Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **2.9.2014**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k+5)(4k+9)} = \frac{1}{9} \cdot \frac{n}{4n+9}$$

b) Bestimmen Sie die Menge M derjenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|6x+1| < |4x-3|$ erfüllen.

Lösung. a) Induktionsanfang $n = 1$: Beide Seiten haben den Wert $\dfrac{1}{9 \cdot 13}$.

Gilt die Formel für n, so auch für $n+1$, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(4k+5)(4k+9)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k+5)(4k+9)} + \frac{1}{(4(n+1)+5)(4(n+1)+9)} \\
&= \frac{1}{9} \cdot \frac{n}{4n+9} + \frac{1}{(4n+9)(4n+13)} \\
&= \frac{1}{4n+9} \left(\frac{n}{9} + \frac{1}{4n+13} \right) \\
&= \frac{1}{4n+9} \frac{4n^2+13n+9}{9(4n+13)} = \frac{1}{4n+9} \frac{4n^2+13n+9}{9(4(n+1)+9)} \\
&= \frac{1}{4n+9} \cdot \frac{(4n+9)(n+1)}{9(4(n+1)+9)} = \frac{1}{9} \frac{n+1}{4(n+1)+9}
\end{aligned}$$

b) Genau dann ist $x \in M$, wenn $(6x+1)^2 < (4x-3)^2$, also $36x^2 + 12x + 1 < 16x^2 - 24x + 9$.Sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $20x^2 + 36x - 8 = 0$ oder äquivalent $x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ und ist $x_1 < x_2$, so ist $M = (x_1, x_2)$. Nun finden wir aber $x_1 = -\dfrac{9}{10} - \sqrt{\dfrac{121}{100}} = -2, \quad x_2 = \dfrac{1}{5}$, also $M = (-2, \dfrac{1}{5})$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck $\mathcal{D}$ mit Ecken bei $\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $\vec{D}$ teile die Seite $\overline{BC}$ von $\vec{B}$ aus im Verhältnis $3:1$. Weiter sei $\vec{M}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$.

a) Berechnen Sie $\vec{M}$ und $\vec{D}$ (3+5 Punkte)

b) Welchen Abstand hat $\vec{C}$ von der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$? (8 Punkte)

c) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck $\mathcal{D}$? (4 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{C}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \vec{B} + \frac{3}{4}(\vec{C} - \vec{B}) = \frac{1}{4}(3\vec{C} + \vec{B}) = \begin{pmatrix} 19/4 \\ -9/2 \end{pmatrix}$.

b) Der gesuchte Abstand ist

$$d = \frac{|\det\left(\vec{C} - \vec{A}, \vec{B} - \vec{A}\right)|}{\|\vec{B} - \vec{A}\|} = \frac{|\det\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}|}{\|\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\|} = \frac{28}{\sqrt{29}}$$

c) Der Flächeninhalt von $\mathcal{D}$ ist $F = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{C} - \vec{A}, \vec{B} - \vec{A}\right)\right| = 14.$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 11 & 9 & 10 & -3 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ t \\ 23 \end{pmatrix}$.

a) Für welches t ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ nicht-leer? (zur Orientierung $t = 2$).

b) Berechnen Sie für $t = 2$ Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Welchen Rang hat $\mathcal{A}$? Was ist die Dimension von $N_\mathcal{A}$? Weisen Sie nach, dass der Nullraum $N_\mathcal{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ durch

$$N_\mathcal{A} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. (10+5+5 Pkte)

Lösung. Zu a) In der erweiterten Matrix $(\mathcal{A}|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 8 & -2 & 14 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & t \\ 11 & 9 & 10 & -3 & 23 \end{array}\right)$ vertauschen wir die Zeilen 1 und 2. Dann addieren wir in der entstehenden Matrix $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -2 & 0 & t \\ 8 & 4 & 8 & -2 & 14 \\ 11 & 9 & 10 & -3 & 23 \end{array}\right)$ zur 2. Zeile das 8-fache der 1. Zeile und zur 3. Zeile das 11-fache der 1. Zeile. So finden wir die neue Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -2 & 0 & t \\ 0 & 28 & -8 & -2 & 14 + 8t \\ 0 & 42 & -12 & -3 & 23 + 11t \end{array}\right)$$

