**Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann**
**Bergische Universität Wuppertal** **30.8.2011**

## Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

**Aufgabe 1** (20 Punkte)
a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass folgendes für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-\frac{1}{2})^k k = -\frac{2}{9}\,(1 + \frac{6n-1}{4^n})$$

(10 Pkte)

b) Berechnen Sie die Menge $M$ aller Zahlen $x$, die die Ungleichung

$$|x + \frac{3}{4}| > x^2$$

erfüllen. (10 Pkte)

*Lösung.* a) Für $n = 1$ steht links $-1/2$ und rechts $-\frac{2}{9}(1 + \frac{5}{4}) = -\frac{1}{2}$, also sind beide Seiten gleich. Angenommen, die Gleichung gelte für $n$. Soll sie auch für $n + 1$ gelten, muss also

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-\frac{1}{2})^k k = -\frac{2}{9}\,(1 + \frac{6n+5}{4^{n+1}})$$

gezeigt werden. Das geht so:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1} (-\frac{1}{2})^k k &= \sum_{k=1}^{2n-1} (-\frac{1}{2})^k k + (-\frac{1}{2})^{2n}(2n) + (-\frac{1}{2})^{2n+1}(2n+1) \\
&= -\frac{2}{9}\,(1 + \frac{6n-1}{4^n}) + \frac{2n}{4^n} - \frac{2n+1}{2 \cdot 4^n} \\
&= -\frac{2}{9}\left(1 + \frac{6n-1}{4^n} - \frac{9n}{4^n} + \frac{9(2n+1)}{4 \cdot 4^n}\right) \\
&= -\frac{2}{9}\left(1 + \frac{24n - 4 - 36n + 18n + 9}{4^{n+1}}\right) \\
&= -\frac{2}{9}\,(1 + \frac{6n+5}{4^{n+1}})
\end{aligned}$$

b) Ist $x \in M \cap [-\frac{3}{4}, \infty)$, so haben wir

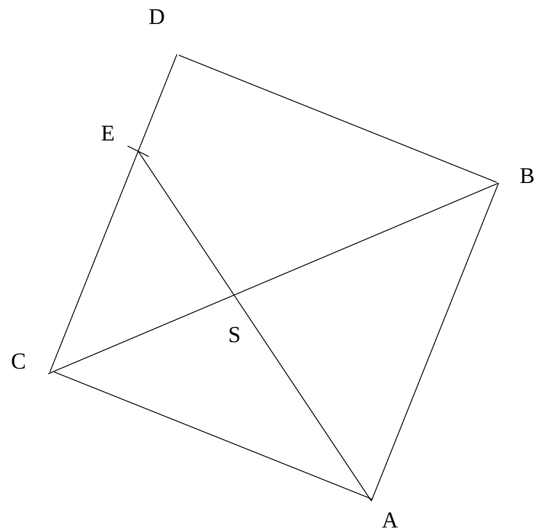
$$x + \frac{3}{4} > x^2\,, \text{ also (äquivalent) } (x - \frac{1}{2})^2 < 1\,, \text{ also (äquivalent) } -1 < x - \frac{1}{2} < 1$$

Das heißt: Ist $M \cap [-\frac{3}{4}, \infty) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Ist nun $x \in M \cap (-\infty, -\frac{3}{4})$, so folgt $-\frac{3}{4} - x > x^2$, also $(x + \frac{1}{2})^2 < -\frac{1}{2}$, so, dass $M \cap (-\infty, -\frac{3}{4}) = \emptyset$. Damit finden wir

$$M = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\,.$$

**Aufgabe 2** (20 Punkte)
a) Gegeben sei ein Quadrat mit Ecken $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ und $\vec{D}$. Dabei ist $\vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$.




Der Punkt $\vec{E}$ teile die Strecke $\overline{CD}$ von $\vec{C}$ aus im Verhältnis 2:1 .

