Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **1.9.2015**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (10 + 10 Pkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (k^3 - \frac{3}{2}k^2) = \frac{n(n+1)(n^2-n-1)}{4}$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|5x-4| \leq |3x+10|$ erfüllen.

Hinweis: $31^2 = 961$

Lösung. a) Induktionsbeginn $n = 1$. Links steht $-\frac{1}{2}$, rechts $\frac{2(1-1-1)}{4} = -\frac{1}{2}$.

Induktionsschritt. Gilt die Formel für n, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (k^3 - \frac{3}{2}k^2) &= \sum_{k=1}^{n} (k^3 - \frac{3}{2}k^2) + ((n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2) \\
&= \frac{n(n+1)(n^2-n-1)}{4} + ((n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2) \\
&= \frac{n+1}{4}\big(n(n^2-n-1) + 4(n+1)^2 - 6(n+1)\big) \\
&= \frac{n+1}{4}\big(n^3 + 3n^2 + n - 2\big)
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Summenformel für $n+1$, wenn $(n+2)((n+1)^2 - n - 1 - 1) = n^3 + 3n^2 + n - 2$ ist. Das rechnet man leicht nach.

b) Folgende Aussagen sind paarweise äquivalent:

$x \in M$

$25x^2 - 40x + 16 \leq 9x^2 + 60x + 100$

$16x^2 - 100x \leq 84$

$x^2 - \frac{25}{4}x \leq \frac{21}{4}$

$(x - \frac{25}{8})^2 \leq (\frac{25}{8})^2 + \frac{21}{4} = \frac{21 \cdot 16 + 625}{8^2} = \frac{961}{8^2} = (\frac{31}{8})^2$

$\left|x - \frac{25}{8}\right| \leq \frac{31}{8}$

$-\frac{31}{8}x - \frac{25}{8} \leq \frac{31}{8}$

Also ist $M = [-\frac{3}{4}, 7]$.

Aufgabe 2 (10+10 Pkte)

a) Liegen die 4 Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einer Ebene?

b) Welchen Abstand hat $\vec{P} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von der Geraden $G := \vec{A} + \mathbb{R}(\vec{C} - \vec{A})$?

Lösung. a) Die Frage ist gleichbedeutend mit dieser: Sind $\vec{B}-\vec{A}, \vec{C}-\vec{A}$ und $\vec{D}-\vec{A}$ linear abhängig? Wenn nein, liegen die 4 Punkte *nicht* in einer Ebene.

Es ist nun

$$\begin{aligned}
\det(\vec{B}-\vec{A}, \vec{C}-\vec{A}, \vec{D}-\vec{A}) &= \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -8 & -6 & -6 \end{pmatrix} \\
&= 4\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -4 & -6 & -3 \end{pmatrix} \\
&= 4\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 4\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -36\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -72 \neq 0
\end{aligned}$$

b) Der Abstand d ist

$$d = \frac{\left\|(\vec{P}-\vec{A}) \times (\vec{C}-\vec{A})\right\|}{\left\|\vec{C}-\vec{A}\right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{6}{\sqrt{38}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{6}{\sqrt{19}}$$

Aufgabe 3

a) Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} s & -11 & -13 & -8 \\ 11 & 45 & 27 & 24 \\ 7 & -15 & -21 & -12 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von $\mathcal{A}$ und die Dimension des Nullraumes $N_{\mathcal{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ in Abhängigkeit von s. (10 Pkte)

b) Sei $s = 3$ und $\vec{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -53 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathscr{L}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Gilt dann die Beziehung $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$? (5 Pkte)

c) Gilt für $s = 3$ sogar

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) \quad ?$$

Dazu betrachten Sie $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. (5 Pkte)

Lösung. a) Wir vertauschen in $\mathcal{A}$ die 1.und 3. Zeile und erhalten

$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} 7 & -15 & -21 & -12 \\ 11 & 45 & 27 & 24 \\ s & -11 & -13 & -8 \end{pmatrix}$$

Von Zeile 2 subtrahieren wir $\frac{11}{7}$ mal Zeile 1 und von Zeile 3 das $\frac{s}{7}$ mal Zeile 1. Es entsteht

$$\mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} 7 & -15 & -21 & -12 \\ 0 & 45+\frac{11}{7}\cdot 15 & 27+33 & 24+\frac{11}{7}\cdot 12 \\ 0 & -11+\frac{s}{7}\cdot 15 & -13+3s & -8+\frac{s}{7}\cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -15 & -21 & -12 \\ 0 & \frac{480}{7} & 60 & \frac{300}{7} \\ 0 & -11+\frac{s}{7}\cdot 15 & -13+3s & -8+\frac{s}{7}\cdot 12 \end{pmatrix}$$

