Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **24.03.2009**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik für Ingenieure, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)
a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k(k+1) = 2n(n+1)$$

gilt.

b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge zu der folgenden Wurzelgleichung:

$$\sqrt{x} - \sqrt{2x+1} = -1 \; .$$

Lösung. a) Sei $a_n := \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \, k(k+1)$. Induktionsbeweis nach n. Es gilt $a_1 = 2 \cdot 1 \cdot (1+1) = 4$, ebenso ist $2 \cdot 1 \cdot (1+1) = 4$, also gilt die Formel für $n = 1$.

Angenommen, sie gelte für n. Dann haben wir

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + (-1)^{2n+1}(2n+1)(2n+2) + (-1)^{2n}(2n+2)(2n+3) \\ &= 2n(n+1) - (2n+1)(2n+2) + (2n+2)(2n+3) \\ &= (n+1)(\,2n - (2n+1) \cdot 2 + 2(2n+3)\,) \\ &= (n+1)(\,2n - 4n - 2 + 4n + 6\,) = (n+1)(2n+4) \\ &= 2(n+1)(n+2) \; , \end{aligned}$$

wie gewünscht.

b) Die Wurzelgleichung ist für $x \geq 0$ definiert. Soll x eine Lösung sein, so folgt durch Quadrieren

$$x = 2x + 1 + 1 - 2\sqrt{2x+1}$$

also

$$-x - 2 = -2\sqrt{2x+1}$$

Wir quadrieren erneut und erhalten die Bedingung

$$8x + 4 = x^2 + 4x + 4, \qquad \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$

Daraus ergibt sich, dass $x \in \{0, 4\}$.

Wir überprüfen ob diese Kandidaten die Wurzelgleichung lösen: Für $x = 0$ ist die linke Seite -1, ebenso die rechte Seite, also ist $x = 0$ eine Lösung. Für $x = 4$ haben wir links 2-3=-1 und rechts ebenfalls -1 stehen.

Die gesuchte Lösungsmenge ist also $\{0, 4\}$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)
a) Gegeben seien die Eckpunkte $A\,(2, 1, 4)$, $B\,(\frac{1}{2}, 1, 1)$ und $C\,(\frac{1}{2}, 1, \frac{7}{2})$ eines Dreiecks.

i) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreicks.

ii) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$.

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Lösung. a) Seien $\vec{v} = B - A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = C - A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ die Verbindungsvektoren zwischen A und B und zwischen A und C.

i) Der Flächeninhalt des Dreicks ist dann

$$F = \frac{1}{2}\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{15}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{15}{8}.$$

ii) Der gesuchte Winkel α erfüllt die Bedingung

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|} = \frac{15/4}{3 \cdot \sqrt{5/4}\sqrt{10/4}} = \frac{15}{15\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

so dass $\alpha = 45°$ sein muss.

b) Da $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -6 \neq 0$ ist, sind die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & 12 \\ 6 & 18 & -15 & 36 \\ -2 & -10 & 13 & -32 \\ 2 & 1 & 5 & -13 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ -45 \\ 43 \\ t \end{pmatrix}$$

lösbar?

Lösung. Wir subtrahieren in der erweiterten Matrix $(\mathcal{A}, \vec{b})$ von der 2. Zeile das 3-fache der ersten, addieren zur 3. Zeile die erste und subtrahieren die erste Zeile von der 4. Zeile. Es entsteht

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -5 & 12 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -20 & 28 \\ 0 & -5 & 10 & -25 & t+15 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen die Zeilen 2 und 4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -5 & 12 & -15 \\ 0 & -5 & 10 & -25 & t+15 \\ 0 & -4 & 8 & -20 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hierin subtrahieren wir von Zeile 3 das 4/5-fach der Zeile 2 und finden

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -5 & 12 & -15 \\ 0 & -5 & 10 & -25 & t+15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5}t+16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daran lesen wir ab, dass eine Lösung genau dann existiert, wenn $t = 20$ gewählt wird.

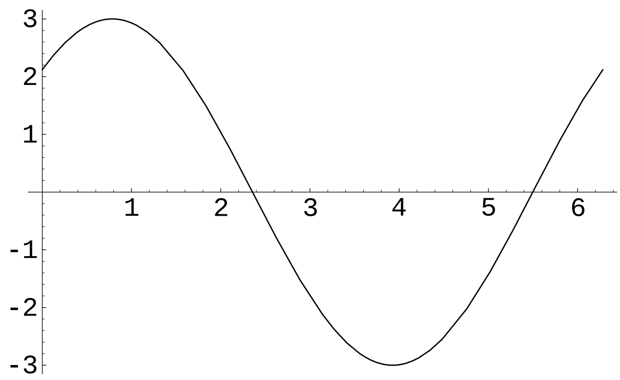
Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = 3\cos(x - \frac{\pi}{4})$$

auf $[0,\, 2\pi]$.

b) Begründen Sie, warum die Funktion $y = \ln\left(1 + e^x\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und auf ihrem Definitionsbereich umkehrbar ist. Bestimmen Sie die zugehörige Umkehrfunktion.

