Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 05.09.2017

Grundlagen der Mathematik (BSc Maschinenbau)

Aufgabe 1. *(6+8+6 Punkte)*

a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \quad = \quad n^2$$

b) Stellen Sie die folgenden Mengen als Teilmenge der reellen Achse graphisch dar:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq 2\} \quad , \quad B = \{x : |x-3| \leq 2\}.$$

Schreiben Sie die Menge A als Vereinigung von zwei Intervallen und die Menge B als Intervall. Welches Intervall ist durch die Menge $C = A \cap B$ gegeben?

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften $f(x+1) = f(x) + 2$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass

$$f(n) \quad = \quad 2n - 1$$

Lösung:

a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = (2-1) = 1$ und $n^2 = 1$.
Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Nach Voraussetzung ist

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2n+1)$$

Wir rechnen weiter mit der binomischen Formel:

$$= \quad n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

was zu zeigen war.

b) In Intervallschreibweise ist $A = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ und $B = [1, 5]$.
Wegen $(-\infty, -1] \cap B = \emptyset$ ist

$$C \quad = \quad A \cap B = [3, +\infty) \cap B = [3, +\infty) \cap [1, 5] = [3, 5]$$

c) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $f(1) = 2 \cdot 1 - 1$.
Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Wegen der Rechenregel $f(x+1) = f(x) + 2$ gilt

$$f\big(n+1\big) \quad = \quad f(n) + 2$$

Jetzt setzen wir die Induktionsvoraussetzung $f(n) = 2n - 1$ ein und rechnen weiter:

$$\ldots \quad = \quad 2n - 1 + 2 = 2 \cdot (n+1) - 1,$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 2. *(5+7+8 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind.

(1) Sind zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal, so gilt $\vec{v} \times \vec{w} = 0$.

(2) Sind zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal, so gilt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

(3) Sind zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ orthogonal, so sind sie auch linear abhängig.

(4) Zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ sind immer linear unabhängig.

(5) Der Durchschnitt zweier Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Unterraum.

b) Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei x eine reelle Zahl sei. Für welche Werte von x sind $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ linear abhängig, für welche Werte linear unabhängig?

c) Eine Ebene E ist in Parameterform gegeben:

$$E \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \neq 0$, der senkrecht auf der Ebene steht. Repräsentieren Sie E in der Form

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = c\}$$

und in der Gleichungsform

$$\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + \gamma \cdot x_3 = c$$

für geeignete Werte $c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a)

(1) ist FALSCH. Die Einheitsvektoren e_1, e_2 sind orthogonal, aber $e_1 \times e_2 = e_3$.

(2) ist WAHR, denn $\vec{v}, \vec{w}$ sind genau dann orthogonal, wenn $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

(3) ist FALSCH. e_1, e_2 sind orthogonal aber linear unabhängig.

(4) ist FALSCH. $\vec{0}$, e_1 sind linear abhängig.

(5) ist WAHR nach Definition.

b) Wir berechnen die Determinante:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2x \end{pmatrix} &= 4 \cdot 0 \cdot 2x + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2x - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 6 + 6 - 8x - 4 = 8 - 8x. \end{aligned}$$

Also sind die Vektoren linear abhängig für $x = 1$ und linear unabhängig für $x \neq 1$.

c) Wir erhalten einen solchen Vektor $\vec{a}$ durch das Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \;:=\; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ -(-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Um den Wert c zu bestimmen muss ein Punkt $\vec{x} \in E$ in $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ eingesetzt werden. Dafür können wir den Vektor $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ verwenden:

$$c \;:=\; \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle = 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = -2 - 4 = -6.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} E &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle = -6\} \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1 + x_2 + -4x_3 = -6\} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *(7+9+4 Punkte)*

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 12 \\ 2 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A, indem Sie A auf Zeilenstufenform bringen.

b) Bestimmen Sie den Nullraum $\mathcal{N}_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 | A \cdot \vec{x} = 0\}$ und geben Sie seine Dimension an. Bedenken Sie dabei die Rangformel.

