Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **25.03.2009**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik III, Bachelor-Studiengang Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -12 \\ 6 & -8 & 12 \\ 6 & -9 & 13 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $\mathcal{A}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass 1 Eigenwert zu $\mathcal{A}$ ist.

c) $\mathcal{A}$ diagonalähnlich (man sagt auch diagonalisierbar) ?

(Sie können auf eine Berechnung des charakteristischen Polynoms verzichten !)

Lösung. Es gilt $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also ist $\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor von $\mathcal{A}$ zum Eigenwert -2 .

b) Die Matrix $\mathcal{A} - \mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ -6 & 9 & -12 \\ -6 & 9 & -12 \end{pmatrix}$ hat den Rang 1, also gibt es 2 linear unabhängige Eigenvektoren für $\mathcal{A}$ zum Eigenwert 1, nämlich solche, die die Bedingung $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0$ erfüllen. Das ist etwa für $\vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Fall.

c) Da eine Basis von Eigenvektoren zu $\mathcal{A}$ existiert, ist die Matrix diagonalisierbar.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei ein Vektorfeld $f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x^2 + x\,y - 4y^2 \\ x\,z + 2z^2 \\ x + y \end{pmatrix}$ und zwei Kurven C_1 und C_2, welche durch die Parameterdarstellungen

$$\vec{r}_1(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

und

$$\vec{r}_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

festgelegt sind.

a) Berechnen Sie die Linienintegrale

$$\int_{C_1} \langle f, d\vec{r}_1 \rangle \qquad \text{und} \qquad \int_{C_2} \langle f, d\vec{r}_2 \rangle \ .$$

b) Ist das Vektorfeld konservativ?

Lösung. a) Es gilt $f(\vec{r}_1(t)) = (-2\cos^2 t, \cos t \sin t + 2\sin^2 t, 2\cos t\,)$ und

$$\begin{aligned}\langle f(\vec{r}_1(t)), \dot{\vec{r}}_1(t)\rangle &= \langle(-2\cos^2 t, \cos t\sin t + 2\sin^2 t, 2\cos t\,), (-\sin t, -\sin t, \cos t)\rangle \\ &= 2\cos^2 t + 2\cos^2 t \sin t - \cos t \sin^2 t - 2\sin^3 t\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{C_1} \langle f, d\vec{r}_1(t)\rangle = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \langle f(\vec{r}_1(t)), \dot{\vec{r}}_1(t)\rangle dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \Big(2\cos^2 t + 2\cos^2 t\sin t - \cos t\sin^2 t - 2\sin^3 t\Big)dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \Big(2\cos^2 t - \cos t \sin^2 t\Big)dt = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2\cos^2 t\, dt - \frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \pi + \frac{2}{3}\ ,$$

denn es gilt

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 t \sin t\, dt = -\cos^3 t\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 0$$

und

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^3 t\, dt = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 t\, dt = 0$$

da $\sin^3$ ungerade ist.

Entsprechend ist

$f(\vec{r}_2(t)) = (-4\cos^2 t, \cos t\, \sin t + 2\sin^2 t, 0)$ und damit wegen $\dot{\vec{r}}_2(t) = (-\sin t, \sin t, \cos t)$:

$$\langle f(\vec{r}_2), \dot{\vec{r}}_2(t)\rangle = \langle 4\cos^2 t \sin t + \cos t\, \sin^2 t + 2\sin^3 t$$

also

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \langle f, d\vec{r}_2(t)\rangle &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 4\cos^2 t \sin t\, dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos t \sin^2 t\, dt + 2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^3 t\, dt \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -\frac{2}{3} \neq \int_{C_1} \langle f, d\vec{r}_1(t)\rangle\end{aligned}$$

b) Hätte f eine Stammfunktion, so folgte $\int_{C_1} \langle f, d\vec{r}_1(t)\rangle = \int_{C_1} \langle f, d\vec{r}_1(t)\rangle$, im Widerspruch zu a).

