Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **6.9.2016**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \geq 1$ die Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{k^2+2k+2}{(k+2)(k+1)} = 2^{n+1}\frac{n+1}{n+2}$$

b) Berechnen Sie die Menge M aller x, die die Ungleichung

$$|x-2| \leq |3x-4|$$

erfüllen.

(10+10 Pkte)

Lösung. a) Für $n = 0$ sind beide Seiten gleich 1. Gilt die Summenformel für n, so auch für $n+1$. Denn wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^k \frac{k^2+2k+2}{(k+2)(k+1)} &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{k^2+2k+2}{(k+2)(k+1)} + 2^{n+1}\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+3)(n+2)} \\
&= 2^{n+1}\frac{n+1}{n+2} + 2^{n+1}\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+3)(n+2)} \\
&= 2^{n+1}\left(\frac{(n+1)(n+3)+(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+3)(n+2)}\right) \\
&= 2^{n+1}\left(\frac{2(n+1)(n+3)+2}{(n+3)(n+2)}\right) = 2^{n+2}\left(\frac{(n+1)(n+3)+1}{(n+3)(n+2)}\right) \\
&= 2^{n+1}\frac{(n+2)^2}{(n+3)(n+2)} = 2^{n+1}\frac{n+2}{n+3}
\end{aligned}$$

b) Die folgenden Umformungen sind äquivalent:

$x \in M$

$x^2 - 4x + 4 \leq 9x^2 - 24x + 16$

$8x^2 - 20x \geq -12$

$x^2 - \frac{5}{2}x \geq -\frac{3}{2}$

$(x - \frac{5}{4})^2 \geq \frac{1}{16}$

$|x - \frac{5}{4}| \geq \frac{1}{4}$

$x \in \mathbb{R} \setminus (1,\ \frac{3}{2})$

Somit finden wir

$$M = \mathbb{R} \setminus (1,\ \frac{3}{2})$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

a) Hat die Gerade G_1 durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Geraden G_2 durch $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ einen Schnittpunkt ?

b) Was ist der Senkrechtprojektionspunkt $\vec{P}_E$ für den Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ ?$$

(10+10 Pkte)

Lösung. Zu a) Wir haben

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$G_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\Big(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Soll $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ sein, muss $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ gelten. Es seien $t, s \in \mathbb{R}$ Zahlen mit

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass $-t + 2s = -3, \quad 3t + 3s = 1, \quad t - 3s = -1$ sein muss. Addieren wir die letzten beiden Gleichungen, finden wir $t = 0$. Die 3 Gleichungen für s widersprechen sich nun, so dass nur bleibt, dass $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ sein muss.

Zu b) Der Vektor $\vec{n} := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ weist in Richtung der Normalen an E. Es gilt also $\vec{P}_E = \vec{P} + t\vec{n}$. Nun ist aber t durch die Forderung $\langle \vec{P} + t\vec{n} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}\rangle = \langle \vec{P}_E - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}\rangle = 0$ bestimmt, also

$$6t = t\|\vec{n}\|^2 = -\langle \vec{P} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}\rangle = -\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = -\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = -6$$

also $t = -1$. Das liefert $\vec{P}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ -7 & -13 & -14 & 2 \\ -8 & -11 & -10 & t \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von $\mathcal{A}$ und die Dimension des Nullraumes $N_{\mathcal{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ in Abhängigkeit von t. (10 Pkte)

b) Sei $t = 1$ und $\vec{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\mathscr{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$. Gilt dann die Beziehung $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$?

(5 Pkte)

c) Gilt für $t = 1$ sogar

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) \quad ?$$

Dazu betrachten Sie $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$.

(5 Pkte)

Lösung. Zu a) In $\mathcal{A}$ addieren wir zur 2. Zeile das $\frac{7}{3}$-fache der 1. Zeile und zur 3. Zeile das $\frac{8}{3}$-fache der 1. Zeile und erhalten

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -28/3 & 2 \\ 0 & -3 & -14/3 & t \end{pmatrix}$$

Von der 3. Zeile subtrahieren wir die Hälfte der 2. Zeile und gelangen zu $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -28/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$. Also gilt $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 2$, für $t = 1$ und $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 3$ für $t \neq 1$. Aus $\dim N_{\mathcal{A}} = 4 - \operatorname{rg} \mathcal{A}$ ergibt sich, dass $\dim N_{\mathcal{A}} = 2$, wenn $t = 1$ und $\dim N_{\mathcal{A}} = 1$, wenn $t \neq 1$.

Zu b) Es gilt $\mathcal{A} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} + s\, \underbrace{\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}}_{=\vec{0}} = \vec{b}$, also $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$.

