Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **28.8.2012**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Für $k \geq 2$ sei $a_k = 1 - \frac{1}{k^2}$ und $p_n := a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n$, für $n \geq 2$.

Zeigen Sie durch Induktion nach n, dass für alle $n \geq 2$ gilt

$$p_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$$

(10 Pkte)

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge M der Ungleichung

$$|3x - 2| > |x|$$

(10 Pkte)

Lösung. a) $p_2 = a_2 = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2})$.

Angenommen, wir haben schon bewiesen, dass $p_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$. Dann ist

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= p_n \cdot a_{n+1} \\
&= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) \\
&= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n+1})(1 + \frac{1}{n+1}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}(1 + \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n+1})
\end{aligned}$$

b) Wir zerlegen M in $M_1 := M \cap [\frac{2}{3}, \infty)$ und $M_2 = M \cap (-\infty, \frac{2}{3})$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{x \geq 2/3 \,|\, |x| < 3x - 2\} \\
&= \{x \geq 2/3 \,|\, 2 - 3x < x < 3x - 2\} \\
&= \{x \geq 2/3 \,|\, x > 1\} \\
&= (1, \infty)
\end{aligned}
\quad , \quad
\begin{aligned}
M_2 &= \{x < 2/3 \,|\, |x| < 2 - 3x\} \\
&= \{x < 2/3 \,|\, 3x - 2 < x < 2 - 3x\} \\
&= \{x < 2/3 \,|\, x < 1/2\} \\
&= (-\infty, \tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

Somit ist

$$M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei das Dreieck mit Ecken $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $\vec{D}$ teile die Seite $\overline{BC}$ von $\vec{B}$ aus im Verhältnis $3 : 1$, und $\vec{M}$ sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.

a) Bestimmen Sie die Geraden G_1 durch $\vec{A}$ und $\vec{D}$ in Punktrichtungsform.

b) Bestimmen Sie die Gerade G_2 durch $\vec{M}$ und $\vec{C}$ in Punktrichtungsform.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

(7+7+6 Pkte)

Lösung. a) Es gilt zunächst

$$\vec{D} = \vec{B} + \frac{3}{4}(\vec{C} - \vec{B}) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}(\vec{D} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

b) Weiter ist $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit

$$G_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -15 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, also

$$\det\left(\vec{B} - \vec{A}, \vec{C} - \vec{A}\right) = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

Also ist der gesuchte Flächeninhalt gleich 18.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung, wobei

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 10 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ -12 \end{pmatrix}$$

(Zur Orientierung: $t = -5$)

b) Berechnen Sie für dieses lineare Gleichungssystem einen Lösungsvektor $\vec{x}_0$ der Form $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(13+7 Pkte)

Lösung. a) Die erweiterte Matrix $\left(\mathscr{A} \mid \vec{b}\right)$ wir mit Zeilenoperationen umgeformt. Zur 2. Zeile addieren wir $\frac{3}{4}$mal die 1. Zeile und zur 3. Zeile wird die 1. Zeile addiert. So finden wir

$$\left(\mathscr{A} \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 6 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & -1 & -1 & t \\ -4 & 10 & 8 & 6 & -12 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & \frac{13}{4} & \frac{7}{2} & \frac{11}{4} & t+3 \\ 0 & 13 & 14 & 11 & -8 \end{array}\right)$$

Von der 3. Zeile subtrahieren wir das 4-fache der 2. Zeile und erhalten die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & \frac{13}{4} & \frac{7}{2} & \frac{11}{4} & t+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4t-20 \end{array}\right)$$

Lösungen existieren genau dann, wenn $-4t-20=0$, also $t=-5$ ist.

b) Wir müssen nur das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \\ & & \frac{13}{4}x_2 & = & -2 \end{array}$$

lösen. Dabei finden wir $x_2 = -\frac{8}{13}$, $\qquad x_1 = \frac{19}{13}$ und damit $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} \\ -\frac{8}{13} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n := \frac{2n^2+1}{n+3} - \frac{n(n^2-1)}{(\frac{1}{2}n+1)(n+4)}$$

Konvergiert die Folge $(x_n)_n$, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x}, \qquad x \in A := [\frac{1}{2}, 1]\,.$$

Ist f monoton wachsend?

