Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **3.9.2013**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Für $k \geq 1$ sei $p_k := 1 - \frac{5}{5k+9}$ und $q_n := p_1 \cdot ... \cdot p_n$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$q_n = \frac{9}{5n+9}$$

b) Bestimmen Sie die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < |\frac{x}{2} - 3|\}$$

Lösung. a) Zu $n = 1$: Es ist $p_1 = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} = q_1$.

Angenommen, wir haben $q_n = \frac{9}{5n+9}$ gezeigt. Dann folgt

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n \cdot p_{n+1} \\ &= \frac{9}{5n+9} \cdot (1 - \frac{5}{5n+14}) = \frac{9}{5n+9} \cdot \frac{5n+9}{5n+14} = \frac{9}{5n+14} = \frac{9}{5(n+1)+9} \end{aligned}$$

Zu b) Wir quadrieren beide Seiten und finden

$$\begin{aligned} M &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)^2 < (\frac{x}{2} - 3)^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \Big((x-1) - (\frac{x}{2} - 3) \Big)\Big((x-1) + (\frac{x}{2} - 3) \Big) < 0\} \text{ (3.binomische Formel)} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{x}{2} + 2)(\frac{3x}{2} - 4) < 0 \} = (-4 , \frac{8}{3}) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben seien die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Der Punkt $\vec{D}$ teile die Seite $\overline{BC}$ von $\vec{B}$ aus im Verhältnis $5:1$, und $\vec{E}$ sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$.

a) Berechnen Sie $\vec{D}$ und $\vec{E}$ (3+2 Punkte)

b) Wie lauten die Gleichungen der Geraden G_1 durch $\vec{A}$ und $\vec{D}$ und G_2 durch $\vec{B}$ und $\vec{E}$? (2+2 Punkte)

c) Was ist der Schnittpunkt $\vec{S}$ dieser beiden Geraden? (5 Punkte)

d) Welchen Abstand hat $\vec{C}$ von G_1? (6 Punkte)

Lösung. Zu a) Es gilt

$$\vec{D} = \vec{B} + \frac{5}{6}(\vec{C} - \vec{B}) = \frac{1}{6}(\vec{B} + 5\vec{C}) = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{C}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Zu b) Für die gesuchten Geraden gilt

$$G_1 = \vec{A} + \mathbb{R}(\vec{D} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \vec{B} + \mathbb{R}(\vec{E} - \vec{B}) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -4 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

Zu c) Es gibt $t, s \in \mathbb{R}$, so dass

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

Wir bilden das Skalarprodukt mit $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ und finden $25 + \frac{77}{2}t = 46$, also $t = \frac{6}{11}$ und damit $\vec{S} = \frac{2}{11}\begin{pmatrix} 13 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Zu d) Durch $\vec{n} := \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor zu G_1 gegeben. Der gesuchte Abstand von $\vec{C}$ zu G_1 ist also

$$d = \frac{|\langle \vec{C} - \vec{A}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{7}{\sqrt{41}}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ -7 & 26 & -31 & 29 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ -18 \\ 66 \end{pmatrix}$.

a) Für welches t ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$ nicht-leer? (Zur Orientierung: $t = -6$)

b) Berechnen Sie für dieses t Zahlen $u, v \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \vec{b})$

c) Berechnen Sie den Nullraum von $\mathcal{A}$, also den Raum $\mathcal{N} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$.

(9+5+6 Pkte)

Lösung. In $(\mathcal{A} \mid \vec{b})$ subtrahieren wir von der 2. Zeile (3/2)mal die 1. Zeile, und zur 3. Zeile addieren wir (7/2) mal die 1. Zeile. Dann geht $(\mathcal{A} \mid \vec{b})$ über in

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 6 & t \\ 0 & -8 & \frac{11}{2} & -10 & -18-\frac{3}{2}t \\ 0 & 40 & -\frac{55}{2} & 50 & 66+\frac{7}{2}t \end{array}\right)$$

Zur 3. Zeile addieren wir das 5-fache der 2. Zeile und erhalten die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 6 & t \\ 0 & -8 & \frac{11}{2} & -10 & -18-\frac{3}{2}t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24-4t \end{array}\right)$$

Genau dann existiert eine Lösung für das lineare Gleichungssystem, wenn $t = -6$.