Die 2. Zeile multiplizieren wir mit $\frac{7}{60}$ und bekommen die Matrix

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 7 & -15 & -21 & -12 \\ 0 & 8 & 7 & 5 \\ 0 & -11+\frac{s}{7}\cdot 15 & -13+3s & -8+\frac{s}{7}\cdot 12 \end{pmatrix}$$

Von der 3. Zeile subtrahieren wir $\frac{1}{8}(-11+\frac{15s}{7})$ mal die 2. Zeile. Es entsteht

$$\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} 7 & -15 & -21 & -12 \\ 0 & 8 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -13+3s-\frac{7}{8}(-11+\frac{15s}{7}) & -8+\frac{s}{7}\cdot 12-\frac{5}{8}(-11+\frac{15s}{7}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -15 & -21 & -12 \\ 0 & 8 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{9s-27}{8} & \frac{21s-63}{56} \end{pmatrix}$$

Damit ist Rang $(\mathcal{A}) = 2$, wenn $s = 3$ und Rang $(\mathcal{A}) = 3$, wenn $s \neq 3$.

b) Die Antwort ist "Ja", da $\mathcal{A} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -53 \\ -1 \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wenn $s = 3$.

c) Auch $\vec{v}$ liegt in $\mathscr{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$, aber $\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, also kann $\vec{v}$ nicht zu $\mathscr{L}_1$ gehören.

Aufgabe 4

a) Es sei $(x_n)_n$ die durch $x_n := \dfrac{2n^3 - 11n^2 - 6n}{n^2 + 5n + 1} - \dfrac{4n^3 - 5}{2n^2 + 3}$ definierte Folge.

Hat $(x_n)_n$ einen Grenzwert? (10 Pkte)

b) Für die auf $[0, \infty)$ definierte Funktion $f(x) = \dfrac{14}{x^2 + 4x + 7}$ bestimmen Sie die Wertemenge

$$W := \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \geq 0\}$$ (5 Pkte)

und die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \longrightarrow [0, \infty)$. (5 Pkte)

Lösung. a) Sei $y_n := \dfrac{2n^3 - 11n^2 - 6n}{n^2 + 5n + 1}$, $\quad z_n := \dfrac{4n^3 - 5}{2n^2 + 3}$. Dann ist

$$y_n - 2n = \frac{2n^3 - 11n^2 - 6n}{n^2 + 5n + 1} - 2n = \frac{2n^3 - 11n^2 - 6n - 2n(n^2 + 5n + 1)}{n^2 + 5n + 1} = \frac{-21n^2 - 8n}{n^2 + 5n + 1}$$

$$z_n - 2n = \frac{4n^3 - 5}{2n^2 + 3} - 2n = \frac{4n^3 - 5 - 2n(2n^2 + 3)}{2n^2 + 3} = \frac{-6n - 5}{2n^2 + 3}$$

Also

$$x_n = y_n - 2n - (z_n - 2n) = -\frac{21n^2 + 8n}{n^2 + 5n + 1} + \frac{6n + 5}{2n^2 + 3} \longrightarrow -21,$$

wenn $n \to \infty$.

b) Da $f(x) = \dfrac{14}{(x+2)^2 + 3}$ monoton fällt, haben wir $0 < f(x) \leq 2$ auf $[0, \infty)$. Da aber $f(x) \longrightarrow 0$, mit $x \to \infty$, ergibt der Zwischenwertsatz, dass $W = (0, 2]$ sein muss.

Zur Bestimmung der Umkehrfunktion von f muss nur die Gleichung $y = f(x)$ für $0 < y \leq 2$ nach x aufgelöst werden. Folgende Zeilen sind äquivalent:

$y = f(x)$

$\frac{14}{y} = (x+2)^2 + 3$

$\sqrt{\frac{14}{y} - 3} = |x + 2|.$

Soll $x \geq 0$ werden, muss $f^{-1}(y) = x = -2 + \sqrt{\frac{14}{y} - 3}$ sein.