Bestimmen Sie eine Menge $W \subset \mathbb{R}$, so dass $f : A \longrightarrow W$ invertierbar ist und berechnen Sie ihre Umkehrfunktion.

(12+8 Pkte)

Lösung. a) Mit Polynomdivision folgt

$$\frac{2n^2+1}{n+3} = 2n - 6 + \frac{19}{n+3}$$

und

$$\frac{n(n^2-1)}{(\frac{1}{2}n+1)(n+4)} = 2n - 12 + \frac{27n+48}{(\frac{1}{2}n+1)(n+4)}$$

Also

$$x_n = 6 + \frac{19}{n+3} - \frac{27n+48}{(\frac{1}{2}n+1)(n+4)} \longrightarrow 6$$

mit $n \to \infty$.

b) Die Funktionen $x \longmapsto 2x$ und $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ wachsen monoton auf A. Damit wächst auch f als Summe dieser 2 Funktionen monoton, und $W = f(A) = [f(\frac{1}{2}), f(1)] = [-1\,,\,1]$. Weiter ist f invertierbar. Lösen wir die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf, so erhalten wir

$$x = \frac{y}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y^2}{16}}$$

Soll $x \in A$ sein, muss das Pluszeichen gewählt werden. Also haben wir

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{4} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y^2}{16}}$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2 - x + \frac{1}{2}}$$

a) Was ist die 1. Ableitung von f? (6 Pkte)

(Zur Orientierung: Es muss

$$f'(x) = e^{x^2} \frac{2x^3 - 2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + \frac{1}{2})^2}$$

herauskommen).

b) Wo hat f' Nullstellen?

(6 Pkte)

c) Auf welchen Intervallen ist f' positiv und wo negativ?

(5 Pkte)

d) An welche Stellen hat f ein lokales Minimum (bzw. Maximum)? (3 Pkte)

Lösung. Mit der Quotientenregel finden wir

$$f'(x) = e^{x^2} \frac{2x(x^2 - x + \frac{1}{2}) - (2x - 1)}{(x^2 - x + \frac{1}{2})^2} = e^{x^2} \frac{2x^3 - 2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + \frac{1}{2})^2}$$

b) Durch Raten kommt man zu $x_1 = 1$ als Nullstelle von f'. Dann führt eine Polynomdivision auf

$$2x^3 - 2x^2 - x + 1 = (x - 1)(2x^2 - 1)$$

Die anderen Nullstellen von f' sind dann aber $x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

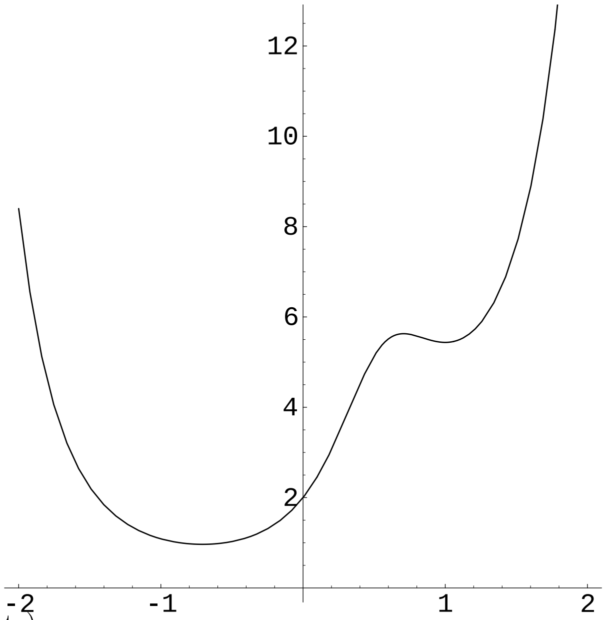
c) Es gilt

$$f'(x) = 2e^{x^2} \frac{(x - 1)(x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}})}{(x^2 - x + \frac{1}{2})^2}$$

Daran lesen wir ab, dass f auf $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ negativ ist und auf $(1, \infty)$ positiv. Auf $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ist f' positiv und negativ auf $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

d) Aus c) folgt: Bei $x_1 = 1$ liegt ein lokales Minimum, bei $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ liegt ein lokales Maximum und bei

$x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ liegt ein lokales Minimum für f.



Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral $A := \int_0^2 x\sqrt{2x+1}dx$. (5 Pkte)

b) Bestimmen Sie zu

$$R(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2(1+x^2)}$$

die Partialbruchzerlegung.

(10 Pkte)

c) Berechnen Sie zu R eine Stammfunktion.

(5 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

Lösung. a) 1. Weg: Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^2 x\sqrt{2x+1}dx \\
&= x \cdot \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 (2x+1)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{2}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 \\
&= \frac{2}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}\left(5^{\frac{5}{2}} - 1\right) = \frac{1}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

2. Weg: Wir substituieren $x := \frac{t-1}{2}$. Dann ist $x'(t) = \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^5 \frac{t-1}{2}\sqrt{t}\,\frac{1}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_1^5 t^{3/2}dt - \int_1^5 t^{1/2}dt\right) \\
&= \left(\frac{1}{10}t^{5/2} - \frac{1}{6}t^{3/2}\right)\Big|_1^5 \\
&= \frac{1}{10}5^{5/2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{6}5^{3/2} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3}5^{3/2} + \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

3. Weg: Wir substituieren $x := \frac{t^2-1}{2}$. Dann ist $x'(t) = t$, also

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{5}} (t^2-1)t^2 dt \\
&= \left(\frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{6}t^3\right)\Big|_1^{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{10}5^{5/2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{6}5^{3/2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}5^{3/2} + \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

b) Der geeignete Ansatz lautet

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

Ausmultiplizieren liefert

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2(1+x^2)} &= \frac{Ax(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)x^2}{x^2(1+x^2)} \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B}{x^2(1+x^2)}
\end{aligned}$$

So erhalten wir

$$B = -2, \quad A = 1, \quad C = D = 1$$

und

$$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

c) Daraus folgt sogleich

$$\int R(x)dx = \ln|x| + \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg}(x)$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)

Gegeben sei die Kurve $\alpha(t) := r(t)\vec{e}(t)$, mit $r(t) = 2 + \sin(4t)$ und $\vec{e}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi)$.

a) Wo ist α regulär, also $\alpha'(t) \neq \vec{0}$?

b) Berechnen Sie die Tangente an diese Kurve an der Stelle $\alpha(\pi/8)$.

(Hinweis: Die Werte von cos und sin an der Stelle $\pi/8$ müssen nicht berechnet werden).

c) Welche Fläche wird von der Kurve umschlossen?

(Dazu überlegen Sie zuerst, dass $\det(\alpha(t),\, \alpha'(t)\,) = r(t)^2$.

(4 + 7 + 9 Pkte)

Lösung. a) Es gilt $\alpha' = r'\vec{e} + r \cdot \vec{e}_\perp = \vec{0}$ genau dann, wo $r = r' = 0$. Da $r \geq 1$ überall, tritt das nie auf. Also ist α überall regulär.

b) Es gilt $r(\pi/8) = 2 + \sin(\pi/2) = 3$ und $r'(\pi/8) = 4\cos(\pi/2) = 0$. Damit wird

$$\alpha'(\pi/8) \quad = \quad r(\pi/8) \cdot \vec{e}_\perp(\pi/8) = 3 \begin{pmatrix} -\sin(\pi/8) \\ \cos(\pi/8) \end{pmatrix}$$

Also folgt

$$T_{\alpha,\pi/8} = 3 \begin{pmatrix} \cos(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\sin(\pi/8) \\ \cos(\pi/8) \end{pmatrix}$$

c) Es gilt, wenn wir $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$ schreiben:

