**Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort** **25.03.2008**
**Bergische Universität Wuppertal**

## Modul: Mathematik III, Bachelor-Studiengang Maschinenbau

**Aufgabe 1** (20 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} j & (j-3)/2 & 0 \\ 0 & -j & j-1 \\ j-1 & (j-3)/2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ das charakteristische Polynom

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) := \det(x\mathcal{E}_3 - \mathcal{A}) = x^3 - x^2 + 2jx - 2j$$

hat.

b) Bestimmen Sie den Eigenraum von $\mathcal{A}$ zum Eigenwert 1.

c) Welche weiteren Eigenwerte hat $\mathcal{A}$ noch?

*Lösung.* Zu a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{A}}(x) &= \det \begin{pmatrix} x-j & -\frac{j-3}{2} 0 & \\ 0 & x+j & -j+1 \\ -j+1 & -\frac{j-3}{2} & x-1 \end{pmatrix} \\
&= (x-j)\det \begin{pmatrix} x+j & -j+1 \\ -\frac{j-3}{2} & x-1 \end{pmatrix} - (-j+1)\frac{j-3}{2}(-j+1) \\
&= (x-j)(\,x^2 + (j-1)x - j + \frac{j-3}{2}(1-j)\ ) + j(j-3) \\
&= x^3 + (j-1)x^2 - jx - jx^2 + (1+j)x - 1 + (x-j)(-1+2j) - 1 - 3j \\
&= x^3 - x^2 + 2jx - 2j \\
&= x^2(x-1) + 2j(x-1) = (x-1)(x^2+2j)
\end{aligned}$$

b) Genau dann gehört der Vektor $\vec{x}$ zum Eigenraum von $\mathcal{A}$ mit Eigenwert 1, wenn

$$\begin{pmatrix} j-1 & \frac{j-3}{2} & 0 \\ 0 & -j-1 & j-1 \\ j-1 & \frac{j-3}{2} & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

Die erste und dritte Gleichung ergeben $x_1 = -\frac{j-3}{2(j-1)}x_2 = \frac{(j-3)(j+1)}{4}x_2 = (-1-\frac{j}{2})x_2$ und die 2. Gleichung erfordert, dass $x_3 = \frac{j+1}{j-1}x_2 = -jx_2$. Damit wird der gesuchte Eigenraum über $\mathbb{C}$ durch den Vektor $\begin{pmatrix} -1-\frac{j}{2} \\ 1 \\ -j \end{pmatrix}$ erzeugt.

c) Die weiteren Eigenwerte von $\mathcal{A}$ erfüllen $x^2 = -2j$, also sind $\pm(1-j)$ die anderen Eigenwerte, die für $\mathcal{A}$ noch vorkommen.

**Aufgabe 2** (20 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 2x_1x_2 - 3x_2x_3 + 3x_1^2x_3^2 \\ x_1^2 - 3x_1x_3 \\ -3x_1x_2 + 2x_1^3x_3 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass zu $f$ eine Stammfunktion $U$ existiert

b) Berechnen Sie $U$.

c) Sei $\alpha$ der Weg $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ -t \end{pmatrix}$, für $0 \leq t \leq 1$. Berechnen Sie dann das Wegintegral

$$\int_\alpha \langle f, d\vec{s}(t) \rangle$$

*Lösung.* a) Wir schreiben die Komponenten von $f$ als $f_1, f_2$ und $f_3$. Da $(f_i)_{x_j} = (f_j)_{x_i}$ (nachrechnen!) existiert eine Stammfunktion $U$ für $f$.

b) Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sei $c(t) := t\vec{x}$ für $0 \leq t \leq 1$. Dann ist eine Stammfunktion $U$ für $f$ gegeben durch

$$\begin{aligned} U(\vec{x}) &= \int_c \langle f, d\vec{s} \rangle \\ &= \int_0^1 \langle f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1x_2t^2 - 3x_2x_3t^2 + 3x_1^2x_3^2t^4 \\ x_1^2t^2 - 3x_1x_3t^2 \\ -3x_1x_2t^2 + 2x_1^3x_3t^4 \end{pmatrix}, \vec{x} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 (2x_1^2x_2 - 3x_1x_2x_3)t^2 + 3x_1^3x_3^2t^4 + (x_1^2x_2 - 3x_1x_2x_3)t^2 - 3x_1x_2x_3t^2 + 2x_1^3x_3^2t^4)dt \\ &= \frac{2x_1^2x_2 - 3x_1x_2x_3}{3} + \frac{3}{5}x_1^3x_3^2 + \frac{x_1^2x_2 - 3x_1x_2x_3}{3} - x_1x_2x_3 + \frac{2}{5}x_1^3x_3^2 \\ &= x_1^2x_2 - 3x_1x_2x_3 + x_1^3x_3^2 \end{aligned}$$

c) Das gesuchte Wegintegral ist einfach

$$\int_\alpha \langle f, d\vec{s} \rangle = U(\alpha(1)) - U(\alpha(0)) = U(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}) = -9 - 9 + 27 = 9$$

**Aufgabe 3** (20 Punkte)
Ein Herd habe 4 Kochplatten, deren jede auf die Stärken 0,1,2 oder 3 gestellt werden kann. Mit $X$ bezeichnen wir die zufällige Anzahl der auf "2" stehenden Kochplatten.

a) Welcher Verteilung unterliegt $X$? (Antwort begründen!)

b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von $X$.

