin x}^{x \sin x} \frac{dy}{(\sin x + y)^2} \right) dx \\
&= \int_{x=1}^{\pi} \sin x \left(\frac{-1}{\sin x + y} \Big|_{y=\sin x}^{x \sin x} \right) dx \\
&= \int_{x=1}^{\pi} \sin x \left(\frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{(1+x) \sin x} \right) dx \\
&= \int_{1}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{\pi - 1}{2} - \ln \frac{1+\pi}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = 15e^{-t}.$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

10 + 10 Pkte

Lösung. Das charakteristische Polynom $P(X) = X^3 + X^2 + 4X + 4$ hat die Nullstellen $X = -1$ und $X = 2j, X = -2j$. Daher ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL von der Form

$$u_h(t) = Ae^{-t} + B \cos(2t) + C \sin(2t)$$

mit Konstanten A, B und C.

Gesucht ist noch eine partikuläre Lösung u_p. Da $P(-1) = 0$, ist der Ansatz

$$u_p(t) = ate^{-t}$$

geboten. Wir finden

$$u_p'(t) = (a - at)e^{-t}$$
$$u_p''(t) = (-2a + at)e^{-t}$$
$$u_p'''(t) = (3a - at)e^{-t}$$

und durch Einsetzen, dass

$$\Big((3a - at) + (-2a + at) + 4(a - at) + 4at\Big)e^{-t} = 15te^{-t}$$

Das bedeutet, dass $5a = 15$, also $a = 3$ sein muss.

Die allgemeine Lösung der DGL lautet damit

$$u(t) = (3t + A)e^{-t} + B\cos(2t) + C\sin(2t)$$

mit Konstanten A, B und C.