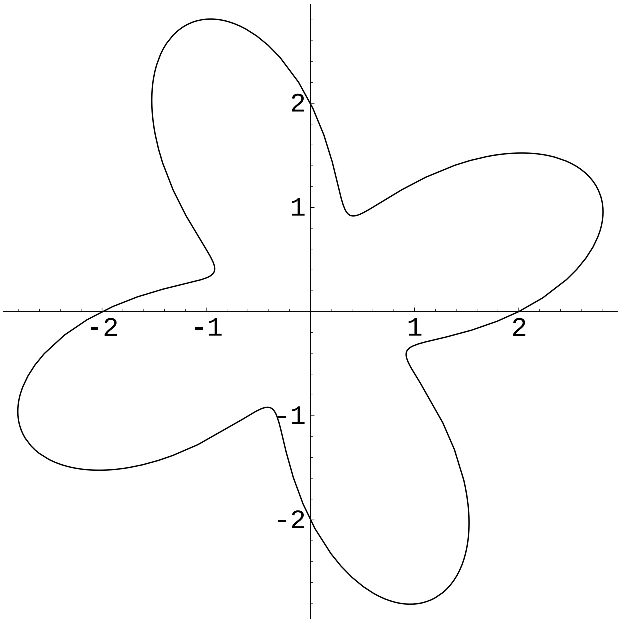
$$\begin{aligned}
\det(\alpha(t),\, \alpha'(t)\,) &= \det \begin{pmatrix} re_x & -re_y + r'e_x \\ re_y & re_x + r'e_y \end{pmatrix} \\
&= re_x(re_x + r'e_y) - re_y(-re_y + r'e_x) \\
&= r^2(e_x^2 + e_y^2) = r^2
\end{aligned}$$

Also schließt die Kurve die Fläche

$$\begin{aligned}
A &:= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(t)^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(4 + 4\sin(4t) + \sin^2(4t)\Big) dt \\
&= 4\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(4t) dt \\
&= 4\pi + \frac{1}{16}\Big(4t - \sin 4t \cos 4t\Big)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

ein.

Hier ist das Bild



Aufgabe 8 (20 Punkte)

a) Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_2 e^{-2x_1}}{1 + x_1}$$

auf $U := \{x_1 > -1/2\}$.

Dann berechnen Sie die linearisierte Funktion zu f an der Stelle $\vec{x}^0 := (-\frac{1}{2}, 2)$.

(9 Pkte)

b) Sei $g(t, s) := (t + ts - 4s,\, 4t^2 - 2s^2)$ und $f(x, y) := x \cdot (4 + x^2 + 2y^2)$. Berechnen Sie mit der **Kettenregel** die partielle Ableitung $(f \circ g)_t$ im Punkte $(t_0, s_0) := (2, 3)$.

(11 Pkte)

Lösung. a) Es gilt $f(-\frac{1}{2}, 2) = 4e$ und

$$f_{x_1}(x) = x_2 e^{-2x_1} \frac{-2(1 + x_1) - 1}{(1 + x_1)^2}$$

und

$$f_{x_2}(x) = \frac{e^{-2x_1}}{1 + x_1}$$

Der Gradient zu f bei $\vec{x}^{\,0}$ ist daher

$$f_{x_1}(-\frac{1}{2}, 2) = -16e, \qquad f_{x_2}(-\frac{1}{2}, 2) = 2e$$

Also folgt

$$\mathscr{L}_f(\vec{x}^0, \vec{x}) = 4e - 16e(x_1 + \frac{1}{2}) + 2e(x_2 - 2)\,.$$

b) Die Kettenregel sagt, dass (mit $\vec{x}_0 := g(2,3)$)

$$(f \circ g)_t(2,3) = f_x(\vec{x}_0) \cdot (g_1)_t(2,3) + f_y(\vec{x}_0) \cdot (g_2)_t(2,3) \tag{1}$$

Nun ist aber $\vec{x}_0 = (-4,-2)$ und

$$(g_1)_t = s+1, \quad (g_1)_t(2,3) = 4\,, \qquad (g_2)_t = 8t, \quad (g_2)_t(2,3) = 16$$

Weiter ist

$$f_x = 4 + 3x^2 + 2y^2, \qquad f_x(\vec{x}_0) = 60\,, \qquad f_y = 4xy, \qquad f_y(\vec{x}_0) = 32$$

Das, in (1) eingesetzt, ergibt

$$(f \circ g)_t(2,3) = 60 \cdot 4 + 32 \cdot 16 = 752$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei G der Bereich, der innerhalb $0 \le x \le 4$ von unten durch die x-Achse und von oben durch den Graphen von $f(x) = 2(1 - (\frac{x}{4})^2)$ berandet wird.

