Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Pawlaschyk

Wuppertal, 13.08.2018

# Grundlagen der Mathematik (BSc Maschinenbau)

**Aufgabe 1.** *(5+5+5+5 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ⊠. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$

(2) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad |-x| = 3.$

(3) W ☐ F ☐ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|x-3| \leq |x| + 3$

(4) W ☐ F ☐ Für drei Mengen $A, B, C$ gilt:

$$x \in A \cap (B \cup C) \;\Leftrightarrow\; x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(5) W ☐ F ☐ Es gilt: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$

b) Zeigen Sie durch Induktion: $2^n > n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

c) Stellen Sie die folgenden Mengen mit Hilfe von Intervallen dar und zeichnen Sie sie jeweils in eine reellen Achse im Bereich $-4 \leq x \leq 4$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 1\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}.$$

d) Seien $A$, $B$, $C$ Teilmengen einer Menge $M$. Vereinfachen Sie:

$$((A \cup B)^c \cap C^c)^c$$

**Lösung:**

a) Lösung:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | W | ☐ | F | ⊠ |
| (2) | W | ⊠ | F | ☐ |
| (3) | W | ⊠ | F | ☐ |
| (4) | W | ☐ | F | ⊠ |
| (5) | W | ⊠ | F | ☐ |

(1) ist FALSCH, denn $x^2 = 1$ impliziert $x = 1$ oder $x = -1$.

(2) ist WAHR, denn $x^2 = 9$ ist äquivalent zu $|x| = 3$. Ferner ist $|-x| = |x|$.

(3) ist WAHR, denn die Dreiecksungleichung besagt: $|x-y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$

(4) ist FALSCH. Denn ist z.B. $A = \emptyset$, so steht links die leere Menge und rechts $B \cap C$.

(5) ist WAHR, denn die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, und aus $A \subset B$ folgt immer $A \cap B = A$.

b) **Induktionsanfang** $(n = 2)$: $4 = 2^2 > 2 + 1 = 3$

**Induktionsschritt** $n \mapsto n + 1$: Nach Voraussetzung ist $2^n > n + 1$, wobei $n \geq 2$ ist. Wir müssen zeigen, dass auch $2^{n+1} > (n + 1) + 1$ gilt. Wir berechnen:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{I.V.}}{>} (n + 1)2 = 2n + 2 = n + n + 2 > n + 2 = (n + 1) + 1$$

c) Es ist $A = [2 - 1, 2 + 1] = [1, 3]$ und $B = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

d)

$$\begin{aligned}
&((A \cup B)^c \cap C^c)^c \\
&= ((A^c \cap B^c) \cap C^c)^c \\
&= ((A^c \cap B^c)^c \cup (C^c)^c) \\
&= (A^c)^c \cup (B^c)^c \cup C \\
&= A \cup B \cup C
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ⊠. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{\pi}{2}$ genau dann, wenn sie senkrecht aufeinander sind.

(2) W ☐ F ☐ Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\det(\vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind.

(3) W ☐ F ☐ Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, so ist ihr linearer Spann $\mathrm{Lin}(\vec{x}, \vec{y})$ genau der gesamte Raum $\mathbb{R}^2$.

(4) W ☐ F ☐ Die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |x_1| = 1\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

(5) W ☐ F ☐ Der Durchschnitt zweier 2-dimensionaler Unterräume im $\mathbb{R}^4$ hat die Dimension 0, 1 oder 2.

b) Geben Sie einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ an, der auf $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht steht und zu $\vec{w}$ den Abstand $\|\vec{v} - \vec{w}\| = 3$ hat.

c) Sei die Ebene $E$ in der Paramterform

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Stellen Sie $E \subset \mathbb{R}^3$ in der Form $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = c\}$ dar.

**Lösung:**

a) Lösungen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | W | ☐ | F | ⊠ |
| (2) | W | ⊠ | F | ☐ |
| (3) | W | ⊠ | F | ☐ |
| (4) | W | ☐ | F | ⊠ |
| (5) | W | ⊠ | F | ☐ |

(1) ist FALSCH, denn sie sind genau dann senkrecht, wenn $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

(2) ist WAHR. Siehe Satz in der Vorlesung.

(3) ist WAHR. Ihr linearer Spann hat in diesem Fall die Dimension 2. Ein 2-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2$ kann nur der $\mathbb{R}^2$ sein.

(4) ist FALSCH, denn der Nullvektor ist nicht enthalten.