c) Seien e_1, e_2, e_3, e_4 die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^4$. Sind die vier Vektoren Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4 in $\mathbb{R}^4$ linear abhängig oder unabhängig? Welche Dimension hat der Bildraum

$$L = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{y} = A\vec{x} \text{ für ein } \vec{x} \in \mathbb{R}^4\}?$$

Lösung:

a) Durch elementare Zeilen–Operationen erhalten wir die Zeilenstufenform:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Also hat A den Rang 2.

b) Nach der Rangformel ist

$$\dim \mathcal{N}_A + \text{rang } A = 4,$$

also $\dim \mathcal{N}_A = 2$. Mit der Matrix A' gilt $\mathcal{N}_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A'\vec{x} = 0\}$.
Das entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +6x_4 & = & 0 \\ & 3x_2 & & -6x_4 & = & 0 \end{array}$$

Setzen wir also $x_4 := t$ und $x_3 = s$, so folgt durch Rückwärtssubstitution: $x_2 = 2t$ und $x_1 = -6t - 2s - 6t = -2s - 12t$. Wir erhalten:

$$\mathcal{N}_A = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Die vier Vektoren Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4 entsprechen den Spalten der Matrix A. Man kann also an der Zeilenstufenform (1) ablesen, dass sie linear abhängig sind. Da die Matrix den Rang 2 hat gilt $\dim L = 2$.

Aufgabe 4. *(5+10+5 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind.

(1) Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.

(2) Jede stetige Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ nimmt ein Maximum an.

(3) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine Nullstelle.

(4) Der Grenzwert einer konvergenten Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch ein Häufungspunkt.

(5) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert 0, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, so divergiert die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $+\infty$.

b) Wir betrachten die Folgen:

$$a_n := \frac{7n^2 + (-2n^3 + 1)^2 + 4n^5}{1 + 2n - 3n^5 - 2n^6} \quad , \quad b_n := \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n - 3(-1)^n n^2}{5n + (-1)^n n^2}$$

Beantworten Sie für beide Folgen die folgenden Fragen: Konvergiert die Folge, wenn ja, gegen welchen Grenzwert? Gibt es Häufungspunkte, wenn ja, welche?

c) Zerlegen Sie das folgende Polynom in Linearfaktoren:

$$f(x) \quad = \quad x^3 - 5x^2 - x + 5$$

Lösung:

a)

(1) ist WAHR nach einem Satz über differenzierbare Funktionen.

(2) ist FALSCH. $f(x) = 1/x$ nimmt auf $(0, 1)$ kein Maximum an.

(3) ist FALSCH. $f(x) = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle.

(4) ist WAHR nach der Definition von Häufungspunkten.

(5) ist FALSCH. Das Produkt aus $a_n = 1/n^2$ und $b_n = n$ konvergiert gegen 0.

b) Für die Folge a_n kürzen wir Zähler und Nenner mit n^6:

$$a_n \quad = \quad \frac{7n^2 + (-2n^3 + 1)^2 + 4n^5}{1 + 2n - 3n^5 - 2n^6} = \frac{7n^{-4} + (-2 + 1n^{-3})^2 + 4n^{-1}}{n^{-6} + 2n^{-5} - 3n^{-1} - 2}$$

Wegen $n^{-k} \to 0$ für $n \to \infty$ (falls $k \geq 1$), liefern die Rechenregeln für Grenzwerte nun:

$$a_n \quad \to \quad \frac{(-2)^2}{-2} = -2 \qquad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d.h. die Folge a_n konvergiert gegen den Grenzwert -2. Damit ist -2 natürlich gleichzeitig auch ein Häufungspunkt der Folge.