Aufgabe 5

Es sei $f(x) = \dfrac{x^2}{x+5} e^{-3x/10}$, für $x > -4$.

a) Berechnen Sie f'. $\left(\text{Zur Orientierung: } f'(x) = -\dfrac{x}{10(x+5)^2}(3x^2 + 5x - 100)e^{-3x/10}\right)$. (6 Punkte)

b) An welchen Stellen hat f lokale Extrema? (Hinweis: $35^2 = 1225$) (5 Punkte)

c) Sind diese sogar absolute Extrema? (4 Punkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f bei $(-3, f(-3))$. (5 Punkte)

Lösung. a) Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x+5)\left(2xe^{-3x/10} - \frac{3}{10}x^2 e^{-3x/10}\right) - x^2 e^{-3x/10}}{(x+5)^2} \\
&= \frac{(x+5)\left(2x - \frac{3}{10}x^2\right) - x^2}{(x+5)^2} e^{-3x/10} \\
&= \frac{2x^2 + 10x - \frac{3}{10}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x^2}{(x+5)^2} e^{-3x/10} \\
&= \frac{-\frac{3}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 10x}{(x+5)^2} e^{-3x/10} = -\frac{3}{10} x \frac{x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{100}{3}}{(x+5)^2} e^{-3x/10}
\end{aligned}$$

b) Wir suchen die Nullstellen von f'. Eine von ihnen ist $x_1 = 0$. Die weiteren Nullstellen erfüllen $x^2 + \dfrac{5}{3}x = \dfrac{100}{3}$, also $\left(x + \dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{1225}{36} = (\dfrac{35}{6})^2$. So finden wir die weiteren Nullstellen $x_2 = 5, x_3 = -\dfrac{20}{3} < -4$.

Da

$$f'(x) = -\frac{3}{10} x \frac{(x-5)(x + \frac{20}{3})}{(x+5)^2} e^{-3x/10},$$

haben wir $f'(x) < 0$ auf $(-4,0) \cup (5,\infty)$ und $f'(x) > 0$ auf $(0,5)$. Also hat f bei x_2 ein lokales Maximum und bei x_1 ein lokales Minimum.

c) Da $f(x) \geq 0$ auf ganz $(-4,\infty)$, ist x_1 eine absolute Minimumsstelle für f. Weiter ist aber $f(-4) > 16$ und $f(5) = \frac{25}{6}e^{-1,5} < 4,25$. Also ist bei x_2 keine absolute Maximumsstelle.

Die gesuchte Tangente ist gegeben durch

$$T(x) = f(-3) + f'(-3)(x+3) = \frac{9}{2}e^{0,9} - \frac{33}{5}e^{0,9}(x+3) = -e^{0,9}(6,6x + 15,3)$$

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie das Integral $I_1 := \displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$ mit der Substitutionsregel. (5 Pkte)

b) Wie muss der Partialbruchansatz für die Funktion $R(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 10x - 8}{x(x-2)(x^2+4)}$ lauten? (3 Pkte)

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung für R. (6 Pkte)

d) Berechnen Sie das Integral $I_2 = \displaystyle\int_3^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2+4}\right) dx$. (6 Pkte)

Lösung. a) Es gilt mit $u(x) := \ln x$

$$I_1 = \int_1^e \frac{1}{1+u(x)}u'(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+u}du = \ln 2$$

b) Der richtige Ansatz ist

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

c) Dabei wird

$$A = \lim_{x\to 0} xR(x) = 1, \qquad B = \lim_{x\to 2}(x-2)R(x) = 1$$

$$-\frac{1}{5} = R(1) = A - B + \frac{C+D}{5} = \frac{C+D}{5}, \qquad C + D = -1$$

$$-\frac{23}{15} = R(-1) = -A - \frac{1}{3}B + \frac{-C+D}{5} = -\frac{4}{3} + \frac{-C+D}{5}, \qquad \frac{-C+D}{5} = -\frac{1}{5}$$

Also ist $C = 0, D = -1$. Das führt auf

$$R(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2+4}$$

d) Da $R(x) = \left(\ln x + \ln x - 2 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'$, folgt

$$I_2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln 2 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(3/2)$$

Aufgabe 7

Es sei $\alpha(t) := \Big(\cos(2t),\ \sin(t)\cdot\cos(2t)\Big)$ für $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

a) Berechnen Sie α'.

