Apl. Prof. Dr. G. Herbort, Prof. Dr. M. Heilmann **8.09.2009**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik I und II, Bachelor Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)
i) Zeigen Sie durch Induktion nach n, dass folgendes für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{n}{2n+1}$$

ii) Berechnen Sie die Menge M aller Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung

$$|2x - 10| < x - 3$$

erfüllen.

Lösung. (i) Die Aussage ist richtig für $n = 1$, da in diesem Falle beide Seiten den Wert $\frac{1}{3}$ haben.

Angenommen, die Aussage gelte für n. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2n+1} \left(n + \frac{1}{2n+3} \right) \\
&= \frac{1}{2n+1} \frac{(2n+3)n+1}{2n+3} \\
&= \frac{1}{2n+1} \frac{2n^2+3n+1}{2n+3} = \frac{1}{2n+1} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} \\
&= \frac{n+1}{2(n+1)+1}
\end{aligned}$$

Das ist der gewünschte Ausdruck (mit $n + 1$ statt n).

(ii) Sicher gilt $M \subset (3, \infty)$. Also folgt

$$\begin{aligned}
M &= \{x > 3 \mid 3 - x < 2x - 10 < x - 3\} \\
&= \{x > 3 \mid \frac{13}{3} < x < 7\} = (\,\frac{13}{3}, 7\,)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
a) Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Vektoren $\vec{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 2x \end{pmatrix}$ und $\vec{b} := \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 5x \end{pmatrix}$ senkrecht zueinander stehen.

b) Gibt es eine Ebene E, welche die Punkte $A(1, 3, -4), B(3, 6, 1), C(5, 3, 2)$ und $D(2, 1, 4)$ enthält?

Lösung. a) Genau dann steht $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ senkrecht, wenn $< \vec{a}, \vec{b} >= 0$. Aber

$$< \vec{a}, \vec{b} >= 7x + 10x^2 = x(10x + 7)$$

Die gesuchte Werte sind daher $x = 0$ und $x = -\frac{7}{10}$.

b) Wir prüfen, ob $\vec{B}-\vec{A}, \vec{C}-\vec{A}$ und $\vec{D}-\vec{A}$ linear abhängig sind oder nicht. Dazu bilden wir die Determinante

$$\det(\vec{B}-\vec{A}, \vec{C}-\vec{A}, \vec{D}-\vec{A}) = \begin{vmatrix} 3-1 & 5-1 & 2-1 \\ 6-3 & 3-3 & 1-3 \\ 1+4 & 2+4 & 4+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -94$$

Die 3 genannten Vektoren sind linear unabhängig, so dass es keine Ebene E mit der gewünschten Eigenschaft geben kann.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
i) Behandeln Sie folgendes Problem mit dem Gauß-Algorithmus:

Für welches $s \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -58 \\ 56 \\ s \end{pmatrix}$ mit Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 45 & 24 & -22 & -23 \\ 0 & -3 & -11 & -10 \\ 45 & 27 & -11 & -13 \end{pmatrix}$$

lösbar?

Lösung. Wir führen Zeilenoperationen an der erweiterten Matrix

$$\mathcal{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} 45 & 24 & -22 & -23 & -58 \\ 0 & -3 & -11 & -10 & 56 \\ 45 & 27 & -11 & -13 & s \end{array}\right)$$

aus.

3. Zeile - 1. Zeile ergibt

$$\mathcal{A}'' = \left(\begin{array}{cccc|c} 45 & 24 & -22 & -23 & -58 \\ 0 & -3 & -11 & -10 & 56 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & s+58 \end{array}\right)$$

3. Zeile + 2. Zeile ergibt

$$\mathcal{A}'' = \left(\begin{array}{cccc|c} 45 & 24 & -22 & -23 & -58 \\ 0 & -3 & -11 & -10 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+114 \end{array}\right)$$

Genau dann ist obiges lineares Gleichungssystem lösbar, wenn $s = -114$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$4^x - 6 \cdot 2^x = -8$$