Es kann also für f keine Stammfunktion geben.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Angenommen, bei der Endkontrolle von DVD-Playern werde ein bestimmtes Verfahren angewendet, das mit Wahrscheinlichkeit 0.8 keinen Fehler anzeigt, wenn der DVD-Player fehlerfrei ist und mit Wahrscheinlichkeit 0.85 einen Fehler anzeigt, wenn ein Gerät fehlerhaft ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät defekt ist, sei 0.07.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt das Verfahren, dass ein DVD-Player defekt ist ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Gerät wirklich defekt, wenn das Prüfverfahren einen Fehler behauptet hat?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Gerät intakt, wenn die Überprüfung keine Fehlermeldung ergeben hat ?

Lösung. Wir arbeiten mit 2 Ereignissen: $A :=$ Gerät defekt, $B :=$ Gerät vom Prüfverfahren defekt gemeldet. Gesucht sind $P(B)$ und $P(A|B)$.

Gegeben sind $P(B|A) = 0.85,\ P(A) = 0.07$ und $P(B^c|A^c) = 0.8$.

a) Wir berechnen $P(B)$ mit dem Gesetz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = P(B|A)P(A) + (1 - P(B^c|A^c))(1 - P(A)) \\ &= 0.85 \cdot 0.07 + 0.2 \cdot 0.93 = 0.2455 \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)} = 0.85\,\frac{0.07}{0.2455} = 0.242$$

Nur jeder 4. als defekt gemeldete DVD-Player ist wirklich defekt.

c) Gesucht ist $P(A^c|B^c)$. Es gilt aber

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A^c)}{P(B^c)}P(B^c|A^c) = \frac{0.93}{1 - 0.2455} \cdot 0.8 = 0.986$$

Mit 98,6-prozentiger Wahrscheinlichkeit ist ein Gerät intakt, wenn es dem Prüfverfahren standgehalten hat.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Die Lebensdauer der Computerchips einer Zulieferfirma sei normalverteilt mit Erwartungswert $4,4 \cdot 10^4$ Stunden und einer Standardabweichung von $3 \cdot 10^3$ Stunden. Ein Computerhersteller stellt die Anforderung, dass mindestens 90 Prozent der gelieferten Chips mindestens $4 \cdot 10^4$ Stunden funktionieren.

a) Genügt die Zulieferfirma dieser Anforderung?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Lieferung von 100 Chips mindestens 3 Chips mit einer Lebensdauer $\leq 3,8 \cdot 10^4$ Stunden ?

Lösung. Sei X die Lebensdauer eines Chips.

a) Gesucht ist $P(X \geq 4 \cdot 10^4)$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} P(X \geq 4 \cdot 10^4) &= P(\frac{X - 4,4 \cdot 10^4}{3000} \geq -\frac{0,4}{3000} \cdot 10^4) \\ &= 1 - \Phi(-\frac{0,4}{3000} \cdot 10^4) = 1 - \Phi(-4/3) \\ &= 0.909\ , \end{aligned}$$

wobei

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt\,.$$

Die Zulieferfirma erfüllt also die Anforderungen.

b) Sei $p = P(X \leq 3,8 \cdot 10^4)$. Dann ist

$$p = P(\frac{X - 4,4 \cdot 10^4}{3000} \leq -\frac{0,6}{3000} \cdot 10^4) = \Phi(-2) = 0.022$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist mit der Binomialverteilung zu bestimmen

$$P_k := P(\text{k Chips haben eine Lebensdauer } \leq 3,8 \cdot 10^4) = \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}$$

Gesucht ist nun $w_0 := \sum_{k=3}^{100} P_k$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - (1-p)^{100} - 100p(1-p)^{99} - 4950p^2(1-p)^{98} \\ &= 1 - 0.98^{100} - 2,2 \cdot 0.98^{99} - 2,39 \cdot (0.98)^{98} = 0.239 \end{aligned}$$