(5 Pkte)

b) Wo ist α regulär? (4 Pkte)

c) Was ist die Normale an α an der Stelle $\alpha(\frac{\pi}{3})$? (4 Pkte)

d) Welche Fläche A schließt die Kurve α ein? Zeigen Sie, dass $A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(t)\cdot\cos^2(2t)\,dt$ ist und benutzen dann $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$ und schließlich die Substitutionsregel. (7 Pkte)

Lösung. a) Mit der Produktregel errechnen wir

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos t \cdot \cos(2t) - 2\sin t \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}$$

b) Ist t_0 eine Stelle, an der α irregulär ist, so muss $\alpha(t_0) = \vec{0}$ sein. Dann ist aber $\sin(2t_0) = 0$ und zugleich $\cos(t_0)\cdot\cos(2t_0) = 0$. Es bleibt nur $\cos(t_0) = 0$, da nun $\cos(2t_0) = 1$ ist. Da $-\frac{\pi}{4} \leq t_0 \leq \frac{\pi}{4}$, bleibt nur $t_0 = 0$ als Möglichkeit, soll $\sin(2t_0) = 0$ werden. Da aber dann $\cos(t_0) = 1 \neq 0$, entsteht erneut ein Widerspruch. Es gibt daher keine solche Stelle t_0. α ist überall regulär.

c) Es gilt $\alpha(\pi/3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\alpha'(\pi/3) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$. Die Normale an α bei $\alpha(\pi/3)$ ist dann

$$N = \alpha(\pi/3) + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

d) Wir arbeiten mit der Sektorformel. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(\alpha(t),\, \alpha'(t)\,) &= \begin{vmatrix} \cos(2t) & -2\sin(2t) \\ \sin t\cos(2t) & \cos t\, \cos(2t) - 2\sin t\, \sin(2t) \end{vmatrix} \\
&= \cos t\, \cos^2(2t) - 2\sin t\sin(2t)\cos(2t) + 2\sin t\sin(2t)\cos(2t) \\
&= \cos t\, \cos^2(2t) = \cos t(1-2\sin^2 t)^2
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t(1-2\sin^2 t)^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1-2x^2)^2 dx \\
&= \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-2x^2)^2 dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-4x^2+4x^4) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{8}{15\sqrt{2}} = \frac{4}{15}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 Auf $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y > 0\}$ wird die Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{x+2y}{1+x+y}$. Weiter sei $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\vec{g}(t,s) := \begin{pmatrix} t^2 + s(t+1) \\ t(t+s^2) \end{pmatrix}$. Mit h bezeichnen wir die auf $V := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{g}(t,s) \in U\}$ definierte zusammengesetzte Funktion $h = f \circ \vec{g}$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Pkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix $J_{\vec{g}}$ von $\vec{g}$.

(4 Pkte)

c) Berechnen Sie $\nabla h(1,-1)$. (10 Pkte)

Lösung. a) Mit der Quotientenregel wird

$$f_x = \frac{1+x+y-x-2y}{(1+x+y)^2} = \frac{1-y}{(1+x+y)^2}$$

$$f_y = \frac{2(1+x+y)-x-2y}{(1+x+y)^2} = \frac{2+x}{(1+x+y)^2}$$

Somit $\nabla f = \dfrac{1}{(1+x+y)^2}\begin{pmatrix} 1-y \\ 2+x \end{pmatrix}$.

b) Die Regeln für das partielle Differenzieren liefern auch

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} 2t+s & t+1 \\ 2t+s^2 & 2ts \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $(x_0,y_0) := \vec{g}(1,-1) = (-1,2)$. Mit der Kettenregel folgt jetzt

$$(h_t(1,-1),\, h_s(1,-1)\,) = (f_x(x_0,y_0),\, f_y(x_0,y_0)\,)J_{\vec{g}}(1,-1) = \frac{1}{4}(-1,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = (\,\frac{1}{2},\, -1\,)$$