Für die Folge b_n kürzen wir im zweiten Summanden Zähler und Nenner mit n^2:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n - 3(-1)^n n^2}{5n + (-1)^n n^2} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n^{-1} - 3(-1)^n}{5n^{-1} + (-1)^n}$$

Da der erste Summand gegen 0 konvergiert, verhält sich die Folge für $n \to \infty$ wie die Folge

$$c_n = \frac{n^{-1} - 3(-1)^n}{5n^{-1} + (-1)^n}$$

Die Folge c_n verhält sich wegen $n^{-1} \to 0$ für $n \to \infty$ aber wie

$$\frac{-3(-1)^n}{(-1)^n} = -3$$

d.h. die Folge b_n konvergiert gegen den Grenzwert -3. Damit ist -3 natürlich gleichzeitig auch ein Häufungspunkt der Folge.

c) Wir erraten die Nullstelle 1. Polynomdivision ergibt dann

$$\left(x^3 - 5x^2 - x + 5\right) : (x - 1) = x^2 - 4x - 5$$

Wir bestimmen die weiteren Nullstellen also durch

$$x_{2,3} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + 5} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3$$

als $x_2 = 5$ und $x_3 = -1$. Die Zerlegung in Linearfaktoren ist also:

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 5).$$

Aufgabe 5. *(2+3+11+4 Punkte)*

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \frac{x+3}{16+x^2}$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

b) Wie verhält sich $f(x)$ asymptotisch für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$?

c) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f und untersuchen Sie f auf lokale Extremstellen, d.h. bestimmen Sie alle lokalen Extrema und geben Sie an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

d) Wo ist f monoton wachsend und wo monoton fallend?

Lösung:

a) Da $\frac{1}{16+x^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, stimmen die Nullstellen von f mit den Nullstellen von $x+3$ überein. Wir erhalten als einzige Nullstelle $x = -3$.

b)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+3/x}{16/x+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

c) Wir berechnen mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(16+x^2)\cdot 1 - 2x\cdot(x+3)}{(16+x^2)^2} = \frac{-x^2-6x+16}{(16+x^2)^2} = -\frac{x^2+6x-16}{(16+x^2)^2}\ , \\
f''(x) &= -\frac{(16+x^2)^2(2x+6) - 2(16+x^2)2x(x^2+6x-16)}{(16+x^2)^4} \\
&= -\frac{(16+x^2)(2x+6) - 2\cdot 2x(x^2+6x-16)}{(16+x^2)^3} \\
&= -\frac{32x+96+2x^3+6x^2-4x^3-24x^2+64x}{(16+x^2)^3} = \frac{2x^3+18x^2-96x-96}{(16+x^2)^3} \\
&= 2\frac{x^3+9x^2-48x-48}{(16+x^2)^3}
\end{aligned}$$

Für die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ suchen wir die Nullstellen von f'. Analog zu Aufgabe b) stimmen diese mit den Nullstellen von $x^2+6x-16$ überein. Wir finden mit

$$x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4}+16} = -3 \pm \sqrt{9+16} = -3 \pm 5$$

also die beiden Kandidaten $x_1 = 2$ und $x_2 = -8$. Da $2/(16+x^2)^2$ immer positiv ist, reicht es nun, x_1 und x_2 in

$$g(x) = x^3 + 9x^2 - 48x - 48$$

einzusetzen. Wir berechnen (bzw. schätzen):

$$g(2) = 8+36-96-48 \ < 0 \quad , \quad g(-8) = -8\cdot 64 + 9\cdot 64 + 8\cdot 48 - 48 \ > 0.$$

Also ist $f''(x_1) < 0$ und es handelt sich bei x_1 um ein lokales Maximum, und es ist $f''(x_2) > 0$ und es handelt sich bei x_2 um ein lokales Minimum.

d) Es reicht wieder, das Vorzeichen des Nenners der Ableitung

$$-x^2 - 6x + 16 = -(x-2)(x+8)$$

zu untersuchen. Wir finden also:

$$f'(x) \left\{ \begin{array}{c} < 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{c} x < -8 \\ -8 < x < 2 \\ 2 < x \end{array} \right.$$

Daher ist h auf $(-8, 2)$ streng monoton wachsend, und auf $(-\infty, -8)$ und $(2, +\infty)$ streng monoton fallend.