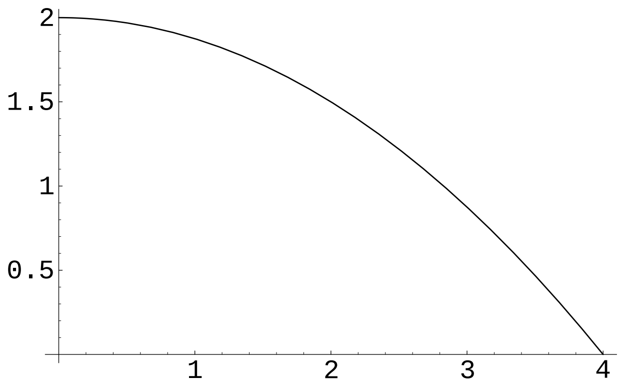
a) Skizzieren Sie das Gebiet G. (4 Pkte)

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt von G, also den Punkt $\vec{S} := \frac{1}{A}(x_S, y_S)$, wobei

$$A = \iint\limits_G dG, \qquad x_S = \iint\limits_G x dG, \qquad y_S = \iint\limits_G y dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges. (1+6+9 Pkte)

Lösung. a) Das Gebiet G sieht so aus:



b) Es gilt

$$A = \int_0^4 f(x)dx = 8\int_0^1 (1-z^2)dz = 8\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}\,.$$

Weiter haben wir

$$
\begin{aligned}
x_S &= \iint\limits_G x dG = \int_0^4 \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx = \int_0^4 x f(x) dx = \int_0^4 (2x)(1-(\frac{x}{4})^2) dx \\
&= \int_0^{16} (1-\frac{z}{16}) dz, \ \text{ mit } z := x^2 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

also $x_S = \frac{3}{2}$. und schließlich

$$
\begin{aligned}
y_S &= \iint\limits_G y dG = \int_0^4 \left(\int_0^{f(x)} y dy \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)^2 dx = 2 \int_0^4 (1-(\frac{x}{4})^2)^2 dx \\
&= 8 \int_0^1 (1-z^2)^2 dz = 8(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}) = \frac{64}{15}
\end{aligned}
$$

Also ist $\vec{x}_S = (\frac{3}{2},\ \frac{4}{5})$.

Aufgabe 10 (20 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen u der Differenzialgleichung

$$2y''' - y'' + 8y' - 4y = 4\cos(2t) + 16\sin(2t)$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Hinweis: Das charakteristische Polynom verschwindet bei $\frac{1}{2}$.

Lösung. Das charakteristische Polynom der DGL ist

$$P = 2X^3 - X^2 + 8X - 4 = X^2(2X-1) + 4(2X-1) = (2X-1)(X^2+4)\,.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_{\text{hom}}(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t) + c\,e^{t/2}$$

Für die noch benötigte partikuläre Lösung probieren wir

$$u_p(t) = t\,u_0$$

mit $u_0 := A\sin(2t) + B\cos(2t)$. Dann ist

$$u_p' = t\,u_0' + u_0, \quad u_p'' = t\,u_0'' + 2u_0', \quad u_p''' = t\,u_0''' + 3u_0''$$

Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
2u_p''' - u_p'' + 8u_p' - 4u_p &= t\,(2u_0''' - u_0'' + 8u_0' - 4u_0) + 6u_0'' - 2u_0' + 8u_0 \\
&= -24u_0 - 4(A\cos(2t) - B\sin(2t)) + 8u_0 \\
&= -16(A\sin(2t) + B\cos(2t)) - 4(A\cos(2t) - B\sin(2t)) \\
&= -(16A - 4B)\sin(2t) - (4A + 16B)\cos(2t)
\end{aligned}
$$

Das führt auf

$$-4A - 16B = 4, \quad -16A + 4B = 16$$

Die Lösung dazu ist $A = -1, B = 0$. Also

$$u_p(t) = -t\sin(2t)$$

Die allgemeine Lösung zur DGL ist dann $y = y_{\text{hom}} + y_{\text{p}}$.