Hierin subtrahieren wir von der 3. Zeile das 3/2-fache der 2. Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -2 & 0 & t \\ 0 & 28 & -8 & -2 & 14 + 8t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23 + 11t - 21 - 12t = 2 - t \end{array}\right)$$

Somit ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $t = 2$ ist.

b) Wir lösen nun das System

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 28 & -8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet

$$-a + 3b = 2, \qquad 28b + 2 = 30$$

So sehen wir, dass $b = 1, a = 1$.

c) Der Rang von $\mathcal{A}$ ist 2, die Dimension des Nullraumes von $\mathcal{A}$ ist 4-2=2. Es genügt daher zu zeigen, dass $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{A}}$. Dann ist nämlich der Unterraum $V := \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}$ in $N_{\mathcal{A}}$ enthalten, stimmt also mit $N_{\mathcal{A}}$ überein, da beide Unterräume dieselbe Dimension haben.

Dass $\mathcal{A} \cdot \vec{v}_1 = \mathcal{A} \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$, rechnet man nach.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die Folge $(x_n)_n$ mit

$$x_n = \frac{3n^3 + 13n^2 + 11n - 13}{n^2 + 5n + 7} - \frac{3n^4 - 4n^3 - n^2 + 6n - 8}{n^3 + 2}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu x_n mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -2\cos(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6})$. Klären Sie folgende Fragen:

(i) Welche Periode hat f?

(ii) Welche Nullstellen hat f innerhalb einer Periode?

(iii) Wo hat f innerhalb einer Periode seinen größten, wo seinen kleinsten Wert?

(iv) Skizzieren Sie den Graphen von f über einer Periode. (10+1+2+3+4 Pkte)

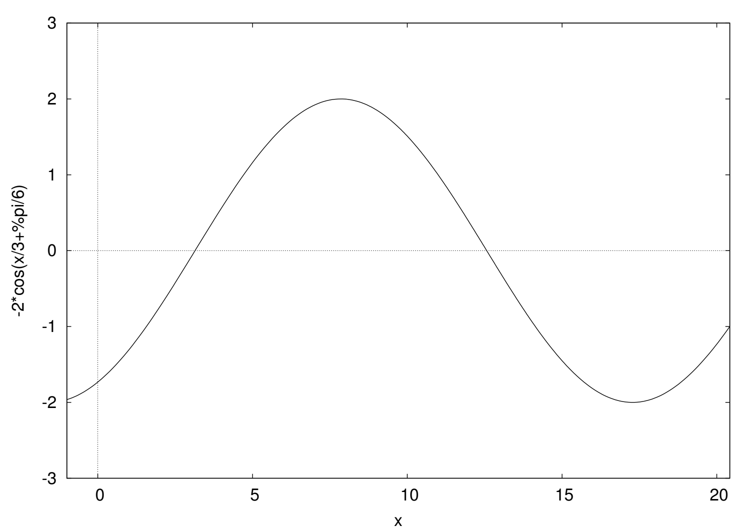
Lösung. a) Sei $y_n := \dfrac{3n^3 + 13n^2 + 11n - 13}{n^2 + 5n + 7}$ und $z_n := \dfrac{3n^4 - 4n^3 - n^2 + 6n - 8}{n^3 + 2}$. Dann ist $y_n = 3n - 2 + \dfrac{1}{n^2 + 5n + 7}$ und $z_n = 3n - 4 - \dfrac{n^2}{n^3 + 2}$. Es folgt $x_n = y_n - z_n = 2 + \dfrac{1}{n^2 + 5n + 7} + \dfrac{n^2}{n^3 + 2} \longrightarrow 2$ mit $n \to \infty$.

Zu b) . (i) Die Periode von f ist $\omega = 6\pi$.

(ii) $f(x) = 0$, wenn $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, also $x = \pi$, oder wenn $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$, also $x = 4\pi$.

(iii) Dort ist $f(x) = 2$, wo $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6} = \pi$, also bei $x = \frac{5\pi}{2}$. An der Stelle ist $f(x) = -2$, wo $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6} = 2\pi$, also $x = \frac{11\pi}{2}$.

(iv) Hier ist der Graph von f.



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x/4}}{x^2+4x+8}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? (Zur Orientierung: $f'(x) = -\frac{x^2+12x+24}{4(x^2+4x+8)^2}e^{-x/4}$) (8 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (5 Pkte)

d) Berechnen Sie die Tangente an den Graphen von f bei $x_0 = -1$.