Aufgabe 6. *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind.

(1) Ist F Stammfunktion einer Funktion f, so gilt $F' = f$.

(2) Ist F Stammfunktion von f, so ist F eindeutig bestimmt.

(3) Für eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist das Maximum aller Untersummen gleich dem Minimum aller Obersummen.

(4) Ein uneigentliches Integral einer positiven Funktion existiert genau dann, wenn der entsprechende Fächeninhalt unter dem Graphen der Funktion endlich ist.

(5) Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ gilt, so existiert das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

b) Verwenden Sie die Substitution $s = \sqrt{x}$, um folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_1^{16} \frac{1}{4\sqrt{x} + 2x} dx$$

c) Berechnen Sie das Integral:

$$\int_1^{3} \frac{3 + 2x}{x^2} dx$$

Lösung:

a)

(1) ist WAHR nach Definition.

(2) ist FALSCH, denn alle $F + c$, $c \in \mathbb{R}$, sind Stammfunktionen.

(3) ist FALSCH, denn Maximum/Minimum müssen nicht existieren.

(4) ist WAHR nach Definition.

(5) ist FALSCH, zum Beispiel $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ existiert nicht.

b) Mit der Substitution $s = \sqrt{x}$ (und daher $ds = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_1^{16} \frac{1}{4\sqrt{x} + 2x} dx &= \int_{x=1}^{x=16} \frac{1}{2+\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_{s=1}^{s=4} \frac{1}{2+s} ds \\
&= \big[\ln(2+s)\big]_1^4 = \ln 6 - \ln 3 = \ln(6/3) = \ln 2
\end{aligned}$$

c)

$$\ldots = \int_1^3 \frac{3}{x^2} dx + 2\int_1^3 \frac{dx}{x} = \big[-\frac{3}{x} + 2\ln x\big]_1^3 = -1 + 2\ln 3 + 3 = 2 + 2\ln 3$$

Aufgabe 7. *(8+6+6 Punkte)*

a) Gegeben sei die parametrisierte Kurve $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ durch $\gamma(t) := (t, t^2)$.

i. Stellen Sie den Graphen von γ in $\mathbb{R}^2$ graphisch dar.

ii. Bestimmen Sie den Ableitungsvektor γ' von γ (als Funktion $[-1,1] \to \mathbb{R}^2$).

iii. Für welche $t \in [-1,1]$ ist γ regulär?

iv. Bestimmen Sie die Tangente an γ im Punkt $\gamma\big(\frac{1}{2}\big)$.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der parametrisierten Kurve $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $\alpha(t) = (t^3, t^3)$.

c) Berechnen Sie den von der parametrisierten Kurve $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(t) = r(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

mit $r(t) = \sqrt{4\pi^2 - 3t^2}$, umfahrenen Flächeninhalt.

Lösung:

a) Der Graph ist das Parabelstück $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2,\ x \in [-1,1]\}$. Der Ableitungsvektor ist

$$\gamma'(t) = (1, 2t).$$

Damit ist $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in [-1,1]$, also ist γ für alle $t \in [-1,1]$ regulär. Wegen $\gamma'\big(\frac{1}{2}\big) = (1,1)$ ist die Tangente:

$$T_{\gamma,\frac{1}{2}} = \gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) + \mathbb{R} \cdot \gamma'\Big(\frac{1}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Der Ableitungsvektor ist $\alpha'(t) = (3t^2, 3t^2)$ und hat die Länge

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{|\alpha_1'(t)|^2 + |\alpha_2'(t)|^2} = \sqrt{9t^4 + 9t^4} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot t^2$$