(5) ist WAHR. Sie schneiden sich nur in einem Punkt, dem Nullpunkt (Dimension=0):

z.B. $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Oder sie schneiden sich in einer Geraden durch den Ursprung (Dimension=1):

z.B. $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

Oder sie sind gleich (Dimension=2).

b) Folgendes Gleichungssystem sind zu lösen:

$$\begin{aligned} a - b &= 0 \\ (a-1)^2 + (b+1)^2 + 1^2 &= 9 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert $a = b$, was wir in die zweite Gleichung einsetzen können:

$$9 = (a-1)^2 + (a+1)^2 + 1^2 = 2a^2 - 2a + 2a + 2 + 1 = 2a^2 + 3$$

Das liefert $a^2 = 3$. Somit ist der gesuchte Vektor z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ oder $\vec{v} = \begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$.

c) Der auf der Ebene senkrecht stehende Vektor berechnet sich durch das Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 - 6\cdot 3\\6\cdot 1 - 2\cdot 0\\0\cdot 3 - 1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\6\\-1\end{pmatrix}$$

Ferner ist $c = \langle \vec{n}, \vec{a}\rangle = \langle \begin{pmatrix}-16\\6\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\rangle = -32 + 0 + 2 = -30$.

Das ergibt die Normalenform

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \begin{pmatrix}-16\\6\\-1\end{pmatrix}, \vec{x}\rangle = -30\}.$$

**Aufgabe 3.** *(7+3+6+4 Punkte)*

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bringen Sie die Matrix $A$ auf Zeilenstufenform.

b) Geben Sie den Rang von $A$ an, sowie die Dimension des homogenen Lösungsraums

$$L_H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

c) Bestimmen Sie eine Basis von $L_H$.

d) Berechnen Sie $A\vec{x}$, wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

**Lösung:**

a) Multiplikation der 1. Zeile mit 5 und Addition zur 2. Zeile, und Multiplikaiton der 1. Zeile mit $(-4)$ und Addition zur 3. Zeile liefern:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}$$

Mupliplikation der 2.Zeile mit 5 und der 3. Zeile mit 4 und Addition der beiden Zeilen liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile können wir noch durch $(-4)$ dividieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Der Zeilenrang der Matrix ist gleich 2. Daher ist die Dimension von $L_H$ gleich $4 - 2 = 2$ nach der Dimensionsformel.

c) Die zweite Zeile der Zeilenstufenform liefert

$$x_2 = 2x_3 - 3x_4$$

Das setzen wir in die erste Zeile ein und lösen nach $x_1$ auf:

$$x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2(2x_3 - 3x_4) - 3x_3 + 4x_4 = x_3 - 2x_4$$

Das setzen wir in $\vec{x}$ und erhalten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 2x_4 \\ 2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also $L_H = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d)

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4.** *(5+3+5+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ☒. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Ist $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

(2) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(3) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x) = |x|^2$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

(4) W ☐ F ☐ Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ hat eine Nullstelle.

(5) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ ist ungerade.

b) Seien $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{1 + x^3} e^x$ und $a_n = \frac{1}{n}$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

c) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $f : (-1, +\infty) \to (-1, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

d) Sei $P(x) = x^3 - 7x - 6$. Zerlegen Sie $P$ in Linearfaktoren.

**Lösung:**

a) Lösungen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | W | ☐ | F | ☒ |
| (2) | W | ☒ | F | ☐ |
| (3) | W | ☒ | F | ☐ |
| (4) | W | ☒ | F | ☐ |
| (5) | W | ☒ | F | ☐ |

(1) ist FALSCH, z.B. für $q = 2$.

(2) ist WAHR, da die Betragsfunktion $h(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$, die Wurzelfunktion $g(y) = \sqrt{y}$ auf $[0, +\infty)$ sowie nach einem Satz aus der Vorlesung folglich auch deren Verknüpfung $(g \circ h)(x) = \sqrt{|x|} = f(x)$ auf $\mathbb{R}$ stetig sind.

(3) ist WAHR, da $f(x) = |x|^2 = x^2$ ein Polynom ist.

(4) ist WAHR. Als differenzierbare Funktion ist $f$ auch stetig. Der Rest folgt aus dem Zwischenwertsatz.

