Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **23.10.2010**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)
a) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass folgendes für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k(k+1) = 2n(n+1)$$

b) Berechnen Sie die Menge M aller Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung

$$|4x - 13| < x - 1$$

erfüllen.

Lösung. a) Induktion nach n. Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich 4 .

Gilt die Behauptung für n, so auch für $n + 1$, denn es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k k(k+1) &= \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k k(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k(k+1) - (2n+1)(2n+2) + (2n+2)(2n+3) \\
&= 2n(n+1) - 2(n+1)(2n+1) + 2(n+1)(2n+3) \\
&= 2(n+1)(\ n - (2n+1) + 2n + 3) = 2(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

Das ist gerade die Formel mit $n + 1$ statt n.

Sicher ist $M \subset (1, \infty)$. Dann gilt $x \in M$ genau dann, wenn

$$-(x-1) < 4x - 13 < x - 1$$

ist. Das ist mit $x \in (\frac{14}{5}\,, 4)$ gleichwertig. Also

$$M = (\frac{14}{5}\,, 4)$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
a) Hat die Gerade G_1 durch die Punkte $A(3, -4, 1)$ und $B(5, -3, 4)$ einen Schnittpunkt mit der Geraden G_2 durch die Punkte $C(1, 2, -5)$ und $D(4, 0, 1)$?

b) Gegeben seien die Punkte $P(6, -2)$ und $Q(-3, 1)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Welchen Abstand hat der Punkt $X(1, -1)$ von der Geraden g durch P und Q?

Lösung. a) In Vektorform lauten G_1 und G_2 so:

$$G_1 = A + \mathbb{R}(B - A) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = C + \mathbb{R}(C-D) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Soll es einen Schnittpunkt geben, muss es $t, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es stellt sich heraus, dass $t = 2, s = 2$ Lösungen sind.

Somit ist $G_1 \cap G_2 = \{\vec{S}\}$ mit

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) Wir können, um die Abstandsformel aus der Vorlesung für Geraden im Raum anwenden zu können, g in der Form

$$g = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

schreiben. Aus X wird dann $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für den gewünschten Abstand d von $\vec{X}$ zu g finden wir dann

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \left\| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Für welches $s \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ s \\ 29 \\ 24 \end{pmatrix}$ mit der Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 16 & 41 \\ 8 & -10 & -10 & 19 \\ 4 & 0 & 10 & 17 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

lösbar?

b) Berechnen Sie den Nullraum von $\mathcal{A}$, also den Unterraum

$$\mathcal{N} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$$

Lösung. Die erweiterte Matrix

$$(\mathcal{A}|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 16 & 41 & 19 \\ 8 & -10 & -10 & 19 & s \\ 4 & 0 & 10 & 17 & 29 \\ 4 & -3 & 1 & 1 & 24 \end{array}\right)$$

wird in Zeilenstufenform überführt: Wir subtrahieren dazu von der 2. Zeile $2\times$ die erste und von Zeile 3 und 4 jeweils die erste Zeile. In der entstehenden Matrix vertauschen wir die Zeile 2 und 4 miteinander. So erhalten wir die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 16 & 41 & 19 \\ 0 & -5 & -15 & -40 & 5 \\ 0 & -2 & -6 & -24 & 10 \\ 0 & -14 & -42 & -63 & s-38 \end{array}\right)$$

Wir subtrahieren von Zeile 3 das $\frac{2}{5}$-fache der 2. Zeile und von der 4. Zeile das $\frac{14}{5}$-fache der 2. Zeile. Es entsteht die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 16 & 41 & 19 \\ 0 & -5 & -15 & -40 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & s-52 \end{array}\right)$$

Zur 4. Zeile wird 49/8 mal der 3. Zeile addiert, und es kommt heraus

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 16 & 41 & 19 \\ 0 & -5 & -15 & -40 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-3 \end{array}\right)$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn $s = 3$ gewählt wird.