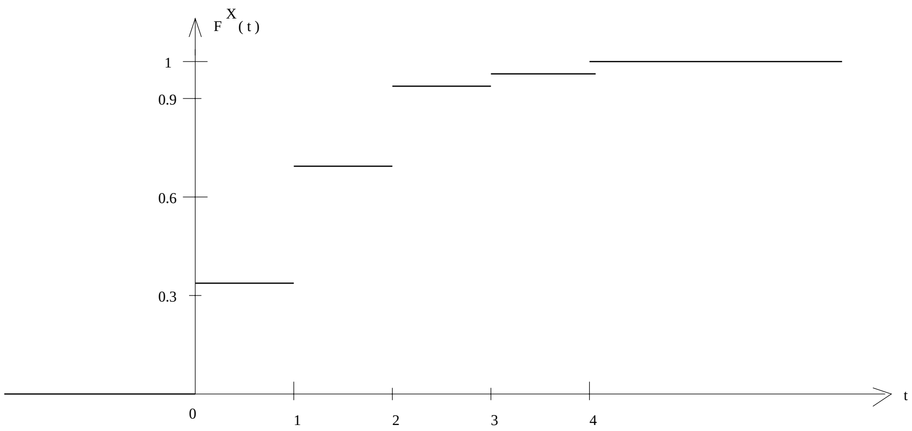
c) Berechnen Sie für $X$ den Erwartungswert und die Standardabweichung.

*Lösung.* a) Jede der 4 Platten kann auf "2" stehen, oder auch nicht. Da jede der 4 Stellungen $0, 1, 2$ und $3$ mit derselben Wahrtscheinlichkeit gewichtet werden muss, also mit $p = \frac{1}{4}$, liegt ein Bernoulliexperiment vor mit Parametern $n = 4$ und $p = \frac{1}{4}$. Dies ist die Verteilung, der $X$ unterliegt.

b) Es gilt $F^X(t) = 0$, wenn $t < 0$ und $F^X(t) = 1$, wenn $t \geq 4$. Weiter haben wir

$$F^X(t) = \begin{cases} P(X=0) = (3/4)^4 = 81/256 = 0.32 & , \text{ wenn } \quad 0 \leq t < 1 \\ P(X \leq 1) = (3/4)^4 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (3/4)^3 = 189/256 = 0.73 & , \text{ wenn } \quad 1 \leq t < 2 \\ P(X \leq 2) = \frac{189}{256} + 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot (3/4)^2 = 243/256 = 0.95 & , \text{ wenn } \quad 2 \leq t < 3 \\ P(X \leq 3) = \frac{243}{256} + \frac{4}{64} \cdot (3/4) = 255/256 = 0.99 & , \text{ wenn } \quad 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

Hier ist der Graph von $F^X$:




c) Bei einer bernoulli-verteilten Zufallsgröße ist der Erwartungswert $np$, also hier $np = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ und die Varianz $np(1-p) = \frac{3}{4}$, somit ist $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

**Aufgabe 4** (20 Punkte)
In einer Stadt sei der jährliche Niederschlag (in $\ell/m^2$) eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu = 234\,\ell/m^2$ und Standardabweichung $\sigma = 25\,\ell/m^2$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Niederschlag 2008 oberhalb $260\ell/m^2$ ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Summe der Niederschläge, welche in den kommenden beiden Jahren 2008 und 2009 niedergehen, oberhalb $500\,\ell/m^2$?

(Dabei können die Niederschlagsmengen als stochastisch unabhängig angesehen werden).

*Lösung.* Die Niederschlagsmenge bezeichnen wir mit $X$. Dann ist also $X$ nach $\mathcal{N}(234, 25)$ verteilt. Dann ist aber $Y := \frac{X-234}{25}$ eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße.

a) Die W'keit, dass $X \geq 260$ sein wird, ist dann

$$P(X \geq 260) = P(Y \geq 26/25 = 1.04) = 1 - \Phi(1.04) = 0.15$$

b) Die Summe $S$ der Niederschlagsmengen in den folgenden beiden Jahren ist nach $\mathcal{N}(2\cdot 234,\ \sqrt{2}\cdot 25)$ verteilt. Die gesuchte W' keit ist dann

$$P(S \geq 500) = P(\frac{S-468}{25\sqrt{2}} \geq \frac{32}{25\sqrt{2}}) = 1 - \Phi(\frac{32}{25\sqrt{2}}) = 1 - \Phi(0.9051) = 1 - 0.817 = 0.183$$