(5) ist WAHR, denn $f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$.

b) Da $f$ stetig ist in Null, $f(0) = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

Alternativ:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}} e^{\frac{1}{n}} = \frac{0 + 0}{1 + 0} e^0 = 0$$

c) Wir lösen $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ nach $x$ auf und erhalten

$$x = \frac{1-y}{1+y}$$

Die Umkehrfunktion ist also $f^{-1} : I \to I$ mit $f^{-1}(y) = \dfrac{1-y}{1+y}$ und $I = (-1, +\infty)$.

d) Wir erraten die Nullstelle $x_1 = -1$. Polynomdivision liefert nun

$$P(x) : (x+1) \quad = \quad x^2 - x - 6.$$

Die pq-Formel liefert schließlich die weitere Nullstellen $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$. Die Linearfaktorzerlegung lautet:

$$P(x) = (x+1)(x-3)(x+2)$$

**Aufgabe 5.** *(8+6+6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$g(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3} \qquad h(x) = e^{\sin(x^2)}$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

c) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von $f(x) = xe^{-x}$. Untersuchen Sie $f$ auf lokale Extrempunkte, d.h. bestimmen Sie alle lokalen Extrema und begründen Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt. Zeichnen Sie den Graphen von $f$ über dem Intervall $[-1, 3]$, sodass auch Nullstellen und asymptoisches Verhalten von $f$ ersichtlich sind. Zur Orientierung: $e^{-1} = 1/e \approx 0,39$

**Lösung:**

a) Nach der Quotienten- und Kettenregel gilt:

$$g'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)x^3 - (\sin(x) - x)3x^2}{x^6} = \frac{x^3 \cos(x) - x^3 - 3x^2 \sin(x) + 3x^3}{x^6}$$

$$= \frac{x \cos(x) - 3 \sin(x) + 2x}{x^4}$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$h'(x) = 2x \cos(x^2) e^{\sin(x^2)}$$

b) Wir wenden die Regel von l'Hospital 3x an.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6}$$

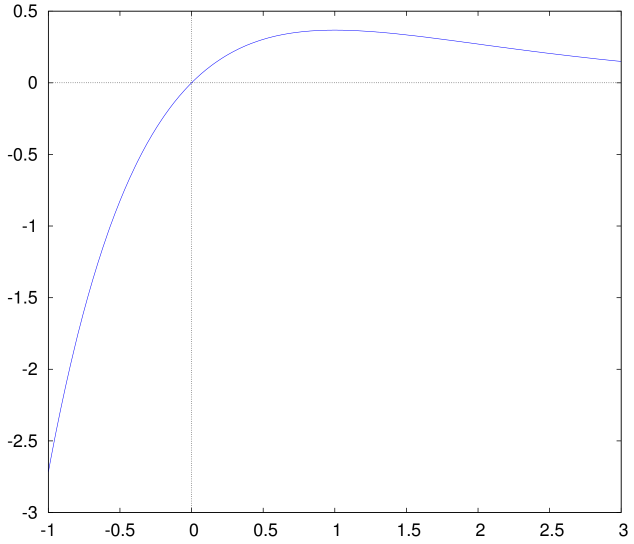
c) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - x)e^{-x} \\ f''(x) &= (-1 + x - 1)e^{-x} = (x - 2)e^{-x} \end{aligned}$$

Eine Extremstelle kann also nur bei $x_1 = 1$ sein. Wegen $f''(1) = -e^{-1} < 0$ besitzt $f$ im Punkt $(1, f(1)) = (1, e^{-1})$ ein lokales Maximum.

Eine Nullstelle liegt bei $x = 0$ vor. Es ist $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. (Eine Rechnung wird nicht verlangt, nur sollten diese Daten auch in der Skizze angedeutet werden.)

Der Graph sieht wie folgt aus:


0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

**Aufgabe 6.** *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ☒. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $\int_a^b f(x)\ dx$.

(2) W ☐ F ☐ Zwei Stammfunktionen einer Funktion $f$ unterscheiden sich nur um eine Konstante.

(3) W ☐ F ☐ $\ln|x| + \ln(2)$ ist eine Stammfunktion zu $\frac{1}{x}$.

(4) W ☐ F ☐ Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist $f(t) = \int_0^t f'(x)\ dx$ für $t \in [0,1]$.

(5) W ☐ F ☐ Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$.

b) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}\ dx$ durch partielle Integration.

c) Berechnen Sie $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))}$ durch die Substitution $t = \ln(x)$.