Zu c) Ähnlich wie unter c) stellt man fest, dass $\mathcal{A} \cdot \vec{v} = \vec{b}$. Jedoch $\mathfrak{b} \notin \mathscr{L}_1$. Anderenfalls wäre $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \vec{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, was nicht möglich ist, wie man durch Vergleich der 1. Koordinaten sieht.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Die Folge $(x_n)_n$ sei definiert durch

$$x_n = \frac{5n^4 + n - 4}{2n^3 + 7} - \frac{15n^2 + 5n - 1}{6n + 1}$$

Hat die Folge $(x_n)_n$ einen Grenzwert ?

(10 Pkte)

b) Für $x \geq \dfrac{1}{3}$ sei $f(x) := 9x^2 - 6x + 5$.

(i) Bestimmen Sie die Wertemenge W von f.

(ii) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f auf W. (5+5 Pkte)

Lösung. Zu a) Es gilt $5n^4 + n - 4 = \frac{5}{2}n(2n^3+7) - \frac{33}{2}n - 4$ und $15n^2 + 5n - 1 = \frac{5}{2}n(6n+1) + \frac{5}{2}n - 1$. Damit ist aber

$$x_n = \frac{5}{2}n - \frac{\frac{33}{2}n - 4}{2n^3+7} - (\frac{5}{2}n + \frac{\frac{5}{2}n-1}{6n+1}) = -\frac{\frac{33}{2}n-4}{2n^3+7} - \frac{\frac{5}{2}n-1}{6n+1} \longrightarrow -\frac{5}{12}$$

Zu b) Es gilt

$$f(x) = 9(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}) = 9((x - \frac{1}{3})^2 + \frac{4}{9}) = 9(x - \frac{1}{3})^2 + 4 \geq 4$$

und damit $W \subset [4, \infty)$. Da nun $f(1/3) = 4$ und gleichzeitig $f(x) \longrightarrow \infty$ mit $x \to \infty$ folgt mit dem Zwischenwertsatz sogar $W = [4, \infty)$.

Zu c) Wir wollen die Gleichung $y = f(x)$ für $y \geq 4$ nach x auflösen. Es kommt heraus

$$x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{y-4}{9}}$$

Soll $x \geq \frac{1}{3}$ werden, muss das +-Zeichen gewählt werden. So gelangen wir zu

$$f^{-1}(y) = \frac{1 + \sqrt{y-4}}{3}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Sei $f(x) = \dfrac{xe^{3x}}{x+2}$, für $x > -2$.

a) Berechnen Sie f'.

b) Auf welchen Intervallen ist f monoton wachsend, wo monoton fallend?

c) Welche lokalen Extrema gibt es für die Funktion f ?

d) Wie lautet die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f bei $x_0 = -1$? (6+6+4+4 Punkte)

Lösung. Zu a) Es gilt mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+2)(e^{3x}+3xe^{3x}) - xe^{3x}}{(x+2)^2} \\ &= e^{3x}\frac{(x+2)(1+3x)-x}{(x+2)^2} = e^{3x}\frac{3x^2+6x+2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Zu b) Da

$$3x^2+6x+2 = 3(x^2+2x+1-\frac{1}{3}) = 3((x+1)^2 - \frac{1}{3}) = 3(x-(-1+\frac{1}{\sqrt{3}}))(x-(-1-\frac{1}{\sqrt{3}}))$$

sehen wir: $f' > 0$ auf $(-\infty,\ -1-\frac{1}{\sqrt{3}})$ und $f' < 0$ auf $(\,-1-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -1+\frac{1}{\sqrt{3}}\,)$. Auf $(\,-1+\frac{1}{\sqrt{3}},\ \infty)$ ist wieder $f' > 0$.

Zu c) Bei $-1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ hat f ein lokales Maximum und bei $-1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ ein lokales Minimum.

Zu d) Die Gleichung lautet $y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$. Wegen $f(-1) = f'(-1) = -e^{-3}$ folgt

$$y = -e^{-3}x + 2e^{-3}.$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie mit der Substitutionsregel das Integral $I_1 := \displaystyle\int_1^2 t\ln(4+t^2)dt$.