b) Zur Berechnung des Nullraumes müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 16 & 41 \\ 0 & -5 & -15 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

lösen. Die 4. Zeile ist belanglos. Wir bringen die Variable x_3, also die 3. Spalte der Matrix auf die rechte Seite. Es entsteht dann

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 41 \\ 0 & -5 & -40 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = -x_3 \begin{pmatrix} 16 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist $x_4 = 0$ und weiter $x_2 = -3x_3$ und damit $x_1 = -\frac{5}{2}x_3$. Damit folgt aber $\mathcal{N} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$2\cos^2 x - 1 = \cos x$$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = -3\cos(2x - \frac{\pi}{3})$$

Welche Periode hat f?

Was ist die Amplitude von f?

Welche Nullstellen hat f innerhalb $(0, \pi)$?

Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von f innerhalb eines Periodenintervalls.

Lösung. a) Wir beachten, dass $2\cos^2 -1 = \cos x$ eine quadratische Gleichung in $T = \cos x$ ist. Wir lösen

$$2T^2 - 1 = T$$

und finden

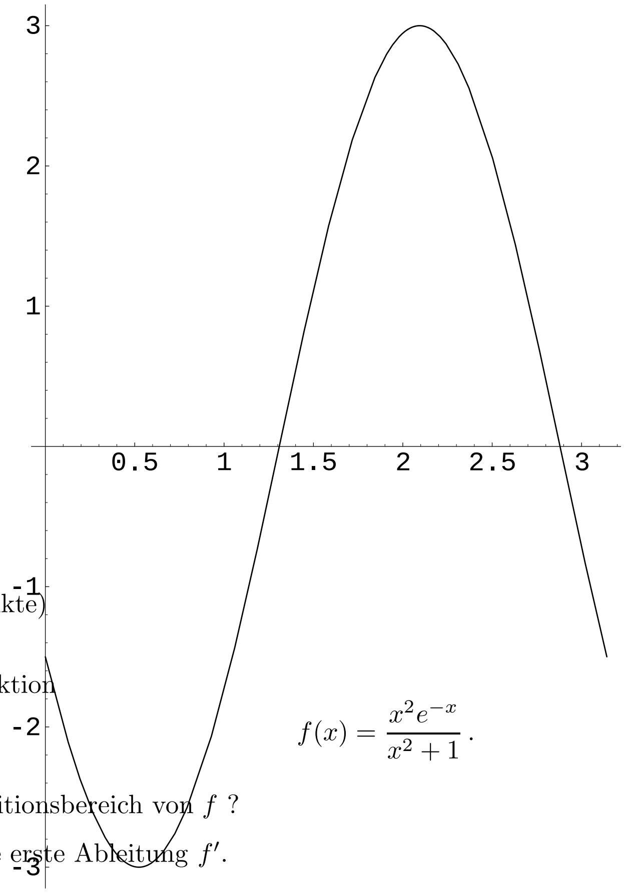
$$\cos x = T = \frac{1 \pm 3}{4} \in \{1, -\frac{1}{2}\}$$

Genau dann ist $\cos x = 1$, wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.

Weiter ist $\cos x = -\frac{1}{2}$ für ein $x \in (0, 2\pi)$, wenn $x \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$. Damit ist die Lösungsmenge L der Gleichung gerade

$$L = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

b) Die Funktion f hat die Periode π. Ihre Nullstellen innerhalb $[0, \pi]$ liegen bei $\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, mit $k \in \{0, 1\}$. Die Amplitude hat den Wert 3 und ihre Extrema liegen bei $\frac{\pi}{6}$ (Minimum) und bei $\frac{2\pi}{3}$. Der Graph sieht nun so aus:



Aufgabe 5 (20 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{x^2 + 1} .$$

a) Was ist der Definitionsbereich von f ?

b) Berechnen Sie die erste Ableitung f'.