Zu b) Es muss

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & \frac{11}{2} & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

gelten, also $2u + 4v = -6, \qquad -8v = -9$. Das bedeutet $v = \frac{9}{8}$ und $u = \frac{-6-(9/2)}{2} = -\frac{21}{4}$.

Zu c) Genau dann ist $\vec{x} \in \mathcal{N}$, wenn

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & \frac{11}{2} & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h., wenn $2x_1 + 4x_2 = -x_3 - 6x_4, \qquad -8x_2 = -\frac{11}{2}x_3 + 10x_4$. Damit ist $x_2 = \frac{11}{16}x_3 - \frac{5}{4}x_4$ und

$$x_1 = \frac{1}{2}(-4x_2 - x_3 - 6x_4) = \frac{1}{2}\left(-4(\frac{11}{16}x_3 - \frac{5}{4}x_4) - x_3 - 6x_4\right) = -\frac{15}{8}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

Das führt auf

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -15/8 \\ 11/16 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Gegeben sei die Folge $x_n := a_n - b_n$, wobei

$$a_n := \frac{3n^3 + 2n^2 + 4}{(n+1)(n+2)}, \qquad b_n := \frac{12n^3 + 5}{(2n+1)(2n+3)}$$

Konvergiert diese Folge?

(Hinweis: Formen Sie dazu a_n und b_n mit Polynomdivision um).

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) := \frac{x}{x^2+1}$. Finden Sie ein Intervall $I = [a, b]$, so dass $f : [0, 1] \longrightarrow I$ invertierbar ist. Berechnen Sie die Umkehrfunktion. (12+8 Pkte)

Lösung. Zu a) Es gilt mit Polynomdivision

$$a_n = 3n - 7 + \frac{15n+8}{(n+1)(n+2)}, \qquad b_n = 3n - 6 + \frac{39n+23}{(2n+1)(2n+3)}$$

und damit

$$x_n = -1 + \frac{15n+8}{(n+1)(n+2)} - \frac{39n+23}{(2n+1)(2n+3)},$$

woraus wir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$ erhalten.

b) Zunächst ist

$$f(x) - f(z) = \frac{x(z^2+1) - z(x^2+1)}{(x^2+1)(z^2+1)} = \frac{(1-xz)(x-z)}{(x^2+1)(z^2+1)} < 0,$$

wenn $x, z \in [0,1]$ und $x < z$. Damit kann man $I = [0, f(1)] = [0, \frac{1}{2}]$ wählen.

Die Gleichung $y = f(x)$, also die (in x quadratische) Gleichung $x = y(x^2+1)$ muss nach x aufgelöst werden. Es gilt $x^2 - \frac{x}{y} = -1$. Es folgt dann $x = \frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y} = \frac{2y}{1\pm\sqrt{1-4y^2}}$. Wegen $f(1/2) = 2/5$ muss das positive Vorzeichen gewählt werden, also

$$f^{-1}(y) = x = \frac{2y}{1+\sqrt{1-4y^2}}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x+6} \cdot e^{-2x}$$

a) Wo ist diese Funktion definiert? (3 Pkte)

b) Was ist die 1. Ableitung von f? (6 Pkte)

c) Welche lokalen Extrema für f gibt es und wo? (6 Pkte)

d) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (5 Pkte)

Lösung. a) Die Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$ definiert.

b) Es gilt

$$f'(x) = \frac{-2e^{-2x}(x+6) - e^{-2x}}{(x+6)^2} = -\frac{2x+13}{(x+6)^2}e^{-2x}$$

c) $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -\frac{13}{2}$. Weiter ist $f'(x) < 0$ auf $(-\frac{13}{2}, -6)$ und $f'(x) > 0$ auf $(-\infty, -\frac{13}{2})$. Somit hat f bei $-13/2$ ein lokales Maximum. Weitere Extrema existieren nicht.

d) Es gilt $T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$. Nun ist aber $f(0) = \frac{1}{6}$, $f'(0) = -\frac{13}{36}$ und $f''(x) = 2e^{-2x}\frac{2x+13}{(x+6)^2} - e^{-2x}\frac{2(x+6)-2(2x+13)}{(x+6)^3}$, also $f''(0) = \frac{13}{18} + \frac{7}{108} = \frac{85}{108}$. Das liefert

$$T_2(x) = \frac{1}{6} - \frac{13}{36}x + \frac{85}{216}x^2$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Man berechne das Integral

$$I := \int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(4 Pkte)

b) Sei $R(x) = \dfrac{3x^3 - x^2 + 4x - 8}{x^2(x^2+4)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von R?