Berechnen Sie den Schnittpunkt $\vec{S}$ der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{E}$ mit der Geraden durch $\vec{B}$ und $\vec{C}$ .

b) Gegeben seien die Geraden $G_1$ und $G_2$. Dabei verlaufe $G_1$ durch die Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Die Gerade $G_2$ sei durch $G_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Haben $G_1$ und $G_2$ einen Schnittpunkt?

(10 +10 Pkte)

*Lösung.* a) Es gilt

$$\vec{E} = \vec{C} + \frac{2}{3}(\vec{B} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Für $\vec{S}$ gibt es Parameter $t, s$ mit

$$\vec{S} = \vec{B} + t(\vec{C} - \vec{B}) = \vec{A} + s(\vec{E} - \vec{A})$$

Es gilt dann

$$t(\vec{C} - \vec{B}) - s(\vec{E} - \vec{A}) = \vec{A} - \vec{B}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} -17t + \frac{26}{3}s &= -5 \\ -7t - 13s &= -12 \end{aligned}$$

Zur ersten Gleichung addieren wir 2/3-mal die 2. Gleichung und finden

$$-(17 + \frac{14}{3})t = -13$$

also $65t/3 = 13$ und damit $t = 3/5$. Das ergibt

$$\vec{S} = \vec{B} + \frac{3}{5}(\vec{C} - \vec{B}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 69 \end{pmatrix}$$

b) Wir haben für $G_1$ die Darstellung

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Daher prüfen wir, ob

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Dazu bilden wir die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 29 \neq 0$$

Das zeigt, dass $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

**Aufgabe 3** (20 Punkte)
Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung, wobei

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -40 & 6 & 11 \\ 0 & 12 & 5 & -3 \\ 6 & 12 & -5 & 0 \\ -2 & -24 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -81 \\ 37 \\ 8 \\ t-55 \end{pmatrix}$$

(Zur Orientierung: $t = -8$)

b) Bestimmen Sie den Lösungsraum für das homogene lineare Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$. (10+10 Pkte)

*Lösung.* a) Die erweiterte Matrix ist

$$(\mathcal{A}|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -40 & 6 & 11 & -81 \\ 0 & 12 & 5 & -3 & 37 \\ 6 & 12 & -5 & 0 & 8 \\ -2 & -24 & -6 & 5 & t-55 \end{array}\right)$$

Von der 3. Zeile subtrahieren wir 3-mal die 1. Zeile. Zur 4. Zeile addieren wir die 1. Zeile. So entsteht die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -40 & 6 & 11 & -81 \\ 0 & 12 & 5 & -3 & 37 \\ 0 & 132 & -23 & -33 & 251 \\ 0 & -64 & 0 & 16 & t-136 \end{array}\right)$$

Hierin subtrahieren wir von der 3. Zeile das 11-fache der 2. Zeile und addieren zur 4. Zeile das $\frac{16}{3}$-fache der 2. Zeile. Es entsteht die neue Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -40 & 6 & 11 & -81 \\ 0 & 12 & 5 & -3 & 37 \\ 0 & 0 & -78 & 0 & 251 - 11 \cdot 37 = -156 \\ 0 & 0 & \frac{80}{3} & 0 & t - 136 + \frac{16 \cdot 37}{3} \end{array}\right)$$

In dieser Matrix teilen wir die 3. Zeile durch $(-78)$ und finden die neue Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -40 & 6 & 11 & -81 \\ 0 & 12 & 5 & -3 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{80}{3} & 0 & t-136+\frac{16\cdot 37}{3} \end{array}\right)$$

Nun subtrahieren wir von der 4. Zeile noch 80/3 mal die 3. Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -40 & 6 & 11 & -81 \\ 0 & 12 & 5 & -3 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-136+\frac{16\cdot 37-160}{3} \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $t-136+\frac{16\cdot 37-160}{3}=0$, nun ist aber $\frac{16\cdot 37-160}{3}=144$, also existiert genau dann ein nichtleerer Lösungsraum, wenn $t=-8$.