Lösung. a) Der Graph der Funktion $f(x) = 3\,\cos(x - \pi/4)$ sieht so aus:

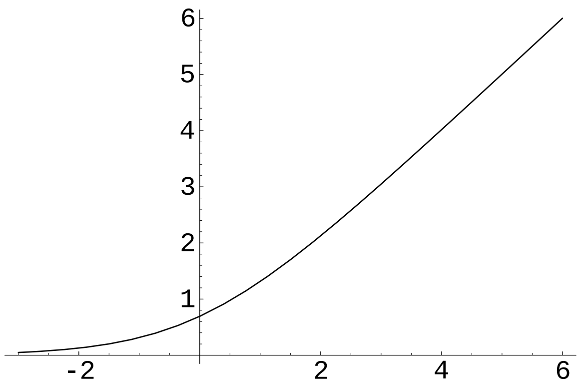


b) Da $1 + e^x$ überall Werte größer 1 hat, also erst recht positiv ist, ist die Funktion $x \longmapsto \ln(1 + e^x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Gleichung $y = \ln(1 + e^x)$ ist nach x durch $x = \ln(e^y - 1)$ auflösbar, sofern $y > 0$ ist. Die Inverse der gegebenen Funktion ist

$$h(y) := \ln(e^y - 1)\ ,$$

was auf $(0, \infty)$ definiert ist.

Hier ist der Graph von $x \longmapsto \ln(1+e^x)$:



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 4} \ .$$

a) Was ist der Definitionsbereich von f? Bestimmen Sie alle Extremalstellen dieser Funktion und geben Sie jeweils an, ob es sich um lokale Minimal- oder Maximalstellen handelt.

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - \frac{1}{6}}{(x-2)^2} \ .$$

c) Bestimmen Sie zu f das Taylorpolynom vom Grad 1 um die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

Lösung. a) Die Funktion f ist überall definiert, da $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$ überall. Extremalstellen kann es höchstens bei den Nullstellen von f' geben. Es ist

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 4 - x(2x+2)}{(x^2 + 2x + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 2x + 4)^2} = 0$$

genau dann, wenn $x \in \{-2, 2\}$. Nun ist aber $f'(x) > 0$, wenn $x \in (-2, 2)$ und $f'(x) < 0$, wenn $x > 2$. Damit hat f bei 2 ein lokales Maximum. Es gilt $f(2) = \frac{1}{6}$ und

$$\frac{1}{6} - f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4 - 6x}{6(x^2 + 2x + 4)} = \frac{(x-2)^2}{6(x^2 + 2x + 4)} \geq 0$$

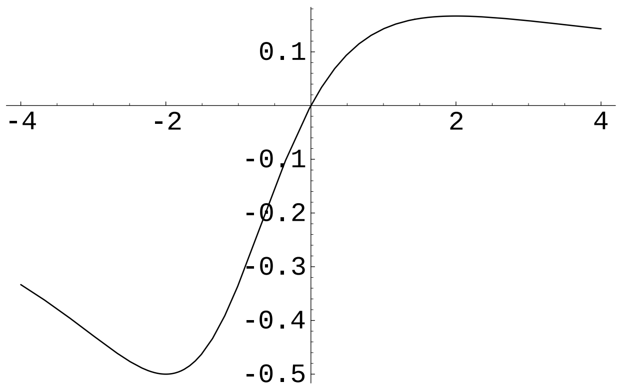
Bei 2 liegt also sogar ein absolutes Maximum.

Da für $x < -2$ gilt $f'(x) < 0$, folgt zusammen mit $f'(x) > 0$ auf $(-2, 2)$, dass f bei -2 ein lokales Minimum liegt. Es gilt $f(-2) = -\frac{1}{2}$ und sogar

$$f(x) + \frac{1}{2} = \frac{2x + x^2 + 2x + 4}{2(x^2 + 2x + 4)} = \frac{(x+2)^2}{2(x^2 + 2x + 4)} \geq 0$$

also hat f bei -2 ein absolutes Minimum.