(Zur Orientierung: Es ist $f'(x) = -xe^{-x}\frac{x^3+x-2}{(x^2+1)^2}$).

c) Wo ist f monoton wachsend, wo monoton fallend ?

d) Wo hat f lokale oder absolute Extrema ?

e) Was ist das Taylorpolynom 2. Grades um $x_0 = 1$?

Lösung. a) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, da $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ überall.

b) Wir berechnen f' mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - x^2)e^{-x}(x^2+1) - 2x^3 e^{-x}}{(x^2+1)^2} \\ &= e^{-x}\frac{(2x-x^2)(x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} = e^{-x}\frac{2x^3 + 2x - x^4 - x^2 - 2x^3}{(x^2+1)^2} \\ &= -xe^{-x}\frac{x^3 + x - 2}{(x^2+1)^2} = -xe^{-x}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

c) Da $x^2 + x + 2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$ überall gilt, ist $f'(x) = 0$ genau an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$. Ist $x \in (0, 1)$ ist $f'(x) > 0$. Ist $x > 1$, so ist $f'(x) < 0$. Für $x < 0$ ist wieder $f'(x) < 0$.

d) Bei $x = 0$ hat f ein absolutes Minimum, da $f(x) \geq 0 = f(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In $x = 1$ hat f ein lokales Maximum. Wegen $f(-k) \longrightarrow \infty$ ist dies aber kein absolutes Maximum.

e) Wir berechnen $f''(1)$. Dazu schreiben wir $f'(x) = (x-1)g(x)$, wobei

$$g(x) = -xe^{-x}\frac{x^2+x+2}{(x^2+1)^2}$$

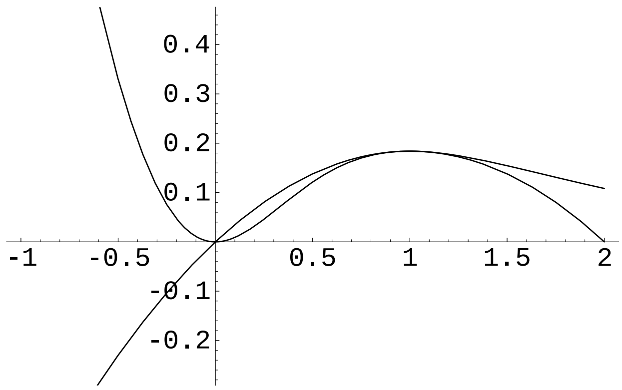
und rechnen $f''(x) = g(x) + (x-1)g'(x)$. Damit ist aber

$$f''(1) = g(1) = -(1/e)$$

Das gesuchte Taylorpolynom ist dann

$$f_2(x) = f(1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e}(x-1)^2$$

Hier sind die Graphen von f und f_2:



Aufgabe 6 (20 Punkte)
Gegeben sei die rationale Funktion

$$R(x) := \frac{3x^2+13x+30}{(x+1)^2(x^2+4)}$$

a) Geben Sie den geeigneten Ansatz für die Partialbruchzerlegung für R an.

b) Berechnen Sie das Integral

$$I := \int_0^2 \left(\frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{-3x+2}{x^2+4} \right) dx$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

Lösung. a) Der Ansatz

$$R(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

ist hier erforderlich.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} I &= (3\ln|x+1| - \frac{4}{x+1})\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+4}dx + \int_0^2 \frac{1}{2}\frac{1}{(x/2)^2+1}dx \\ &= (\ 3\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} - \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg}(\frac{x}{2})\ )\Big|_0^2 \\ &= 3\ln 3 + \frac{8}{3} - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)

a) Es sei α die in Polarkoordinaten gegebene Kurve

$$\alpha(\phi) = r(\phi)\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

mit $r(\phi) = 7\cos(\phi) + 4,\ 0 \le \phi < 2\pi$.