b) Genau dann gehört $\vec{x}$ zum Lösungsraum $\mathcal{L}$ des homogenen Systems, wenn

$$\begin{aligned} 2x_1-40x_2+6x_3+11x_4 &= 0 \\ 12x_2+5x_3-3x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Das ergibt

$$x_2=\frac{1}{4}x_4$$

und

$$x_1=\frac{1}{2}(-11x_4+40x_2)=\frac{1}{2}(-11x_4+10x_4)=-\frac{1}{2}x_4$$

Wir erhalten so

$$\mathcal{L}=\mathbb{R}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4** (20 Punkte)
a) Zeigen Sie für $A, B>0$, dass $\sqrt{A^2+B}-A=\frac{B}{A+\sqrt{A^2+B}}$ ist.

(3 Pkte)

b) Sei $a_n=\sqrt{4n^2+6n+1}-2n$. Hat die Folge $(a_n)_n$ einen Grenzwert? Wenn ja, was ist dieser Grenzwert? (Benutzen Sie Teil a)).

(8 Pkte)

c) Es sei $f$ die Funktion

$$f(x)=2x^2-3x-2\ .$$

Finden Sie Zahlen $a, b\in\mathbb{R}$, so dass die Funktion $f:[a,\infty)\longrightarrow[b,\infty)$ eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie diese. (9 Pkte)

*Lösung.* a) Wir erweitern mit $A+\sqrt{A^2+B}$ und erhalten

$$\sqrt{A^2+B}-A=\frac{(\sqrt{A^2+B}-A)(\sqrt{A^2+B}+A)}{\sqrt{A^2+B}+A}=\frac{A^2+B-A^2}{\sqrt{A^2+B}+A}=\frac{B}{A+\sqrt{A^2+B}}$$

b) Es gilt
$$a_n = \frac{6n+1}{\sqrt{4n^2+6n+1}+2n} = \frac{6n+1}{2n\sqrt{1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{4n^2}}+2n} = \frac{6}{2\sqrt{1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{4n^2}}+2}$$
Das strebt aber gegen $\frac{3}{2}$, wenn $n \to \infty$.

c) Wir rechnen aus, dass
$$f(x) = 2(x^2 - \frac{3}{2}x - 1) = 2(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{25}{8} \geq -\frac{25}{8}$$
Wählen wir $a := \frac{3}{4}$ und $b = -\frac{25}{8}$, so wird $f : [a,\infty) \longrightarrow [b,\infty)$ eine invertierbare Funktion mit Umkehrfunktion
$$g(y) := \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{y}{2} + \frac{25}{16}}$$

**Aufgabe 5** (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$$

a) Was ist die 1. Ableitung von $f$? (7 Pkte)

b) Wieviele lokale Extrema für $f$ gibt es und wo ? (6 Pkte)

c) Was ist das Taylorpolynom 2. Grades für $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ? (7 Pkte)

*Lösung.* a) Es gilt mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x^2+1) - 2x(3x-2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

b) Es gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x^2 - \frac{4}{3}x - 1 = 0$, also $(x - \frac{2}{3})^2 = \frac{13}{4}$. Schreiben wir $x_+ := \frac{2+\sqrt{13}}{3}$ und $x_- := \frac{2-\sqrt{13}}{3}$, so haben wir
$$f'(x) = -3\frac{(x-x_+)(x-x_-)}{(x^2+1)^2}$$

Rechts von $x_+$ ist $f' < 0$ und links von $x_-$ ist $f' < 0$. Auf $(x_-, x_+)$ haben wir dagegen $f' > 0$.