Hier ist der Graph von f:



b) Es gilt

$$\frac{f(x)-\frac{1}{6}}{(x-2)^2} = -\frac{1}{6(x^2+2x+4)} \longrightarrow -\frac{1}{72}$$

wenn $x \to 2$.

c) Das Taylorpolynom p_1 lautet allgemein

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x$$

Es gilt aber $f(0) = 0$, und $f'(0) = \frac{1}{4}$. Also ist

$$p_1(x) = \frac{1}{4}x$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)
a) Schreiben Sie zu

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+1)}$$

den korrekten Ansatz für die Partialbruchzerlegung auf.

b) Berechnen Sie

$$J_1 = \int \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx\,.$$

c) Berechnen Sie

$$J_2 = \int_1^2 x(\ln\,x)^2\,dx$$

Benutzen Sie bei der Berechnung der Integrale keine Formelsammlung und geben Sie den vollständigen Lösungsweg an.

Lösung. a) Da 0 ein 2-facher Pol von f ist, muss der Ansatz lauten

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}\,.$$

b) Aus der Substitutionsregel folgt

$$J_1 = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2}\ln\,(x^2+1) + \operatorname{arctg} x$$

c) Mit partieller Integration folgt

$$J_2 = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^2 - \int_1^2 x^2\frac{1}{x}\ln x dx = 2\ln^2 2 - \int_1^2 x\ln x dx = 2\ln^2 2 - \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{x}{2}dx$$

$$= 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{3}{4}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Durch

$$x(t) = \sin t\,,\quad y(t) = 2\cos(\,4t - \frac{5}{6}\pi\,)\,,\quad t \in [-\pi,\,\pi]$$

sei eine Kurve in Parameterdarstellung gegeben.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Kurvenpunkte $(x(t), y(t))$ für den Parameterwert $t_1 = \frac{\pi}{4}$.

b) Untersuchen Sie, für welche Parameterwerte t die Kurve regulär ist.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an die Kurve für den Parameterwert $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Lösung. a) Sei $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\alpha(t_1) = \alpha(\pi/4) = \begin{pmatrix} \sin(\pi/4) \\ 2\cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$\dot\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -8\sin(4t - \frac{5}{6}\pi) \end{pmatrix}$$

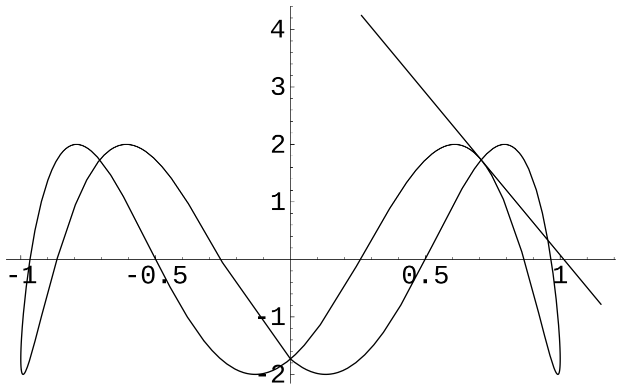
Auf $[-\pi,\,\pi]$ ist $\cos t = 0$ genau dann, wenn $t \in \{-\pi/2,\,\pi/2\}$. Aber dann ist $\sin(4t - \frac{5}{6}\pi) = -\sin(\frac{5}{6}\pi) \neq 0$. Also ist $\dot\alpha(t) = 0$ für k e i n $t \in [-\pi,\,\pi]$.

c) Die Tangente ist gegeben durch

$$T = \alpha(\pi/4) + \mathbb{R}\dot\alpha(\pi/4) = \begin{pmatrix} \sin(\pi/4) \\ 2\cos(\,\pi - \frac{5}{6}\pi\,) \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) \\ -8\sin(\pi - \frac{5}{6}\pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Die Kurve und die Tangente aus Teil c) haben folgendes Aussehen:



Aufgabe 8 (20 Punkte)
Sei $f(x,y) = (1+x+2y)\sin(x-y)$.

a) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f. Berechnen Sie die Richtungsableitungen von f in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

b) Durch $x(s,t) := -2s + 4t$, $y(s,t) = s + 3t$ werden neue Koordinaten eingeführt. Sei $g(s,t) := f(x(s,t)\,,\, y(s,t)\,)$.