(4 Pkte)

Lösung. a) Die Funktion ist wegen $x^2 + 4x + 8 \geq 4$ auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt.

b) Die erste Ableitung errechnen wir mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{4}e^{-x/4}(x^2+4x+8) - e^{-x/4}(2x+4)}{x^2+4x+8} \\ &= e^{-x/4}\frac{-\frac{1}{4}(x^2+4x+8) - 2x - 4}{(x^2+4x+8)^2} \\ &= e^{-x/4}\frac{-\frac{1}{4}x^2 - 3x - 6}{(x^2+4x+8)^2} \\ &= -\frac{x^2+12x+24}{4(x^2+4x+8)^2}e^{-x/4} \end{aligned}$$

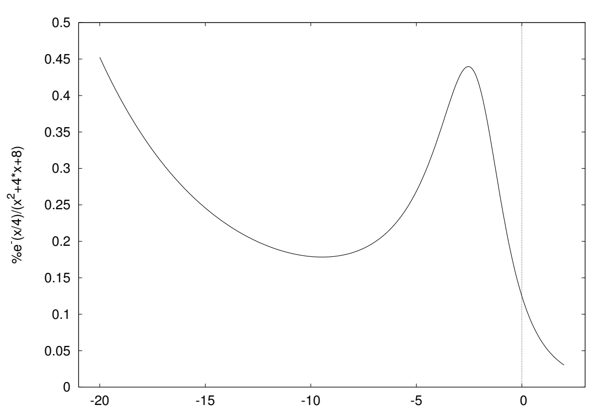
c) Wir suchen die Nullstellen von f'. Diese lösen die quadratische Gleichung $x^2 + 12x + 24 = 0$, also haben wir $x_1 = -6 - 2\sqrt{3}$, und $x_2 = -6 + 2\sqrt{3}$. So sehen wir, dass

$$f'(x) = -\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{4(x^2+4x+8)^2}e^{-x/4}$$

Links von x_1 und rechts von x_2 haben wir $f'(x) < 0$ und auf (x_1, x_2) ist $f'(x) > 0$. Damit muss bei x_1 ein lokales Minimum und bei x_2 ein lokales Maximum von f liegen.

d) Die Tangente hat die Gleichung $y = f(-1) + f'(-1)(x+1) = \frac{e^{1/4}}{5} - \frac{13}{100}e^{1/4}(x+1) = \frac{e^{1/4}}{100}(7 - 13x)$.

Hier ist der Graph von f:



Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral $I := \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x + 4e} dx$.

(5 Pkte)

b) Sei $R(x) = \dfrac{5x^2 - 8x + 8}{x^2(x^2 - x + 2)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von R?

(9 Pkte)

c) Berechnen Sie das Integral $I = \displaystyle\int_2^3 \left(-\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2} \right) dx.$

(6 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Sei $f(t) = \dfrac{t}{t + 4e} = 1 - \dfrac{4e}{t + 4e}$. Dann ist $\frac{e^{2x}}{e^x+4e} = f(e^x)e^x$, und es folgt mit der Substitutionsregel

$$I = \int_1^2 f(e^x)e^x dx = \int_e^{e^2} f(t)dt = e^2 - e - 4e\ln\frac{e^2 + 4e}{e + 4e} = e^2 - e - 4e\ln(4 + e/5)$$

b) Da $x^2 - x + 2$ keine reellen Nullstellen hat, muss der Ansatz lauten

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 2}$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned}
5x^2 - 8x + 8 &= x^2(x^2 - x + 2)R(x) \\
&= Ax(x^2 - x + 2) + B(x^2 - x + 2) + x^2(Cx + D) \\
&= (A + C)x^3 + (-A + B + D)x^2 + (2A - B)x + 2B
\end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$B = 4; \qquad A = -2, \qquad C = 2, \qquad D = -1$$

Also wird

$$R(x) = -\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2}$$

c)

$$I = -2\ln(3/2) + 2 - \frac{4}{3} + \ln(x^2 - x + 2)\Big|_2^3 = 2/3 - 2\ln(3/2) + \ln 2$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Gegeben sei die auf $[0,1]$ definierte Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t) = t(1-t)^2$ und $y(t) = t^2 x(t)$.