Das zeigt, dass $f(x_-) \leq f \leq f(x_+)$ und $x_-$ eine absolute Minimumstelle und $x_+$ eine absolute Maximumstelle für $f$ ist.

c) Das Taylorpolynom 2. Ordnung ist
$$f_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$
Es gilt $f(0) = -2, f'(0) = 3$. Zur Berechnung von $f''(0)$ beachten wir, dass $f' = g/h$, wenn wir $g(x) = -3x^2 + 4x + 3$ und $h(x) = (x^2+1)^2$.
$$f''(x) = \frac{hg' - gh'}{h^2}(x)$$

aber $h'(0) = 0$, also

$$f''(x) = \frac{g'(0)}{h(0)} = 4$$

Das liefert uns

$$f_2(x) = -2 + 3x + 2x^2$$

**Aufgabe 6** (20 Punkte)
a) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 := \int_1^2 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx$$

(5 Pkte)

b) Bestimmen Sie zu

$$R(x) = \frac{x^2 + 3}{(x+1)^2(x^2 + 3x + 4)}$$

die Partialbruchzerlegung.

(10 Pkte )

c) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \left( \frac{-2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2x+3}{x^2+3x+4} \right) dx$$

(5 Pkte)

Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an. Benutzen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Formelsammlung **nicht**.

*Lösung.* a) In $I_1$ arbeiten wir mit Variablensubstitution $u := -e^{-x}$ und finden

$$I_1 = \int_{-e^{-1}}^{-e^{-2}} \frac{du}{1+u} = \ln\left(\frac{1 - e^{-2}}{1 - e^{-1}}\right)$$

b) Der Partialbruchansatz lautet

$$R(x) := \frac{x^2 + 3}{(x+1)^2(x^2 + 3x + 4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3x + 4}$$

Das führt auf

$$A(x+1)(x^2 + 3x + 4) + B(x^2 + 3x + 4) + (Cx + D)(x+1)^2 = x^2 + 3$$

Wählen wir $x = -1$, so folgt $2B = 4, B = 2$.

Dann setzen wir $x = 0$ und finden

$$4A + 4B + D = 3, \qquad 4A + D = -5$$

Mit $x := 1$ folgt $16A + 8B + 4C + 4D = 4$, also

$$4A + 2B + C + D = 1, \qquad 4A + C + D = -3$$

Nun setzen wir noch $x := -2$ ein und erhalten

$$-2A + 2B - 2C + D = 7, \qquad -2A - 2C + D = 3$$

Von der 2. Gleichung ziehen wir die 1. Gleichung ab und finden $C = 2$. Für $A$ und $D$ ergibt das $4A+D = -5$ und $-2A + D = 7$. Daraus folgt $A = -2, D = 3$.

Das liefert

$$R(x) = \frac{-2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2x+3}{x^2+3x+4}$$

c) Als Stammfunktion für $R$ eignet sich

$$F(x) = -2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + \ln(x^2+3x+4)$$

und es folgt

$$\int_0^1 R(x)dx = F(1) - F(0) = -2\ln 2 + 1 + \ln 2 = 1 - \ln 2$$

**Aufgabe 7** (20 Punkte)
Gegeben sei die Kurve $\alpha(t) := e^{4\cos t}(\cos(2t),\ \sin(2t)\,)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

a) Wo ist $\alpha$ regulär, also $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ ?

b) Berechnen Sie die Normale an diese Kurve an der Stelle $\alpha(\pi/4)$.

(10+10 Pkte)

*Lösung.* a) Es gilt (mit $e(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, $e_\perp(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ ):

$$\dot\alpha(t) = e^{4\cos t}\Big(-4\sin t \cdot \vec{e}(2t) + 2\vec{e}_\perp(2t)\Big)$$

Da $\vec{e}(2t)$ und $\vec{e}_\perp(2t)$ stets aufeinander senkrechte Einheitsvektoren sind, ist