Aufgabe 9 Es sei G das für $0 \le x \le 2$ von unten durch den Graphen von $f_1(x) = x(2-x)$ und von oben durch $f_2(x) = 2(1-|x-1|)$ begrenzte Gebiet. Weiter sei $f(x,y) := \dfrac{1}{\left(1+x+\frac{1}{2}y\right)^2}$

a) Skizzieren Sie G (5 Pkte)

b) Berechnen Sie für jedes $x \in [0,2]$ das "innere" Integral

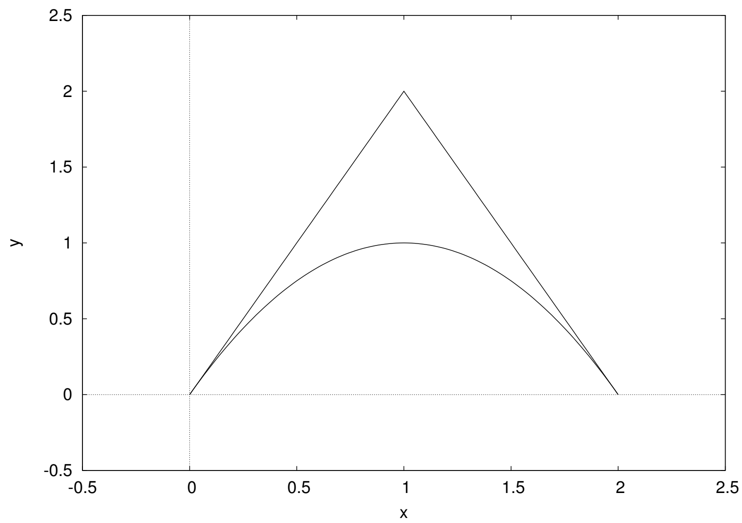
$$J(x) := \int_{G_x} f(x,y)dy,$$

wobei $G_x = \{y \,|\, (x,y) \in G\}$ (8 Pkte)

c) Berechnen Sie das Integral $J := \iint\limits_G f(x,y)dG$.

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2x-(x^2/2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left(\frac{\sqrt{6}+x-2}{\sqrt{6}-(x-2)}\right)$ (7 Pkte)

Lösung. a) Hier ist eine Skizze für G:



b) Es gilt $G_x = \{(x,y) \,\|x(2-x) \le y \le 2(1-|x-1|)\}$ und damit

$$\begin{aligned}
\int_{G_x} f(x,y)dy &= \int_{x(2-x)}^{2(1-|x-1|)} \frac{dy}{\left(1+x+\frac{1}{2}y\right)^2} \\
&= (-2)\cdot \frac{1}{1+x+\frac{1}{2}y}\Big|_{x(2-x)}^{2(1-|x-1|)} \\
&= \frac{2}{1+2x-\frac{1}{2}x^2} - \frac{2}{2+x-|x-1|}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^2 \frac{2}{1+2x-\frac{1}{2}x^2}dx - \int_0^2 \frac{2}{2+x-|x-1|}dx \\
&= \int_0^2 \frac{2}{1+2x-\frac{1}{2}x^2}dx - \int_0^1 \frac{2}{1+2x}dx - \int_1^2 \frac{2}{3}dx \\
&= \int_0^2 \frac{2}{1+2x-\frac{1}{2}x^2}dx - \ln 3 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left(\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}\right) - \ln 3 - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 Untersuchen Sie die Differenzialgleichung

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = (-4t+1)e^{-2t}$$

a) Was ist das charakteristische Polynom P dieser DGL? (3 Pkte)

b) Was sind seine Nullstellen ? (Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei 2.) (3 Pkte)

c) Bestimmen Sie die resultierenden Basislösungen. (4 Pkte)

d) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung u_p ? (4 Pkte)

e) Berechnen Sie u_p mit diesem Ansatz. (6 Pkte)

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. a),b) Es gilt $P(X) = X^3 + 4X^2 - 3X - 18 = (X-2)X^2 + 6X(X-2) + 9(X-2) = (X-2)(X+3)^2$, also sind 2 und 3 die Nullstellen von P.

c) Die Basislösungen sind $e^{2t}, e^{-3t}, te^{-3t}$.

d) Der Ansatz muss lauten $y_p(t) = (at+b)e^{-2t}$.

e) Wir berechnen $y_p' = e^{-2t}(a - 2b - 2at)$, $\quad y_p'' = e^{-2t}(-4a + 4b + 4at)$, $\quad y_p''' = e^{-2t}(12a - 8b - 8at)$ und setzen es in die DGL ein. Es folgt

$$12a - 8b - 8at + 4(-4a + 4b + 4at) - 3(a - 2b - 2at) - 18(at + b) = -4t + 1$$

also

$$-7a - 4b - 4at = -4t + 1$$

Es muss somit $a = 1, b = -2$ sein.

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$y(t) = Ae^{2t} + (Bt + C)e^{-3t} + (t-2)e^{-2t}$$

mit beliebigen Koeffizienten A, B und C.