(5 Pkte)

c) Berechnen Sie $\int_2^{2\sqrt{3}} R(x)dx$.

(10 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) Es gilt $\Big(\arcsin(x)\Big)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, also folgt mit Substutionsregel

$$I = \int_0^{1/2} \arcsin(x) \cdot \Big(\arcsin(x)\Big)' dx = \frac{1}{2}\Big(\arcsin(x)\Big)^2\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi^2}{72}$$

b) Der Ansatz für die Partialbruchdarstellung muss lauten:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \\ &= \frac{Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4)} \\ &= \frac{Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2+4)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 4Ax + 4B}{x^2(x^2+4)} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich der Zählerpolynome folgt

$$A + C = 3, \qquad B + D = -1, \qquad 4A = 4, \qquad 4B = -8$$

Also ist $A = 1,\ B = -2,\ C = 2,\ D = 1$ und damit

$$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+4}$$

c) Gliedweise Integrieren ergibt uns

$$\begin{aligned} \int_2^{2\sqrt{3}} R(x)dx &= \Big(\ln x + \frac{2}{x} + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\frac{x}{2})\Big)\Big|_2^{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \ln 2 + \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)

Gegeben sei die auf $[0, 2\pi)$ in Polarkoordinaten definierte Kurve $\alpha(t) = r(t)\vec{e}(t)$, wobei $\vec{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $r(t) = 1 + \sin^2 t + \cos t$.

a) Berechnen Sie α'. Wo ist α regulär? (6 +2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve α an der Stelle $\alpha(\pi/3)$.

(4 Punkte)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt A der von der Kurve α berandeten Fläche.

(8 Punkte)

Lösung. a) Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= r'(t)\vec{e}(t) + r(t)\vec{e}_\perp(t) \\ &= (2\sin t\, \cos t - \sin t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1+\sin^2 t + \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt $r(t) = 0$ genau dann, wenn $\sin t = 0, \cos t = -1$, also genau bei $t = \pi$. Dort ist auch $r'(t) = 2\cos(\pi)\sin\pi - \sin\pi = 0$, also ist α in den Punkten $t \neq \pi$ regulär und in $t = \pi$ nicht regulär. Diepenbrock b) Es gilt

$$\alpha'(\pi/3) = (\sin(\frac{2\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + (1 + \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{9}{8} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$T_{\alpha,\pi/3} = \alpha(\pi/3) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{9}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^{2\pi} r(t)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1+\sin^2 t + \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin^2 t + \sin^4 t + \cos^2 t + 2\cos t + 2\sin^2 t\, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin^2 t + \sin^4 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \left(2 + \sin^2 t + \sin^4 t\right) dt \end{aligned}$$

denn $1 + 2\sin^2 t + \cos^2 t = 2 + \sin^2 t$. Nun ist aber $\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$ und $\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt = \frac{3}{4}\pi$. Somit wird $A = \frac{23}{8}\pi$.

Aufgabe 8 (20 Punkte)
Es sei $\vec{g}(t,s) := \left(t\sin s - s\cos t,\ 3\sin(2t-s) - \cos t\right)$ und $f(x,y) := ye^{5\sin(2x)-y}$.

a) Berechnen Sie ∇f. (3+3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $\vec{g}$ (4 Punkte)

c) Ist dann $h(t,s) := f(\vec{g}(t,s))$, so berechnen Sie $h_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$. (10 Punkte)

Lösung. Zu a) Es gilt

$$\nabla f = e^{5\sin(2x)-y} \begin{pmatrix} 10y\cos(2x) \\ 1-y \end{pmatrix}$$

Zu b) Es gilt

$$J_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} \sin s + s\sin t & t\cos s - \cos t \\ 6\cos(2t-s) + \sin t & -3\cos(2t-s) \end{pmatrix}$$

Zu c) Die Kettenregel sagt, dass, wenn wir setzen $(x_0, y_0) := \vec{g}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$, dann

$$h_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = f_x(x_0, y_0)(g_1)_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) + f_y(x_0, y_0)(g_2)_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$$

gilt.