$$\|\dot\alpha(t)\|^2 = e^{8\cos t}(16\sin^2(2t) + 4) > 0$$

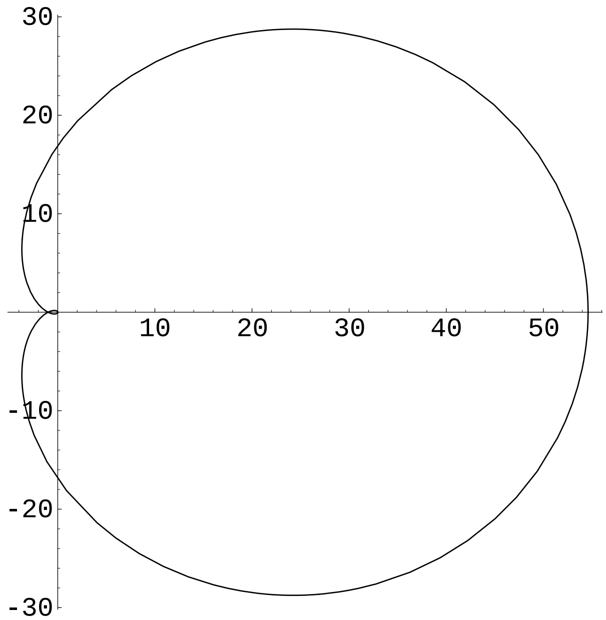
so dass $\alpha$ überall regulär ist.

b) Es folgt mit $e(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_\perp(\pi/2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, dass

$$\dot\alpha(\pi/4) = e^{2\sqrt{2}}\Big(-2\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = -2e^{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die gewünschte Normale ist dann

$$N = e^{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$


30
20
10
-10
-20
-30
10
20
30
40
50

**Aufgabe 8** (20 Punkte)
a) Berechnen Sie für die folgende Funktion die linearisierte Funktion $\mathcal{L}_{f,\vec{x}^0}$ an der Stelle $\vec{x}^{\,0} = (2, -3)$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 e^{-3x_2 - x_1^2}$$

(9 Pkte)

b) Sei $g(t, s) := (3t^2 - 2st - s, -ts + t^3)$ und $f(x, y) := \frac{2x-y}{2x^2+y^2}$. Berechnen Sie mit der **Kettenregel** die partielle Ableitung $(f \circ g)_t$ im Punkte $(t_0, s_0) := (-1, 1)$.

(11 Pkte)

*Lösung.* a) Es gilt

$$f_{x_1} = (4x_1 - 4x_1^3)e^{-3x_2 - x_1^2}, \quad f_{x_2} = -6x_1^2 e^{-3x_2 - x_1^2}$$

An der Stelle $\vec{x}^{\,0} = (2, -3)$ erhalten wir dann

$$f_{x_1}(2, -3) = -24e^5, \quad f_{x_2}(2, -3) = -24e^5$$

Das ergibt für die linearisierte Funktion

$$\mathcal{L}_{f,(2,-3)}(x_1, x_2) = 8e^5 - 24e^5(x_1 - 2) - 24e^5(x_2 + 3)$$

b) Es gilt $g(-1, 1) = (4, 0)$. Die Kettenregel ergibt, dass

$$(f \circ g)_t(-1, 1) = f_x(4, 0)\frac{\partial g_1}{\partial t}(-1, 1) + f_y(4, 0)\frac{\partial g_2}{\partial t}(-1, 1)$$

Es gilt

$$f_x(x, y) = \frac{-4x^2 + 4xy + 2y^2}{(2x^2 + y^2)^2}, \qquad f_y(x, y) = \frac{-2x^2 - 4xy + y^2}{(2x^2 + y^2)^2}$$

Also ist

$$f_x(4, 0) = -\frac{64}{32^2} = -\frac{1}{16}, \qquad f_y(4, 0) = -\frac{32}{32^2} = -\frac{1}{32}$$

Die Jacobimatrix zu $\vec{g}$ ist

$$J_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} 6t - 2s & -2t - 1 \\ 3t^2 - s & -t \end{pmatrix}, \qquad J_{\vec{g}}(-1, 1) = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Das, in die Kettenregel eingesetzt, liefert uns

$$(f \circ g)_t(-1, 1) = -\frac{1}{16} \cdot (-8) - \frac{1}{32} \cdot 2 = \frac{7}{16}$$

**Aufgabe 9** (20 Punkte)
Es sei $G$ das Gebiet, das für $0 \leq x \leq 1$ zwischen den Graphen der Funktionen $f_u(x) = x$ und $f_o(x) = 2x - x^2$ eingeschlossen wird.