**Lösung:**

a) Lösungen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | W | ☒ | F | ☐ |
| (2) | W | ☒ | F | ☐ |
| (3) | W | ☒ | F | ☐ |
| (4) | W | ☐ | F | ☒ |
| (5) | W | ☐ | F | ☒ |

(1) ist WAHR, siehe Satz in der Vorlesung.

(2) ist WAHR, denn sind $F' = G' = f$, so ist $(F-G)' = 0$ und damit $F - G = c$, wobei $c$ eine Konstante ist. Daher ist $F = G + c$.

(3) ist WAHR, da $(\ln|x| + \ln(2))' = 1/x$.

(4) ist FALSCH, z.B. für $f(t) = 1$.

(5) ist FALSCH, z.B. $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \infty$.

b) Mit partieller Integration folgt:

$$\int_R^0 xe^{2x}\ dx = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_R^0 - \int_R^0 \frac{e^{2x}}{2}\ dx = -\frac{R}{2}e^{2R} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_R^0$$

$$= -\frac{R}{2}e^{2R} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2R}$$

Für $R \to -\infty$ gehen der erste und der dritte Term gegen 0, so dass

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}\ dx = \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{0} xe^{2x}\ dx = -\frac{1}{4}.$$

c) Wir wählen $t = \ln(x)$. Dann ist die untere Grenze $t = \ln(1) = 0$, die obere Grenze $t = \ln(e) = 1$ und $dt = \frac{1}{x}\ dx$. Ins Integral eingesetzt ist das

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \int_{1}^{e} \frac{1}{1+\ln(x)} \cdot \frac{dx}{x} = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+t}\ dt = \big[\ln(1+t)\big]_{0}^{1} = \ln 2$$

**Aufgabe 7.** *(6+6+8 Punkte)*

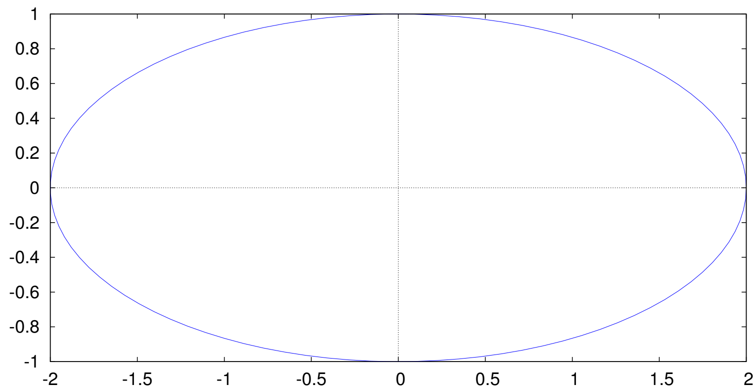
a) Zeichnen Sie die Spur von $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 9\pi]$. Wie oft umläuft $\alpha$ den Ursprung? Deuten Sie die Umlaufrichtung mit einem Pfeil an.

b) Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\beta(t) = t^2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ eine Kurve in Polarkoordinaten.
Wo ist $\beta$ regulär?

c) Berechnen Sie die Fläche der von $\gamma(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ umschlossenen Fläche, wobei $r(t) = 2\pi t - t^2$ und $t \in [0, 2\pi]$.

**Lösung:**

a)




Für $t \in [0, 2\pi]$ wird der Ursprung einmal umlaufen. Für $t \in [0, 9\pi]$ wird er demzufolge $4,5$-mal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

b) Da $\beta(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ in Polarkoordinaten ist, wobei $r(t) = t^2$, ist sie genau dann nicht regulär, wenn $r(t) = r'(t) = 0$ sind. Da $r(t) = t^2$ und $r'(t) = 2t$, ist das nur für $t = 0$ möglich. Überall sonst ist $\beta$ regulär.

c) Da $\gamma$ in Polarkoordinaten mit Radiusfunktion $r(t) = 2\pi t - t^2$ vorliegt, berechnet sich die Fläche durch das Integral

$$F_\gamma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(t)^2 \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2)^2 \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4\pi^2 t^2 - 4\pi t^3 + t^4) \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi^2 t^3 - \pi t^4 + \frac{t^5}{5}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{32}{3}\pi^5 - 16\pi^5 + \frac{32}{5}\pi^5\right] = \frac{8}{15}\pi^5$$

**Aufgabe 8.** *(5+5+10 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind. Bitte Ihre Antwort ankreuzen ⊠. Das komplette Ausfüllen ■ löscht Ihre Antwort wieder.

(1) W ☐ F ☐ Jede partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist total differenzierbar.