Bestimmen Sie $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)$ und $\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung. a) Gesucht ist zunächst der Gradient von f. Es ist

$$f_x = \sin(x-y) + (1+x+2y)\cos(x-y), \qquad f_y = 2\sin(x-y) - (1+x+2y)\cos(x-y)$$

Die Richtungsableitung von f in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$f_{\vec{w}} = \langle \nabla f, \vec{w} \rangle = a(\sin(x-y) + (1+x+2y)\cos(x-y)) + b(2\sin(x-y) - (1+x+2y)\cos(x-y))$$

Das ergibt uns

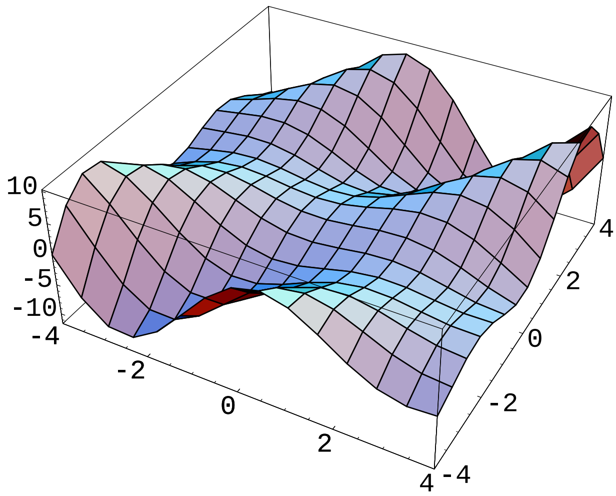
$$\begin{aligned} f_{\vec{u}} &= \langle \nabla f, \vec{w} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sin(x-y) + (1+x+2y)\cos(x-y) + 2\sin(x-y) - (1+x+2y)\cos(x-y)\Big) \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(x-y) \end{aligned}$$

und

$$f_{\vec{v}} = \langle \nabla f, \vec{w} \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sin(x-y) + (1+x+2y)\cos(x-y) - (\,2\sin(x-y) - (1+x+2y)\cos(x-y)\,)\Big) \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}\Big(-\sin(x-y) + 2(1+x+2y)\cos(x-y)\Big)
\end{aligned}
$$

Hier ist der Graph von f:



Zu b). Wir wenden die Kettenregel an:

$$
\begin{aligned}
g_s &= -2f_x(x(s,t), y(s,t)) + f_y(x(s,t), y(s,t)) \\
g_t &= 4f_x(x(s,t), y(s,t)) + 3f_y(x(s,t), y(s,t))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei G das Gebiet in der xy-Ebene, dass für $0 \leq x \leq 1$ durch die Graphen der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = x(1-x)$ begrenzt wird.

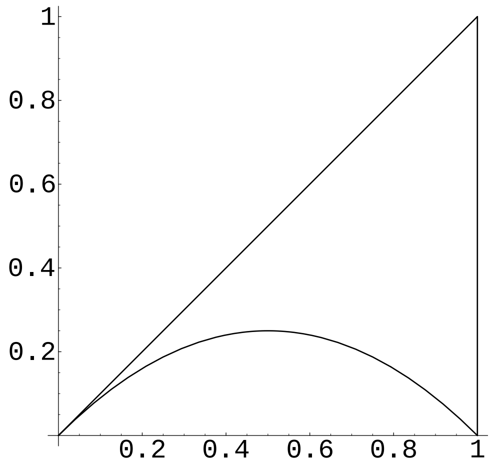
a) Skizzieren Sie das Gebiet G.

b) Berechnen Sie das Integral

$$
I = \iint_G \frac{\ln(2-x)}{(x+y)^2}\, dG
$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

Lösung. a)



Zu b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_G \frac{\ln(2-x)}{(x+y)^2}\,dG \\
&= \int_0^1 \ln(2-x)\left(\int_{x(1-x)}^{x} \frac{1}{(x+y)^2}dy\right)dx \\
&= \int_0^1 \ln(2-x)\left(\frac{-1}{x+y}\Big|_{x(1-x)}^{x}\right)dx \\
&= \int_0^1 \ln(2-x)\left(\frac{1}{2x-x^2}-\frac{1}{2x}\right)dx \\
&= \int_0^1 \ln(2-x)\frac{x^2}{2x(2x-x^2)}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x}dx \\
&= -\frac{1}{4}\ln^2(2-x)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln^2 2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$4y''' - 4y'' - y' + y = 9e^t\,.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung ?

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. Das charakteristische Polynom ist

$$P = 4X^3 - 4X^2 - X + 1 = (X-1)(4X^2-1)$$

mit den Nullstellen $1, \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$.

Zur Bestimmung einer die partikulären Lösung u_p probieren wir $u_p(t) = Ate^t$ und finden durch Einsetzen in die DGL

$$4u_p''' - 4u_p'' - u_p' + u_p = 3Ae^t\,;$$

denn es ist

$$u_p' = Ae^t(1+t), \qquad u_p'' = Ae^t(2+t), \qquad u_p''' = Ae^t(3+t)$$

Wir müssen also nur noch $A = 3$ wählen.

Die allgemeine Lösung der gegebenen DGL lautet dann

$$y(t) = 3te^t + \alpha e^t + \beta e^{t/2} + \gamma e^{-t/2}\,.$$