a) Berechnen Sie α'. (Zur Orientierung $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} (t-1)(3t-1) \\ (t-1)t^2(5t-3) \end{pmatrix}$) (5 Punkte)

b) In welchen Punkten ist die Kurve regulär, in welchen nicht? (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Normale an α im Punkte $\alpha(1/4)$. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie die den Flächeninhalt der von α umschlossenen Fläche. (6 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$x'(t) = (1-t)^2 - 2t(1-t) = (1-t)(1-3t)$$

und

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2tx(t) + t^2 x'(t) \\ &= 2t^2(1-t)^2 + t^2(1-t)(1-3t) = t^2(1-t)(2(1-t) + 1 - 3t) \\ &= t^2(1-t)(3-5t). \end{aligned}$$

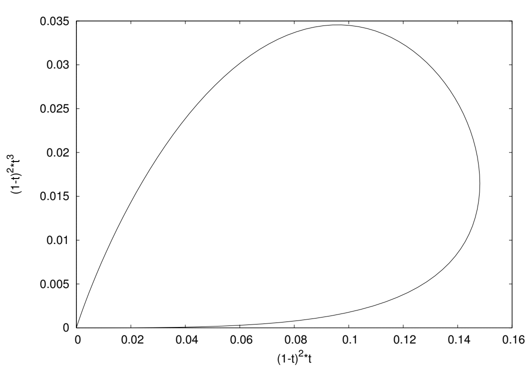
b) Wir haben $x'(t) = 0$ nur, wenn $t = 1$ oder $t = 1/3$. Da auch $y'(1) = 0$, ist α bei $t = 1$ nicht regulär. Wegen $y'(1/3) \neq 0$, ist α bei $t = 1/3$ regulär. Insgesamt sehen wir, dass auf $[0,1)$ die Kurve α regulär ist.

c) Zunächst ist $\alpha(1/4) = \frac{9}{64}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/16 \end{pmatrix}$. Weiter ist $\alpha'(1/4) = \frac{3}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 7/16 \end{pmatrix}$. Die gesuchte Normale ist dann $\mathcal{N} = \frac{9}{64}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/16 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -7/16 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Die Kurve umschließt eine Fläche mit Inhalt A. Es gilt

$$\begin{aligned} 2A &= \Big|\int_0^1 \det(\alpha(t),\ \alpha'(t))dt\Big| \\ &= \int_0^1 (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,dt = \Big|\int_0^1 x(t)\left(2tx(t) + t^2x'(t) - t^2x'(t)x(t)\right)dt\Big| \\ &= 2\int_0^1 tx(t)^2 dt = 2\int_0^1 t^3(1-t)^4 dt = 2\int_0^1 s^4(1-s)^3 ds, \quad \text{Subst. } s := 1-t \\ &= 2\int_0^1 s^4(1-3s+3s^2-s^3)ds = 2\Big(\int_0^1 s^4 ds - 3\int_0^1 s^5 ds + 3\int_0^1 s^6 ds - \int_0^1 s^7 ds\Big) \\ &= 2(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{7} - \frac{1}{8}) = 2(-\frac{3}{10} + \frac{17}{56}) = \frac{1}{140} \end{aligned}$$

Also ist $A = \frac{1}{280}$. Hier ist das Bild der Kurve α:



Aufgabe 8 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \Big((2s-1)\sin(\pi t),\ (t^2-st)\cos(\pi t/2)\Big)$ und $f(x,y) := x(xy-y^2)$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (10 Pkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $h_s(1/2,1/2)$. (4 Punkte)

Lösung. a) Es gilt $f(x,y) = x^2y - xy^2$, also $f_x = 2xy - y^2$, $f_y = x^2 - 2xy$, womit gezeigt ist, dass $\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 - 2xy \end{pmatrix}$.

b) Wir haben $\vec{g}(t,s) = \begin{pmatrix} (2s-1)\sin(\pi t) \\ (t^2-st)\cos(\pi t/2) \end{pmatrix}$, also folgt

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} \pi(2s-1)\cos(\pi t) & 2\sin(\pi t) \\ (2t-s)\cos(\pi t/2) - \frac{\pi}{2}(t^2-st)\sin(\pi t/2) & -t\cos(\pi t/2) \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $\vec{x}_0 := \vec{g}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \vec{0}$.