Berechnen Sie die Tangente an diese Kurve im Punkte $\alpha(\pi/3)$.

b) Die Fläche zwischen der Kurve $y = e^{-x}$ und der y-Achse rotiere um die y-Achse, wobei $0 \le x \le 1$. Welches Volumen hat die entstehende Drehfigur?

Lösung. a) Es gilt mit $e(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $e_\perp(\varphi) := \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\alpha'(\varphi) = r'(\varphi)e(\varphi) + r(\varphi)e_\perp(\varphi) = -7\sin\varphi e(\varphi) + r(\varphi)e_\perp(\varphi)$$

Nun ist $e(\pi/3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $e_\perp(\pi/3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

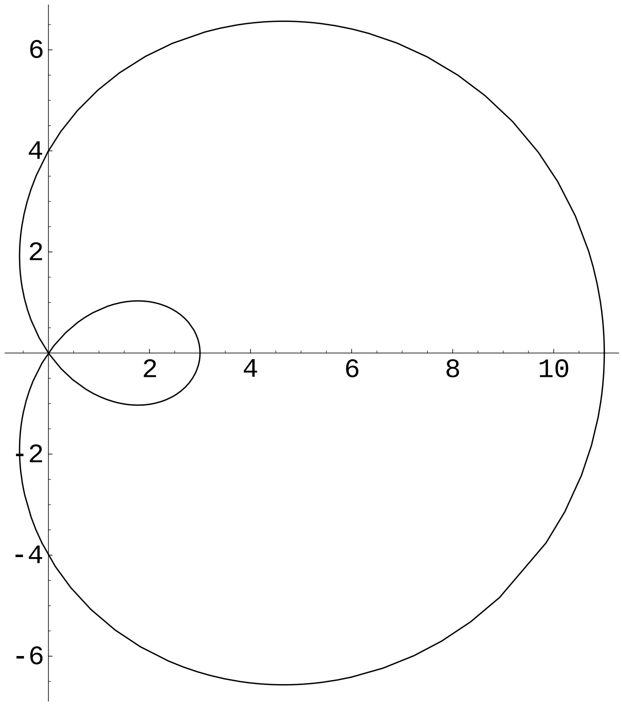
Somit haben wir zusammen mit $r(\pi/3) = \frac{15}{2}$:

$$\begin{aligned} \alpha'(\pi/3) &= -\frac{7\sqrt{3}}{2}e(\pi/3) + r(\pi/3)e_\perp(\pi/3) \\ &= -\frac{7\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{15}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 11 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die gesuchte Tangente ist dann

$$T = \alpha(\pi/3) + \mathbb{R}\alpha'(\pi/3) = \frac{15}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 11 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Hier ist das Bild der Kurve:



b) Das gesuchte Volumen ist

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 x e^{-x} dx \\
&= 2\pi \left(-x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \right) = 2\pi \left(-e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 \right) = 2\pi(1 - 2e^{-1})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8 (20 Punkte)
a) Berechnen Sie für die folgende Funktion den Gradienten:

$$f(x,y,z) := \frac{xy}{1+x^2z^2}$$

b) Berechnen Sie für $\vec{v} := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Richtungsableitung $\partial_{\vec{v}} g(x_0, y_0, z_0)$, wobei $(x_0, y_0, z_0) := (1, 2, -2)$ sei.

c) Sei $g(t,s) := (4t+5s, -2t-7s)$ und $f(x,y) := \frac{x(1-y)}{2x+3y}$. Berechnen Sie mit der **Kettenregel** die partielle Ableitung $(f \circ g)_s$ im Punkte $(t_0, s_0) := (3, 3)$.