Nun ist aber $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{12}, \frac{5}{2})$ und somit

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{25}{2}\sqrt{3} \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Weiter ist

$$J_{\vec{g}}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Setzen wir das in die Kettenregel ein, folgt

$$h_t(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \left(\frac{25}{2}\sqrt{3}(\frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12}) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{11}{2}\sqrt{3} + \frac{25}{8}\pi$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei G das Gebiet

$$G := \{(x,y) \mid x,y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$$

a) Skizzieren Sie das Gebiet G.

(Hinweis: Wie verhält sich die Ableitung von $(1-\sqrt{x})^2$ bei $x = 0$ und $x = 1$?)

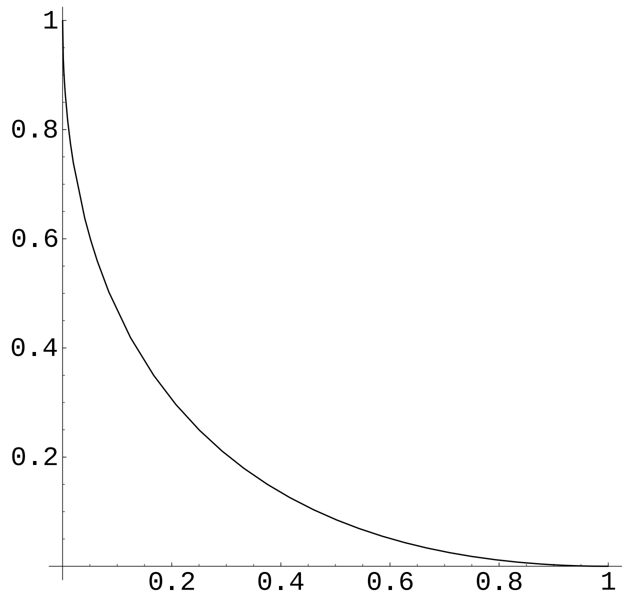
(5 Pkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint\limits_G \frac{1}{(4\sqrt{x}+y)^2} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges. (15 Pkte)

Lösung. a) Das Gebiet G hat die folgende Gestalt:



b) Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \frac{1}{(4\sqrt{x}+y)^2} dy \right) dx \\
&= -\int_0^1 \left(\frac{1}{4\sqrt{x}+y} \Big|_{y=0}^{(1-\sqrt{x})^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{x}+(1-\sqrt{x})^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{4\sqrt{x}(4\sqrt{x}+(1-\sqrt{x})^2)} dx = \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^2 du = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{4}{1+u} + \frac{4}{(1+u)^2} \right) du \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - 4\ln 2 - \frac{4}{1+u} \Big|_0^1 \right) = \frac{3}{2} - 2\ln 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$4y''' - 19y'' + 28y' - 12y = e^{3t/4}$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei 2.

Lösung. Mit dem Hornerschema erhalten wir wir das charakteristische Polynom P, die Zerlegung

$$P = (4X - 3)(X - 2)^2$$

Somit werden die Lösungen der homogenen DGL durch

$$y_{\text{hom}}(t) = Ae^{3t/4} + (B + Ct)e^{2t}$$

gegeben, wobei A, B und C beliebige reelle Koeffizienten sind.

Für die partikuläre Lösung versuchen wir

$$u_{\text{part}}(t) = ate^{3t/4}$$

Da $3/4$ eine einfache Nullstelle für P ist, können wir $a = \frac{1}{P'(3/4)} = \frac{4}{25}$ nehmen. Also ist die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y(t) = \frac{4}{25}te^{3t/4} + Ae^{3t/4} + (B + Ct)e^{2t}$$