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$

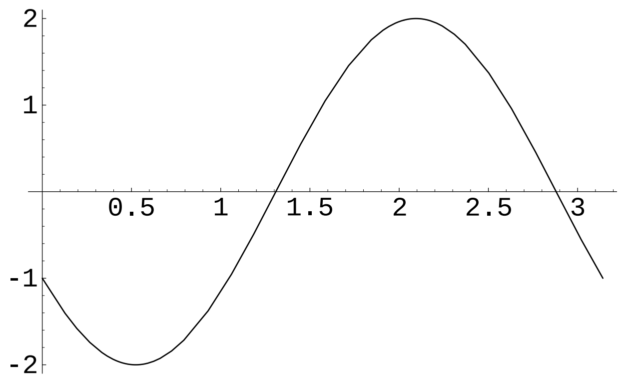
Lösung. a) Wir schreiben $y = 2^x$ und sehen, dass y die quadratische Gleichung

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

löst. Es folgt $(y-3)^2 = 1$, also $y \in \{2, 4\}$. Dann muss aber $x \in \{1, 2\}$ sein.

Probe: $4 - 6 \cdot 2 = 4 - 12 = -8$, $\quad 16 - 24 = -8$. Das zeigt, dass $x = 1$ und $x = 2$ wirklich Lösungen sind.

b) Hier ist der Graph der Funktion f:



Aufgabe 5 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{-x} \sin x\,.$$

a) Untersuchen Sie, wo f lokale und absolute Extrema hat.

b) Was ist das Taylorpolynom 2. Grades um $x_0 = \pi$?

Lösung. a) Es gilt zunächst

$$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x) = 0$$

genau dann, wenn $\cos x = \sin x$, also wenn $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Weiter ist

$$f''(x) = -2e^{-x} \cos x$$

Das ergibt

$$f''(\frac{\pi}{4} + k\pi) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} - k\pi}(-1)^{k+1}$$

Wir haben daher bei $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ein lokales Minimum, wenn k ungerade und ein lokales Maximum, wenn k gerade ist.

Wegen $f(\frac{\pi}{4} - 2k\pi) \longrightarrow \infty$, wenn $k \to \infty$ und $f(\frac{\pi}{4} - (2k+1)\pi) \longrightarrow \infty$, wenn $k \to \infty$ kommen absolute Extrema nicht vor.

b) Das gesuchte Taylorpolynom ist

$$T_2f(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{1}{2}f''(\pi)(x-\pi)^2 = -e^{-\pi}(x-\pi) + e^{-\pi}(x-\pi)^2$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)
Gegeben sei die rationale Funktion

$$R(x) := \frac{4x^3 - 11x^2 + 11x - 14}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

a) Wie muss der Ansatz für die Partialbruchzerlegung für R lauten?

b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_2^3 \frac{x-3}{(x-1)^2}dx \qquad \text{und} \qquad \int_2^3 \frac{3x-2}{x^2+4}\,dx$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

Lösung. a) Der erforderliche Ansatz lautet

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

b) Es gilt

$$\int_2^3 \frac{x-3}{(x-1)^2}dx = \int_2^3 \frac{x-1-2}{(x-1)^2}dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx - 2\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \ln 2 - 1\,,$$

da

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \ln(x-1), \qquad \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1}\;.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{3x-2}{x^2+4}\,dx &= \frac{3}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2+4}\,dx - \int_2^3 \frac{2}{x^2+4}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2+4)\Big|_2^3 - \operatorname{arctg}(x/2)\Big|_2^3 \\
&= \frac{3}{2}\ln(13/8) - \operatorname{arctg}(3/2) + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (20 Punkte)
Gegeben sei die in Polarkoordinaten gegebene ebene Kurve $\alpha(\varphi) = r(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$, für $\varphi \in [0, 2\pi]$, wobei

$$r(\varphi) = 2 - \sin^2\varphi\;.$$

a) Wo ist α regulär?

b) In welchen Punkten $\alpha(\varphi)$ von α verläuft die Tangente an α *senkrecht* ?

c) Berechnen Sie die Normale an α in $\alpha(\pi/4)$. (Wie lautet die vektorielle Gleichung der Normalen?)