(5 Punkte)

b) Wie lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$R(x) := \frac{3x^3 - 6x^2 + 50x - 81}{(x-1)^2(x^2+16)}$$

(3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung zu R. (6 Punkte)

d) Berechnen Sie das Integral $I_2 := \displaystyle\int_2^5 \left(\frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+16}\right) dx$ (6 Punkte)

Lösung. Zu a) Substituieren wir $u = t^2$, so folgt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\int_1^2 2t\ln(4+t^2)dt = \frac{1}{2}\int_1^4 \ln(4+u)du \\
&= \frac{1}{2}\Big((4+u)\ln(4+u) - (4+u)\Big)\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\Big(8\ln 8 - 3 - 5\ln(5)\Big) \\
&= 12\ln 2 - \frac{5}{2}\ln 5 - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Zu b) Der gesuchte Ansatz lautet

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+16}$$

Zu c) Ausmultiplizieren liefert uns

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{A(x-1)(x^2+16) + B(x^2+16) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+16)} \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (16A+C-2D)x - 16A + 16B + D}{(x-1)^2(x^2+16)}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$C = 3 - A, \qquad -A+B-2C+D = -6, \qquad 16A + C - 2D = 50, \qquad -16A + 16B + D = -81$$

$$A + B + D = 0, \qquad 15A - 2D = 47, \qquad -16A + 16B + D = -81$$
$$17A + 2B = 47, \qquad -17A + 15B = -81$$

Das letztere führt auf $B = -2, A = 3$, also $C = 0, D = -1$.

Dann wird

$$R(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+16}$$

Zu d) Es gilt

$$\begin{aligned}
I_2 &:= \int_2^5 \left(\frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+16}\right)dx \\
&= \Big(3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(\frac{x}{4})\Big)\Big|_2^5 \\
&= 6\ln 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\Big(\operatorname{arctg}(\frac{5}{4}) - \operatorname{arctg}(\frac{1}{2})\Big)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Es sei α die in Polarkoordinaten gegebene Kurve

$$\alpha(\varphi) = r(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

mit $r(\varphi) = 1 + \frac{1}{2}\cos(\varphi)$, $-\pi \le \varphi < \pi$.

a) Bestimmen Sie die Tangente an diese Kurve im Punkte $\alpha(\pi/4)$.

b) An welchen regulären Stellen von α verläuft die Tangente an α senkrecht ?

c) Was ist der Flächeninhalt der von der Kurve eingeschlossenen Fläche ?

(6+6+8 Punkte)

Lösung. Zu a) Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha'(\varphi) &= r'(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + r(\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\\ &= (-\frac{1}{2})\sin(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + (1+\frac{1}{2}\cos(\varphi))\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ folgt

$$\alpha'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + (\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4})\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1\end{pmatrix}$$

Die Tangente ist dann

$$T = \alpha(\pi/4) + \mathbb{R}\alpha'(\pi/4) = (\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4})\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1\end{pmatrix}$$

Zu b) Es gilt

$$x'(\varphi) = -\frac{1}{2}\sin(\varphi)\cos\varphi - (1+\frac{1}{2}\cos\varphi)\sin\varphi = -(1+\cos(\varphi))\sin\varphi = 0$$

genau dann, wenn $\varphi \in \{0, -\pi\}$.

Zu c) Da die Kurve in Polarkoordinaten gegeben ist, ist der gesuchte Flächeninhalt gerade

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r(\varphi)^2 d\varphi\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos(\varphi)+\frac{1}{4}\cos^2\varphi\right)d\varphi\\ &= 2\pi + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (20 Punkte)
Es sei $f(x,y) := \cos(\pi x)\,\sin(\pi xy) + \cos^2(\pi y)$. Mit $\vec{g}(t,s)$ bezeichnen wir die Abbildung

$$\vec{g}(t,s) = \Big(t(t+s),\ s(t-2st)\Big)$$

a) Berechnen Sie ∇f (8 Punkte)

b) Was ist die Jacobimatrix von $\vec{g}$? (4 Punkte)

c) Für $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$ berechnen Sie $\nabla h(-1,2)$. (8 Punkte)

Lösung. Zu a) Mit den Rechenregeln für das partielle Ableiten folgt

$$f_x = \pi\left(-\sin(\pi x)\sin(\pi xy) + y\cos(\pi x)\cos(\pi xy)\right)$$

$$f_y = \pi\,(x\cos(\pi x)\cos(\pi xy) - 2\cos(\pi y)\sin(\pi y))$$

Zu b) Es gilt

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} 2t+s & t \\ s-2s^2 & t-4st \end{pmatrix}$$

Zu c) Es gilt $\vec{g}(-1,2) = (-1,\,6)$, weiter $J_{\vec{g}}(-1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ und

$$\nabla f(-1,6) = \pi(\,-6,\,1)$$

Damit folgt

$$\nabla h(-1,2) = \pi(\,-6,\,1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = (\,-6\pi,\,13\pi\,)$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)

Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = -2$ und $x = \dfrac{2}{3}$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := (\dfrac{x}{2} - 1)^2$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x^2$ berandet wird .