Somit berechnen wir für die Bogenlänge:

$$L(\alpha) = \int_{-1}^{1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{-1}^{1} 3 \cdot \sqrt{2} \cdot t^2 dt = \sqrt{2}\big[t^3\big]_{-1}^{1} = \sqrt{2}(1 - (-1)) = 2\sqrt{2}$$

c) Der Flächeninhalt ist:

$$\begin{aligned} F_\varphi &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (4\pi^2 - 3t^2) dt = \frac{1}{2}\big[4\pi^2 t - t^3\big]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\big(4\pi^3 - \pi^3 + 4\pi^3 - \pi^3\big) = 3\pi^3 \end{aligned}$$

Aufgabe 8. *(5+8+7 Punkte)*

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie WAHR oder FALSCH ist. Eine Begründung ist nicht nötig. Falsche Antworten geben einen Punkt Abzug. Antworten Sie also nur, wenn Sie sicher sind.

(1) Jede total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist partiell differenzierbar.

(2) Jede partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist total differenzierbar.

(3) Es gibt total differenzierbare Funktionen, die nicht stetig sind.

(4) Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein lokales Maximum, so ist die Hesse-Matrix von f in x_0 negativ definit.

(5) Der Gradient einer total differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zeigt immer in die Richtung des stärksten Wachstums.

b) Wir betrachten die beiden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$f(x,y) = ye^{3x+x^2} \quad , \quad g(t) = \big(\ln t \ , \ 2\sqrt{t}\big)$$

Ermitteln Sie den Gradienten von f und die Jacobi-Matrix von g.

c) Wir betrachten wieder die beiden Abbildungen f und g aus Teil b). Berechen Sie nun den Gradienten von f im Punkt $(x,y) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, die Jacobi-Matrix von g im Punkt $t = 1 \in \mathbb{R}$ und die Jacobi-Matrix der Komposition $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x,y) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$.

Lösung:

a)

(1) ist WAHR nach einem Satz aus der Vorlesung.

(2) ist FALSCH nach einem Beispiel aus der Vorlesung.

(3) ist FALSCH, denn total differenzierbare Funktionen sind stetig.

(4) ist FALSCH, denn die Matrix kann auch semi-definit sein.

(5) ist WAHR, siehe Vorlesung.

b) Unter Verwendung der Produkt- und der Kettenregel berechnen wir:

$$\nabla f(x,y) = \big((3+2x)ye^{3x+x^2} \ , \ e^{3x+x^2}\big) \quad , \quad \text{Jac } g(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

c) Wegen $f(0,1) = 1$ ist

$$\nabla f(0,1) = \big(3,1\big) \ , \ \text{Jac } g(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \text{Jac } (g \circ f)(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \big(3,1\big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9. *(10+10 Punkte)*

a) Wir betrachten das Gebiet $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 3\}$ in $\mathbb{R}^2$. Stellen Sie das Gebiet G in $\mathbb{R}^2$ graphisch dar und berechnen Sie die beiden folgenden Integrale (der erste Schritt ist schon vorgegeben):

$$(i) \qquad \int\int_G yx^2 dG = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=1}^{y=3} yx^2 dG = ...$$

$$(ii) \qquad \int\int_G \frac{1}{(x+y)^2} dG = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=1}^{y=3} \frac{1}{(x+y)^2} dG = ...$$

b) Wir betrachten nun in $\mathbb{R}^2$ das Gebiet

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - |x|\}.$$

Stellen Sie das Gebiet D graphisch dar und berechnen Sie den Schwerpunkt von D.