Lösung. a) Es gilt $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$, mit

$$f_x = \frac{y(1+x^2z^2) - 2x^2yz^2}{(1+x^2z^2)^2} = \frac{y(1-x^2z^2)}{(1+x^2z^2)^2}$$

$$f_y = \frac{x}{1+x^2z^2}, \qquad f_z = \frac{-2x^3yz}{(1+x^2z^2)^2}$$

b) Aus $\nabla f(1,2,-2) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\partial_{\vec{v}} f(1,2,-2) = \frac{1}{75}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{10}{75} = -\frac{2}{15}$$

c) Es gilt $J_g(t,s) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$, also

$$(f \circ g)_s(t_0, s_0) = 5 f_x(x_0, y_0) - 7 f_y(x_0, y_0)$$

wobei $(x_0, y_0) = g(t_0, s_0) = g(3,3) = (27, -27)$.

Da nun

$$f_x(x,y) = \frac{3y(1-y)}{(2x+3y)^2}, \qquad f_y(x,y) = -\frac{x(3+2x)}{(2x+3y)^2}$$

und damit

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{28}{9}, \qquad f_y(x_0, y_0) = -\frac{19}{9}$$

erhalten wir

$$(f \circ g)_s(t_0, s_0) = 5 f_x(x_0, y_0) - 7 f_y(x_0, y_0) = \frac{-140+133}{9} = -\frac{7}{9}$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei G das Gebiet, das zwischen $x = 0$ und $x = 2$ von oben durch den Graphen der Funktion $f_+(x) := 1 - |1-x|$ und von unten durch die x-Achse berandet wird.

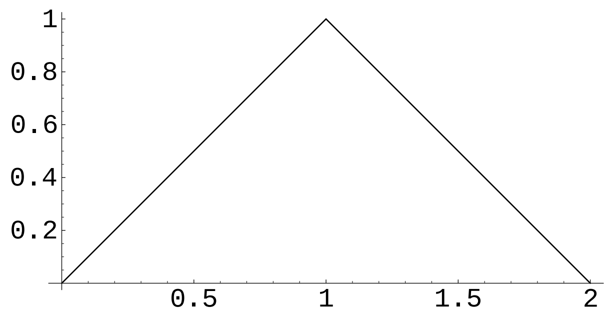
a) Skizzieren Sie das Gebiet G

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint\limits_G \frac{x}{(\frac{x}{2}+y)^2} dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

Lösung. Zu a)



b) Es gilt

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \left(x \int_0^{f_+(x)} \frac{dy}{\left(\frac{x}{2}+y\right)^2} \right) dx \\
&= \int_0^2 x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{\frac{x}{2}+f_+(x)} \right) dx = 2\int_0^2 \frac{x f_+(x)}{x\left(\frac{x}{2}+f_+(x)\right)} dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{x^2}{x(\frac{x}{2}+x)} dx + 2\int_1^2 \frac{x(2-x)}{x(\frac{x}{2}+2-x)} dx \\
&= \frac{4}{3} + 2\int_1^2 \frac{x(2-x)}{x(2-\frac{x}{2})} dx \\
&= \frac{4}{3} + 2\int_1^2 \frac{2-x}{2-\frac{x}{2}} dx = \frac{4}{3} + 2\int_1^2 \left(2 - \frac{4}{4-x}\right) \\
&= \frac{4}{3} + 4\left(x + 2\ln(4-x)\right)\Big|_1^2 = \frac{16}{3} - 8\ln\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = 15e^{-t}\,.$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung. Das charakteristische Polynom ist $P = X^3 + X^2 + 4X + 4 = (X^2 + 4)(X + 1)$.
Die allgemeine Lösung der DGL lautet damit

$$u = u_p(t) + Ae^{-t} + B\cos(2t) + C\sin(2t)$$

mit Konstanten A, B und C und einer partikulären Lösung u_p, welche die Form

$$u_p(t) = ate^{-t}$$

hat, da $P(-1) = 0$. Es folgt aus $P'(-1) \neq 0$, dass $a = 15/P'(-1) = 3$ gewählt werden muss. Also:

$$u = 3te^{-t} + Ae^{-t} + B\cos(2t) + C\sin(2t)$$