Lösung. a) Es gilt

$$\alpha'(\varphi) = r'(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + r(\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

Wo α' verschwindet, muss gelten $r(\varphi) = r'(\varphi) = 0$. Aber $r(\varphi) \geq 1$ überall, so dass $\alpha' \neq 0$ überall und α in jedem Punkt regulär ist.

b) In den gesuchten Punkte muss die 1. Koordinate von α verschwinden. Es muss also

$$r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi = 0$$

werden. D.h.: Es muss gelten:

$$-2\sin\varphi(\cos^2\varphi - r(\varphi)) = 0$$

Aber die linke Seite ist einfach $2\sin\varphi$. Die gesuchten Stelle sind also bei $\alpha(0) = (2,0)$ und $\alpha(\pi) = (-2,0)$.

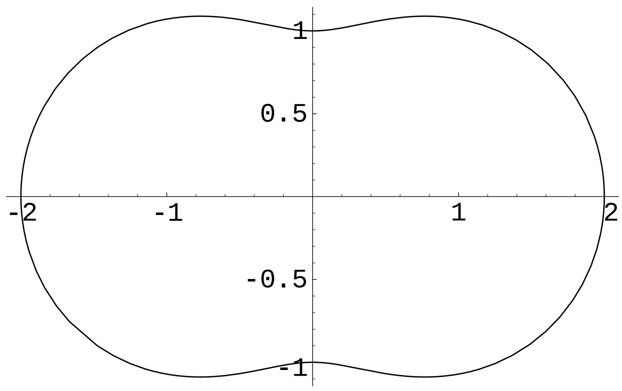
c) Wir berechnen $\alpha'(\frac{\pi}{4})$ und finden

$$\alpha'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(r'(\frac{\pi}{4})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + r(\frac{\pi}{4})\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der Normalen weist daher in Richtung $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$. Die gesuchte Normale ist

$$N := \alpha(\frac{\pi}{4}) + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

Hier ist die Kurve α:



Aufgabe 8 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := (2x - y^2)\, e^{-x^2-y^2}\,.$$

a) Berechnen Sie für $\vec{v}_1 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ die Richtungsableitungen $\partial_{\vec{v}_1} f(1,1)$ und $\partial_{\vec{v}_2} f(2,-1)$.

b) Was ist die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f an der Stelle $(0,1)$?

c) Sei $g(t,s) := (t^2 - 3s, t + 2s)$. Berechnen Sie mit der **Kettenregel** die partielle Ableitung $(f \circ g)_t$ im Punkte $(t,s) = (-1,-1)$.

Lösung. Zunächst errechnen wir den Gradienten von f:

$$\nabla f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} 2-2x(2x-y^2) \\ -2y-2y(2x-y^2) \end{pmatrix}$$

a) Es gilt

$$\nabla f(1,1) = e^{-2}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix},\ \nabla f(2,-1) = e^{-5}\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix},$$

woraus sich

$$\partial_{\vec{v}_1} f(1,1) = < \vec{v}_1, \nabla f(1,1) > = \frac{-16}{5}e^{-2}$$

und

$$\partial_{\vec{v}_2} f(1,1) = < \vec{v}_2, \nabla f(2,-1) > = \frac{28}{\sqrt{5}}e^{-5}$$

ergibt.

b) Das ist die Richtung $\nabla f(0,1) = e^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Es gilt $h := f \circ \vec{g}$. Mit der Kettenregel folgt hieraus

$$h_t(t,s) = 2f_x(\vec{g}(t,s))t + f_y(\vec{g}(t,s))\ ,$$

denn

$$J_{\vec{g}}(t,s) = \begin{pmatrix} 2t & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nun ist aber $\vec{g}(-1,-1) = (4,-3)$ und $\nabla f(4,-3) = e^{-25}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es folgt also

$$h_t(-1,-1) = -2f_x(4,-3) + f_y(4,-3) = -20e^{-25}\,.$$

Aufgabe 9 (20 Punkte)
Es sei G das Gebiet, das von oben durch die Kreislinie um den Nullpunkt mit Radius 4 und von unten durch den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{7}}{3}|x|$ berandet wird.