(2) W ☐ F ☐ Die Funktion $f(x, y, z) = xy^2 + |xyz| + y^3$ ist total differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$.

(3) W ☐ F ☐ Der Gradient einer total differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ steht senkrecht auf den Niveaulinien von $f$.

(4) W ☐ F ☐ Hat $f$ ein lokales Minimum in $x_0$, so verschwindet dort der Gradient.

(5) W ☐ F ☐ Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar, so sind die Komponenten der Jacobi-Matrix genau die partiellen Ableitungen von $f$.

b) Berechnen Sie den Gradienten von $f(x, y) = ye^{-2x+y}$.

c) Seien $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y - xy^2 \\ xy - y^2 \end{pmatrix}$ und $g(s, t) = \begin{pmatrix} 2s - 1 \\ t^2 - st \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $(g \circ f)(1, 0)$.

**Lösung:**

a) Lösungen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | W | ☐ | F | ⊠ |
| (2) | W | ☐ | F | ⊠ |
| (3) | W | ⊠ | F | ☐ |
| (4) | W | ⊠ | F | ☐ |
| (5) | W | ⊠ | F | ☐ |

(1) ist FALSCH, siehe Beispiel in der Vorlesung.

(2) ist FALSCH, da der Betrag nicht differenzierbar im Ursprung ist.

(3) ist WAHR. Siehe Erläuterungen in der Vorlesung.

(4) ist WAHR, weil es in solch einem Punkt keine Richtung des steilsten Anstiegs mehr gibt, in die der Gradienten zeigen könnte.

(5) ist WAHR, denn in diesem Fall stimmt die Jacobi-Matrix mit dem Gradienten überein, deren Komponenten die partiellen Ableitungen von $f$ sind.

b) Der Gradient von $f(x,y) = ye^{-2x+y}$ lautet:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2ye^{-2x+y} \\ (1+y)e^{-2x+y} \end{pmatrix}$$

c) Für $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y - xy^2 \\ xy - y^2 \end{pmatrix}$ und $g(s,t) = \begin{pmatrix} 2s-1 \\ t^2 - st \end{pmatrix}$ gilt nach der Kettenregel:

$$\mathrm{Jac}(g \circ f)(1,0) = \mathrm{Jac}(g)(f(1,0)) \cdot \mathrm{Jac}(f)(1,0)$$

Es sind $f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, sowie

$$\mathrm{Jac}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 & x^2 - 2xy \\ y & x - 2y \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Jac}(g)(s,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -t & 2t - s \end{pmatrix}$$

Wir setzen die entsprechenden Punkte ein und erhalten:

$$\mathrm{Jac}(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Jac}(g)(f(1,0)) = \mathrm{Jac}(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher ist

$$\mathrm{Jac}(g \circ f)(1,0) = \mathrm{Jac}(g)(f(1,0)) \cdot \mathrm{Jac}(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9.** *(3+7+10 Punkte)*

Sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4,\ (x-1)^2 \leq y \leq 2x+1\}$.

a) Skizzieren Sie die Fläche $G$.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von $G$, d.h. berechnen Sie das Integral

$$\int_G 1 \; dG(x,y) \quad = \quad \int_0^4 \int_{(x-1)^2}^{2x+1} \; dy \; dx = \ldots$$

c) Berechnen Sie das Integral $\int_D \sin(\pi xy)\; dD(x,y)$ über dem Gebiet

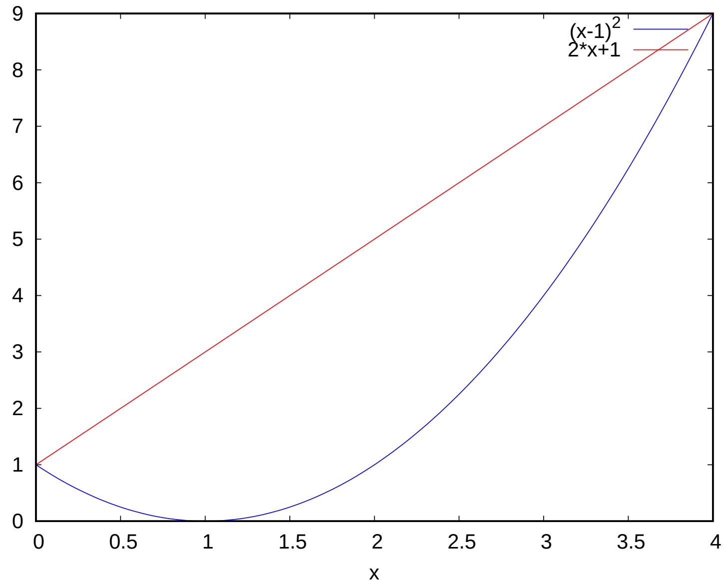
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1/y,\ 1 \leq y \leq 2\},$$