Mit der Kettenregel folgt nun

$$h_s(1/2,1/2) = \Big(f_x, f_y\Big) \cdot J_{\vec{g}}(1/2,1/2) \cdot \vec{e}_2 = 0$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)

Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = 0$ und $x = 2$ von oben durch den Graphen der Funktion $f(x) := x(3-x)$ und von unten durch den Graphen der Funktion $g(x) := x$ berandet wird.

a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (5 Punkte)

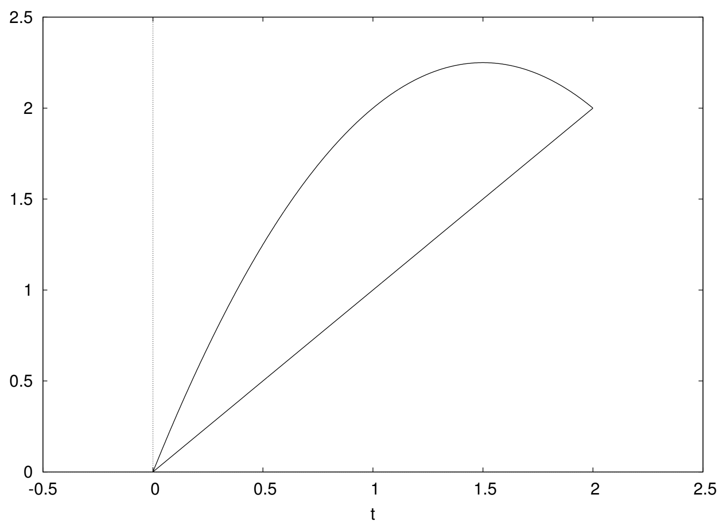
b) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_G \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

(15 Punkte)

Lösung. a) Hier ist das Gebiet G:



b) Es gilt

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \sqrt{x} \left(\int_x^{x(3-x)} \frac{dy}{\sqrt{x+y}} \right) dx \\
&= 2\int_0^2 \sqrt{x} \left(\sqrt{x+y} \Big|_x^{x(3-x)} \right) dx \\
&= 2\int_0^2 \sqrt{x} \left(\sqrt{4x-x^2} - \sqrt{2x} \right) dx \\
&= 2\int_0^2 \left(x\sqrt{4-x} - \sqrt{2}\, x \right) dx \\
&= 2\int_2^4 \left(4\sqrt{u} - u^{3/2} \right) du - 4\sqrt{2}, \qquad u := 4-x \\
&= 2\left(\frac{8}{3}(4^{3/2} - 2^{3/2}) - \frac{2}{5}(4^{5/2} - 2^{5/2}) \right) - 4\sqrt{2} \\
&= 2\left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5} + (\frac{8}{5} - \frac{16}{3})\sqrt{2} \right) - 4\sqrt{2} = 2\left(\frac{128}{15} - \frac{56}{15}\sqrt{2} \right) - 4\sqrt{2} = \frac{256 - 172\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = te^{-t}$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei 1.

Lösung. Das charakteristische Polynom ist $P(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-2)^2(X-1)$.

Also hat die homogene DGL die Basislösungen e^{2t}, te^{2t} und e^t, so dass die homogene DGL die allgemeine Lösung

$$y_{\text{hom}}(t) = (A + Bt)e^{2t} + Ce^t$$

mit Konstanten $A, B, C \in \mathbb{R}$ hat. Gesucht ist nun noch eine partikuläre Lösung. Wir probieren $y_p(t) := (at+b)e^{-t}$ und setzen ein:

$$y_p'(t) = (a - b - at)e^{-t}, \qquad y_p''(t) = (-a - (a - b - at))e^{-t} = (b - 2a + at)e^{-t}$$

und

$$y_p'''(t) = (a - (b - 2a + at))e^{-t} = (3a - b - at)e^{-t}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} y_p''' - 5y_p'' + 8y_p{}' - 4y_p &= (3a - b - at - 5(b - 2a + at) + 8(a - b - at) - 4(at + b)\,)e^{-t} \\ &= (-18at + 21a - 18b)e^{-t} \end{aligned}$$

Wir wählen also $a = -\frac{1}{18}$ und $b = -\frac{7}{108}$. Die allgemeine Lösung lautet jetzt

$$y(t) = -\frac{6t+7}{108}e^{-t} + (A + Bt)e^{2t} + Ce^t$$