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

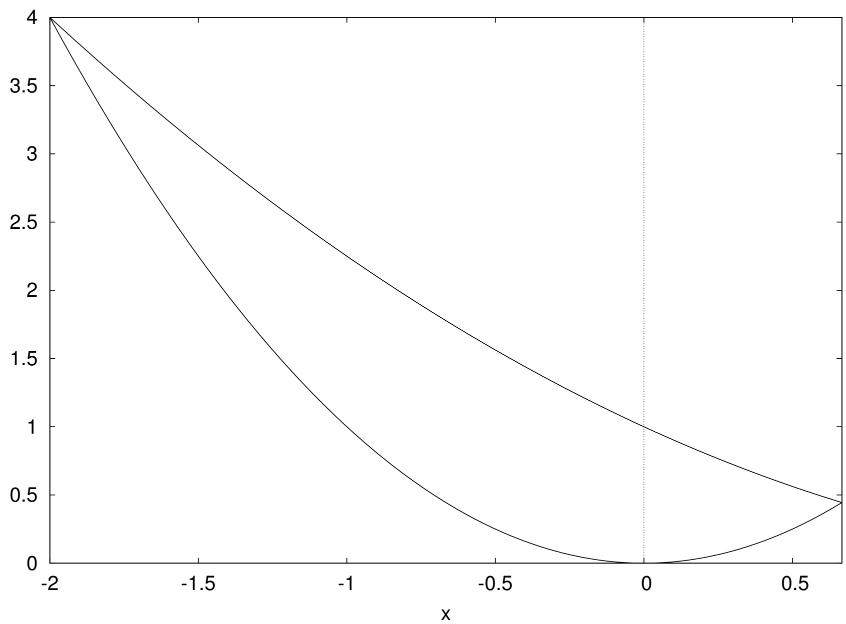
b) Berechnen Sie für $x \in [-2,\, 2/3]$ das Integral $J(x) := \displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{dy}{(1+x+y)^2}$

(7 Punkte)

c) Berechnen Sie das Integral $I_1 = \displaystyle\int_G \frac{1}{(1+x+y)^2} dG$ unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(8 Punkte)

Lösung. Zu a) Das Gebiet hat folgendes Aussehen:



Zu b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
J(x) &= \int_{x^2}^{(\frac{x}{2}-1)^2} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
&= -\frac{1}{1+x+y}\Big|_{x^2}^{(\frac{x}{2}-1)^2} = \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{1}{1+x+(\frac{1}{2}x-1)^2} \\
&= \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{1}{2+\frac{x^2}{4}}
\end{aligned}
$$

Zu c)

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-2}^{2/3} \frac{dx}{1+x+x^2} - \int_{-2}^{2/3} \frac{dx}{2+\frac{x^2}{4}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\,(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\,(\frac{x}{\sqrt{8}})\Big|_{-2}^{2/3} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\,(\frac{7}{3\sqrt{3}}) - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\,(\frac{1}{3\sqrt{2}}) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\,(\sqrt{3}) - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\,(\frac{1}{\sqrt{2}})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)
Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' + y'' - 16y' + 20y = (12t-5)e^{-t}$$

a) Was ist das charakteristische Polynom P dieser DGL? (3 Punkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei 2.) (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Punkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung u_p ? (4 Punkte)

e) Berechnen Sie u_p mit diesem Ansatz. (6 Punkte)

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. Zu a) Es ist $P(X) = X^3 + X^2 - 16X + 20$.

Zu b) Es gilt $P(X) = (X-2)^2(X+5)$, so dass die Nullstellen gegeben sind durch $\lambda_1 = 2$ (2-fach) und $\lambda_2 = -5$.

Zu c) Es resultieren die Basislösungen $u_1(t) = e^{2t}, u_2(t) = te^{2t}$ und $u_3(t) = e^{-5t}$.

Zu d) Der Ansatz für eine partikuläre Lösung u_p ist $u_p(t) = (at+b)e^{-t}$.

Zu e) Einsetzen in die DGL liefert wegen $u_p'(t) = (a-b-at)e^{-t}$, $u''(t) = (-2a+b+at)e^{-t}$ und $u'''(t) = (3a-b-at)e^{-t}$:

$$P(\frac{d}{dt})u_p = (-15a+36b+36at)e^{-t} = (12t-5)e^{-t}$$

Wir wählen also $a = \frac{1}{3}, b = 0$. Dann wird die allgemeine Lösung

$$u(t) = (At+B)e^{2t} + Ce^{-5t} + \frac{t}{3}e^{-t}$$

mit Konstanten A, B und C.