also

$$\int_1^2 \int_0^{1/y} \sin(\pi xy)\; dx\; dy \quad = \quad \ldots$$

**Lösung:**

a) Die gesuchte Fläche liegt zwischen beiden Graphen:




b) Die gesuchte Fläche berechnet sich wie folgt:

$$A(G) = \int_0^4 \int_{(x-1)^2}^{2x+1} \; dy \; dx$$

$$= \int_0^4 \left[2x + 1 - \left(x-1\right)^2\right] \; dx$$

$$= \int_0^4 \left[2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)\right] \; dx$$

$$= \int_0^4 \left[2x + 1 - x^2 + 2x - 1\right] \; dx$$

$$= \int_0^4 \left[4x - x^2\right] \; dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{4}$$

$$= 32 - \frac{64}{3} - 0 = \frac{32}{3}$$

c) Das gesuchte Integral ist

$$\int_1^2 \int_0^{1/y} \sin(\pi x y) \; dx \; dy$$

$$= \int_1^2 \big[ - \frac{1}{y\pi} \cos(\pi x y)\big]_{x=0}^{1/y} \; dy$$

$$= \int_1^2 \big[ - \frac{1}{y\pi} \cos(\pi \cdot \frac{1}{y} \cdot y) + \frac{1}{y\pi} \cos(\pi \cdot 0 \cdot y)\big] \; dy$$

$$= \int_1^2 \big[ - \frac{1}{y\pi} \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \frac{1}{y\pi} \underbrace{\cos(0)}_{=1}\big] \; dy$$

$$= \int_1^2 \frac{2}{y\pi} \; dy = \frac{2}{\pi}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{2}{\pi} \ln 2$$

**Aufgabe 10.** *(5+8+7 Punkte)*

a) Bringen Sie die beiden komplexen Zahlen auf die Gestalt $x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z_1 = \frac{2+3i}{2-3i}, \qquad z_2 = -2e^{-3i\pi}$$

b) Geben Sie den Lösungsraum der nachstehenden homogenen DGL an:

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$$

*Hinweis: Hier ist 1 doppelte Nullstelle.*

c) Lösen Sie die inhomogene DGL

$$y' + 3y = 6t$$

**Lösung:**

a) Mit Hilfe der Erweiterung des Bruchs mit der komplex Konjugierten des Nenners erhalten wir:

$$z_1 = \frac{2+3i}{2-3i} = \frac{(2+3i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{4+12i-9}{4+9} = \frac{-5+12i}{13} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$$

Mit Hilfe der Polarkoordinaten gilt:

$$z_2 = -2e^{-3i\pi} = -2(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)) = -2\cos(3\pi) + 2i\sin(3\pi) = 2 + i0 = 2$$

b) Da 1 eine doppelte Nullstelle ist, können wir das charakteristische Polynom der DGL zunächst mit Hilfe der Polynomdivision in die Form $P(X) = (X-1)^2(X^2+1)$ überführen. Zur Kontrolle: $P(X) : (X-1) = X^3 - X^2 + X - 1$.

Da $\pm i$ die Nullstellen von $X^2 + 1$ sind, ist der Lösungsraum

$$\{u(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{it} + c_4e^{-it} \mid c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C}\}.$$

c) Das charakteristische Polynom ist $P(X) = X + 3$. Die Basislösung ist daher gegeben durch

$$u_h(t) = ce^{-3t}$$

mit $c \in \mathbb{C}$. Wir suchen eine partikuläre Lösung und wählen den Ansatz $u_p(t) = at+b$. Es ist $u_p'(t) = a$. Das setzen wir in die DGL ein und erhalten die Gleichung

$$6t = a + 3(at + b) = a + 3at + 3b = 3at + a + 3b$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $a = 2$ und $a + 3b = 0$. Daraus folgt dann $3b = -2$. Eine partikuläre Lösung ist somit gegeben durch $u_p(t) = 2t - \frac{2}{3}$. Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(t) = ce^{-3t} + 2t - \frac{2}{3}$$