Lösung:

a) Es handelt sich um ein Rechteck der Kantenlängen 3 (in x) und 2 (in y). Zeichnen! Für die Integrale berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int\int_G yx^2 dG &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=1}^{y=3} yx^2 dG = \int_{x=0}^{x=3} x^2 \left(\int_{y=1}^{y=3} y dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=3} x^2 \big[\frac{1}{2} y^2\big]_1^3 dx \\
&= \int_{x=0}^{x=3} x^2 \frac{9-1}{2} dx = 4 \big[\frac{1}{3} x^3\big]_0^3 = \frac{4}{3}(27 - 0) = 36 \\
\int\int_G \frac{1}{(x+y)^2} dG &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=1}^{y=3} \frac{1}{(x+y)^2} dG = \int_{x=0}^{x=3} \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{y=1}^{y=3} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = [\ln(x+1) - \ln(x+3)]_{x=0}^{x=3} \\
&= \ln 4 - \ln 6 - \ln 1 + \ln 3 = \ln \frac{4 \cdot 3}{6} = \ln 2
\end{aligned}$$

b) Es handelt sich um ein Dreieck mit Grundseite $[-1, 1] \times \{0\}$ und Spitze in $(0, 1)$. Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt auf der y-Achse. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\int\int_G x dG &= \int_{x=-1}^{x=1} \int_0^{1-|x|} x dG = \int_{x=-1}^{x=1} x[y]_0^{1-|x|} dx = \int_{-1}^{1} (x - x|x|) dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x + x^2) dx + \int_0^1 (x - x^2) dx \\
&= \big[x^2/2 + x^3/3\big]_{-1}^0 + \big[x^2/2 - x^3/3\big]_0^1 = -1/2 + 1/3 + 1/2 - 1/3 = 0 \\
\int\int_G y dG &= \int_{x=-1}^{x=1} \int_0^{1-|x|} y dG = \int_{x=-1}^{x=1} \big[\frac{1}{2} y^2\big]_0^{1-|x|} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - |x|)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} (1 + 2x + x^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx \\
&= \frac{1}{2} \Big(\big[x + x^2 + x^3/3\big]_{-1}^0 + \big[x - x^2 + x^3/3\big]_0^1 \Big) = \frac{1}{2}\big(1/3 + 1/3\big) = 1/3
\end{aligned}$$

Folglich liegt der Schwerpunkt im Punkt $(x, y) = \big(0, \frac{1}{3}\big)$.

Aufgabe 10. *(2+2+8+8 Punkte)*

a) Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{21+i}{2-3i}$$

in der Form $z = \text{Re}\ (z) + i \cdot \text{Im}\ (z)$.

b) Geben Sie die komplexe Zahl $w = -2i$ in Polarkoordinaten an.

c) Bestimmen Sie den Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung:

$$u''' + u'' + u' + u = 0$$

d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} u'' - 4u' + 4u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 2 \end{aligned}$$

Lösung:

a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{21+i}{2-3i} &= (21+i) \cdot \frac{\overline{2-3i}}{|2-3i|^2} = (21+i) \cdot \frac{2+3i}{2^2+(-3)^2} \\ &= \frac{1}{13}(42+63i+2i-3) = \frac{1}{13}(39+65i) = 3+5i \end{aligned}$$

b) $w = 2e^{i3\pi/2}$

c) Das charakteristische Polynom der DGL ist $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$. Wir erraten die Nullstelle $z_0 = -1$. Polynomdivision liefert nun:

$$(z^3 + z^2 + z + 1) : (z+1) = z^2 + 1$$

Anhand der dritten binomischen Formel oder unter Verwendung der pq-Formel ergeben sich die weiteren Nullstellen $z_1 = i$ und $z_2 = -i$. Der Lösungsraum ist

$$L = \{ae^{-t} + be^{it} + ce^{-it} \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

d) Hier ist das charakteristische Polynom $P(x) = x^2 - 4x + 4$ und mit der pq-Formel faktorisieren wir $P(x) = (x-2)^2$. Die allgemeine Lösung der DGL ist also:

$$u(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$$

Die Startbedingung $u(0) = 0$ liefert $a = 0$, also $u(t) = bte^{2t}$ und $u'(t) = (b + 2bt)e^{2t}$. Einsetzen der Startbedingung $u'(0) = 2$ liefert dann $b = 2$. Die Lösung ist also:

$$u(t) = 2te^{2t}$$