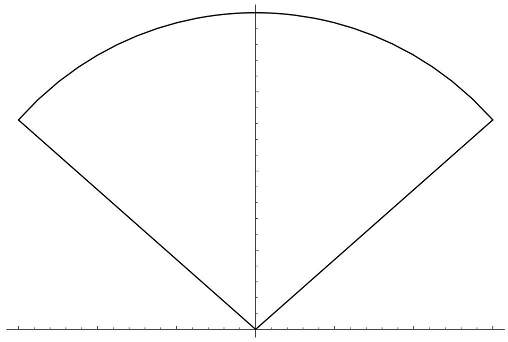
a) Skizzieren Sie das Gebiet G.

b) Berechnen Sie das Integral

$$J = \iint\limits_G \frac{|x|y}{x^2+y^2}dG$$

unter Angabe des vollständigen Lösungsweges.

Lösung. a) Das Gebiet G hat die Gestalt:



b) Berechnung von J: Es gilt

$$G = \{(x,y) \mid \frac{1}{3}\sqrt{7}|x| \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$$

und $\frac{1}{3}\sqrt{7}|x| = \sqrt{16-x^2}$ genau dann, wenn $x = \pm 3$. Daher wird

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-3}^{3} |x| \left(\int_{\frac{1}{3}\sqrt{7}|x|}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2}\, dy \right) dx \\
&= 2\int_{0}^{3} x \left(\int_{\frac{1}{3}\sqrt{7}x}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2}\, dy \right) dx \\
&= \int_{0}^{3} x \left(\ln{(x^2+y^2)}\Big|_{\frac{1}{3}\sqrt{7}x}^{\sqrt{16-x^2}} \right) dx \\
&= \int_{0}^{3} x \Big(\ln 16 \; - \; \ln{(16x^2/9)} \Big) dx \\
&= \int_{0}^{3} x(\ln 9 - 2\ln x) dx \\
&= 9\ln 3 - 2\int_{0}^{3} x \ln x dx = 9\ln 3 + \frac{9}{2} - 9\ln 3 = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

denn es gilt

$$\int 2x\ln x dx = -\frac{x^2}{2} + x^2 \ln x$$

Aufgabe 10 (20 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$4y''' + 4y'' + 6y' + 6y = 10e^{-t}.$$

Beachten Sie: Die Variable ist t.

Lösung.

Das charakteristische Polynom zu dieser DGL lautet:

$$P(X) = 4X^3 + 4X^2 + 6X + 6 = (4X^2 + 6)(X + 1)$$

Also sind $\frac{\sqrt{3}}{2}j$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}j$ und -1 die Nullstellen von P und damit die Funktionen

$$e^{-t},\ \cos(\sqrt{\frac{3}{2}}t),\ \sin(\sqrt{\frac{3}{2}}t)$$

ein System von Basislösungen.

Gesucht ist eine partikuläre Lösung $y_p(t)$. Der geeignete Ansatz lautet hier

$$y_p(t) = Ate^{-t}\,,$$

da -1 eine einfache Nullstelle von P ist.

Gehen wir mit diesem Ansatz in die DGL ein, finden wir zusammen mit

$$y_p'(t) = A(1-t)e^{-t}, \quad y_p''(t) = A(t-2)e^{-t}, \quad y_p'''(t) = A(3-t)e^{-t}$$

dass

$$4y_p''' + 4y_p'' + 6y_p' + 6y_p = 10Ae^{-t}$$

Wir wählen daher $A = 1$. Damit lautet die allgemeine Lösung zur DGL so:

$$y = te^{-t} + ae^{-t} + b\cos(\sqrt{\frac{3}{2}}t) + c\sin(\sqrt{\frac{3}{2}}t)$$

mit beliebig wählbaren Konstanten a, b und c.