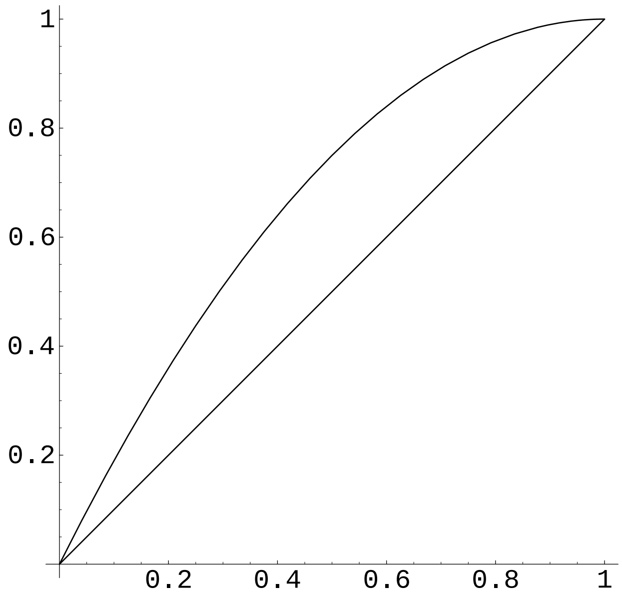
a) Skizzieren Sie das Gebiet $G$. (5 Pkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint\limits_G \frac{1}{(\frac{5}{4} + x^2 + y)^2} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges. (15 Pkte)

*Lösung.* a) Das Gebiet $G$ hat die folgende Gestalt:




b) Wir schreiben

$$I = \int_0^1 \left( \int_x^{2x-x^2} \frac{dy}{(\frac{5}{4} + x^2 + y)^2} \right) dx$$

Das innere Integral ist aber

$$\begin{aligned}\int_x^{2x-x^2} \frac{dy}{(\frac{5}{4}+x^2+y)^2} &= -\frac{1}{\frac{5}{4}+x^2+y}\Big|_x^{2x-x^2} \\ &= \frac{1}{\frac{5}{4}+x+x^2} - \frac{1}{\frac{5}{4}+2x}\end{aligned}$$

das führt auf

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{\frac{5}{4}+x+x^2} - \int_0^1 \frac{1}{\frac{5}{4}+2x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+1} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}+2x\right)\Big|_0^1 \\ &= \operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\frac{17}{5} \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{17}{5}\end{aligned}$$

**Aufgabe 10** (20 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = -6\cos t\,.$$

Beachten Sie: Die Variable ist $t$.

*Lösung.* Das charakteristische Polynom der DGL ist $P(X) = X^3 - X^2 + 4X - 4 = (X-1)(X^2+4)$ mit Nullstellen bei $1, 2j$ und $-2j$. Das ergibt die reellen Basislösungen

$$u_1(t) = e^t, \quad u_2(t) = \cos(2t), \quad u_3(t) = \sin(2t)$$

Die allgemeine Lösung der DGL hat die Form

$$y(t) = Ae^t + B\cos(2t) + C\sin(2t) + y_p(t)$$

mit einer partikulären Lösung $y_p$. Für diese probieren wir

$$y_p(t) = a\cos t + b\sin t$$

und setzen es ein die DGL ein. Wir erhalten mit

$$y_p' = -a\sin t + b\cos t, \quad y_p'' = -a\cos t - b\sin t, \quad y_p''' = a\sin t - b\cos t$$

dann

$$a\sin t - b\cos t + a\cos t + b\sin t - 4a\sin t + 4b\cos t - 4a\cos t - 4b\sin t = -6\cos t$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$3b - 3a = -6, \qquad -3a - 3b = 0$$

Also ist $a = 1,\ b = -1$ und damit $y_p(t) = \cos t - \sin t$.